5. Differenzieren von Funktionen auf $\mathbb{R}$

5.1. Ableitung

Im folgenden stets: $D \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

5.1. Definition

Sei $f: D \to \mathbb{K}'$, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt von D

(a) $\left.\begin{array}{l} f \text{ differenzierbar} \\ \text{in } a \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert

$$\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{=: f'(a) =: \frac{df}{dx}(a)}$$

(1.) Ableitung von f in a

(auch: Differentialquotient von f in a)

(b) falls $a \in D$ Häufungspkt. von $D \cap [a, \infty[$, setze:

$\left.\begin{array}{l} f \text{ von rechts} \\ \text{diff. in } a \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =: f_+'(a)$ existiert

analog: von links diff-bar

(c) Sei $A \subseteq D$ mit $\forall a \in A$ gilt: a ist Häufungspkt. von D

f diff. bar auf A $:\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall a \in A \text{ gilt:} \\ f \text{ diff. bar in } a \end{array}\right.$

mit

(1.) Ableitung von f auf A: $f': \begin{array}{l} A \to \mathbb{K}' \\ a \mapsto f'(a) \end{array}$

auch: $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx} f$

(d) f diff. bar $:\Leftrightarrow$ f diff. bar auf D.

5.2. Bemerkung (i) Für $a \in D$ Häufungspkt von D gilt:

$$f \text{ diff-bar in } a \iff \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{=: g(h)} \text{ existiert}$$

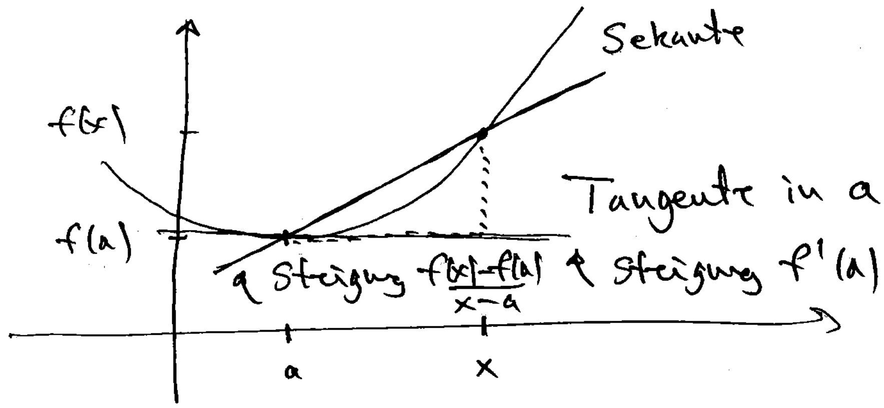
$=: g(h)$, $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f) - a$
$:= \{x-a : x \in \mathrm{dom}(f)\}$

d.h. hier sind bel.
Nullfolgen $(h_n)_n$ zu betrachten mit $h_n \neq 0$, $h_n \in \mathrm{dom}(g)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\frac{df}{dx}$ ist kein Quotient; nur Notation!
(Gelegentlich schreiben wir auch $f'(x) =: \frac{df(x)}{dx}$)

(iii) geometrische Interpretation für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$f'(a)$ ist Steigung der Tangente an Graphen von f im Pkt. a



5.3. Beispiele

(i) konstante Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x) =: c$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\frac{c-c}{x-a}} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

(ii) Monom $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f'(a) = n a^{n-1} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \text{ da}$$

$$f(a+h)-f(a) = (a+h)^n - a^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k a^{n-k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big) = \binom{n}{1} a^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} a^{n-k}}_{\to 0,\ h \to 0}$$

(iii) e-Fkt.:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{\lambda x} \end{array} \quad \text{wobei } \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(a) = \lambda e^{\lambda a} = \lambda f(a)} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

insbes.:
- $\exp' = \exp$ $\quad (\lambda = 1)$
- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$

$\Big\}$ (aus $\lambda = \pm i$)

da: $\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big) = e^{\lambda a} \underbrace{(e^{\lambda h}-1)/h}_{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n h^{n-1}}{n!}}$ $\quad \forall h \neq 0$

Funktionalgl.

$$= \lambda e^{\lambda a} g(h), \qquad g: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{(n+1)!}$$

Potenzreihe mit Kgz. radius ∞ (Quot. krit.!)

Satz 4.23

$\Rightarrow$ g stetig auf $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \lim_{h \to 0} g(h) = g(0) = 1$ ✓

(iv) $|\cdot|: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$ diff. bar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, aber nicht in 0,

mit $\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sgn}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(Ableitung von rechts bzw links in 0 existiert dagegen!)

5.4 Definition (Höhere Ableitungen) Sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{K}$, sei $x \in \mathcal{D}$, sei $A \subseteq \mathcal{D}$

(a) Falls $\exists\, \varepsilon > 0$, so dass f diff.-bar auf $\mathcal{D} \cap \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ und f' diff.-bar in x, setze

$$f''(x) := (f')'(x) \quad \text{2. Ableitung von } f \text{ in } x$$

f 2-mal diff.-bar (auf A) $:\Leftrightarrow f, f'$ diff.-bar (auf A)

(b) induktive Def. für $k \in \mathbb{N}$:
falls $\exists\, \varepsilon > 0$, so dass $f^{(0)} := f, f^{(1)} := f', \ldots, f^{(k-2)}$ diff.-bar auf $\mathcal{D} \cap \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ und $f^{(k-1)}$ diff. in x, setze

$$f^{(k)}(x) := \left(f^{(k-1)}\right)'(x) \quad k\text{'te Ableitung von } f \text{ in } x$$

f k-mal diff.-bar (auf A) $:\Leftrightarrow \left\{ f^{(0)}, \ldots, f^{(k-1)} \text{ diff.-bar (auf } A) \right.$

mit

k'te Ableitung von f auf A: $f^{(k)}: \begin{array}{l} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f^{(k)}(x) \end{array}$

(c) f k-mal stetig diff.-bar (auf A) $:\Leftrightarrow f$ k-mal diff.-bar (auf A) und $f^{(k)}$ stetig (auf A)

5.5. Bemerkung

(i) Notation: $f^{(k)} =: \dfrac{d^k f}{dx^k} =: \dfrac{d^k}{dx^k} f =: \left(\dfrac{d}{dx}\right)^k f$

analog $f^{(k)}(x) =: \dfrac{d^k f(x)}{dx^k} = \ldots$

(ii) mit (i) gilt: $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)} = \frac{d}{dk} f^{(k-1)} \quad \left(\text{falls Ableitungen existieren natürlich!}\right)$$

5.6. Beispiel

(i) $\exp^{(k)} = \exp \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(ii) $\sin'' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$

5.7. Satz (Lineare Approximierbarkeit)

Sei $f: D \to \mathbb{K}^1$, $a \in D$ ein Häufungspkt von D.
Dann gilt:

$$f \text{ diff. bar in } a \iff \begin{cases} \exists m \in \mathbb{K}^1, \delta > 0 \text{ und } \varphi: D \cap B_\delta(a) \to \mathbb{K}^1 \\ \text{mit } \lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0, \text{ so dass} \\ f(x) = f(a) + m(x-a) + \varphi(x) \\ \qquad \forall x \in D \cap B_\delta(a) \end{cases}$$

In diesem Fall gilt $f'(a) = m$.

5.8 Bemerkung

(i) Später dient lineare Approximierbarkeit als Def. der Diff. barkeit in allg. Situationen

(ii) es gilt $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} \left[\frac{\varphi(x)}{x-a} (x-a) \right] \underset{\text{Satz 3.6 (ii)}}{=} 0$

5.9 Korollar

(a) f diff. bar in $a \Rightarrow f$ stetig in a

(b) f k-mal stetig diff. bar für ein $k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow f^{(j)}$ stetig $\forall j \in \{0, 1, \dots, k\}$

Beweis von Satz 5.7

"$\Rightarrow$" Setze $m := f'(a)$ und $\forall x \in D$ (entspricht δ bel. groß)

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - m(x-a)$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\xrightarrow[\text{n.V.}]{x\to a} m} - m \quad \forall x \in D \setminus \{a\}$$

✓

"$\Leftarrow$" $\forall x \in D \cap B_\delta(a) \setminus \{a\}$ gilt:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m + \frac{\varphi(x)}{x-a}$$

$\Rightarrow$ f diff.bar in a mit $f'(a) = m$

nach Vor. an φ $\boxtimes$

5.2. Ableitungsregeln

$\boxed{5.10. \text{ Satz}}$ Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x \in D$, $f, g : D \to \mathbb{K}^1$ diff.-bar in x

(a) Linearität der Ableitung

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^1$ ist $\lambda f + \mu g$ diff. bar in x und

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$$

(b) Produktregel

$f \cdot g$ ist diff. bar in x und

$$(fg)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

(c) Quotientenregel

Sei $g(x) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ diff. bar in x und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Beweis: (a) aus Regeln für Limiten

(b) Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $x + h \in D$

$$\Rightarrow (fg)(x+h) = f(x+h)g(x+h) = f(x+h)g(x) + f(x+h)[g(x+h) - g(x)]$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = f'(x)g(x) + \underbrace{\lim_{h \to 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]}$$

Kor 5.9 & Satz 3.6 (ii) $\longrightarrow$ $= f(x) g'(x)$ existiert

(c) da $g(x) \neq 0$ & g diff.-bar in x

$$\overset{\text{Kor 5.9, Satz 3.18 (i)}}{\Longrightarrow} \quad \exists \delta > 0 \ \forall y \in D \cap B_\delta(x) : \quad g(y) \neq 0$$

1. Abt: $f = 1$

Sei $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$ mit $x+h \in D$ (also $g(x+h) \neq 0$!)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right)\frac{1}{h} = \underbrace{\frac{1}{g(x+h)}}_{\xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{g(x)}} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(x+h)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} -g'(x) \text{ u.V.}}$$

Kor 5.9. $\rightarrow$

Satz 3.14 (iii)

$$\Rightarrow \frac{1}{g} \text{ diff-bar in } x \text{ und } \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

2. Abt: $f \neq 1$

aus 1. Abt & Produktregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

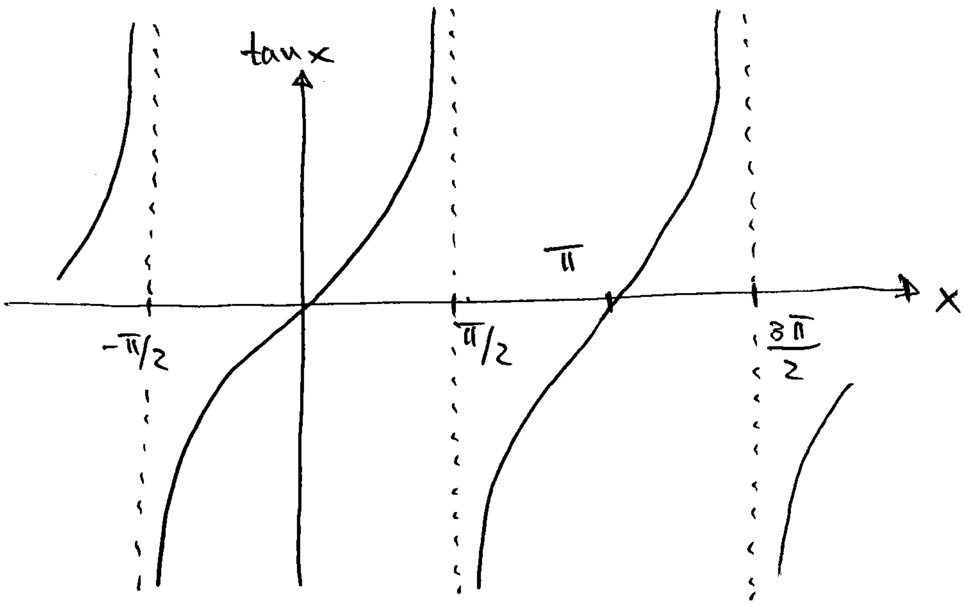
5.11 Beispiel (i) Für $D := \mathbb{C} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ setze

$$\tan : \begin{array}{l} D \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \tan z := \dfrac{\sin z}{\cos z} \end{array}$$ (komplexer) Tangens

Quot.regel $\Rightarrow$ $\tan : \begin{array}{l} D \cap \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x \end{array}$ ist diff-bar mit

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

reeller Tangens



(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ und $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{-n} \end{array}$ gilt

f diff. bar mit

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}$$

$\overset{\text{Bsp. 5.3(ii)}}{\Rightarrow}$ $\forall n \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}: \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

$\boxed{\text{5.12 Satz}}$ (Kettenregel)

Seien $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$, $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{C}$ Funktionen mit $f(D_f) \subseteq D_g$.

Sei f diff. bar in $x \in D_f$ und g diff. bar in $f(x) \in D_g$.

Dann ist $g \circ f$ diff. bar in x mit

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

Beweis: Nach Satz 5.7:

- f diff. bar. in $x \Rightarrow \exists \delta > 0\ \exists \varphi: \underbrace{B_\delta(0) \cap (D_f - \{x\})}_{=:D_\varphi} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{f'(x)h + \varphi(h)}_{=:\mathcal{H}(h)} \quad \forall h \in D_\varphi \text{ und } \frac{\varphi(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

- g diff. bar in $y := f(x) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\ \exists \chi: \underbrace{B_\varepsilon(0) \cap (D_g - \{y\})}_{=:D_\chi} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(y+k) = g(y) + g'(y)k + \chi(k) \quad \forall k \in D_\chi \text{ und } \frac{\chi(k)}{k} \xrightarrow{k\to 0} 0.$$

Da $\varkappa(h) \xrightarrow[\text{Bem. 5.8(ii)}]{h\to 0} 0 \Rightarrow \exists\, 0 < \tilde\delta \le \delta : \varkappa(h) \in D_\chi \;\forall h \in \underbrace{D_\varphi \cap B_{\tilde\delta}(0)}_{=: \tilde D_\varphi}$

$\Rightarrow \forall h \in \tilde D_\varphi$:

$$g(\underbrace{f(x+h)}_{f(x)+\varkappa(h)}) = g(f(x)) + g'(f(x))\varkappa(h) + \chi(\varkappa(h))$$

$\Rightarrow \forall\, 0 \neq h \in \tilde D_\varphi$:

$$\frac{1}{h}\left[(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x)\right] = g'(f(x))f'(x) + g'(f(x))\underbrace{\frac{\varphi(h)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} + \underbrace{\frac{\chi(\varkappa(h))}{h}}_{=: \Phi(h)}$$

z.z.: $\Phi(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$.

1. Fall: $\varkappa(h) = 0 \Rightarrow \chi(\varkappa(h)) = 0 \Rightarrow \Phi(h) = 0$

2. Fall: $\varkappa(h) \neq 0 \Rightarrow \Phi(h) = \underbrace{\frac{\varkappa(h)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{\chi(\varkappa(h))}{\varkappa(h)}}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} \longrightarrow 0,\; h \to 0$

$\frac{\varkappa(h)}{h} = f'(x) + \frac{\varphi(h)}{h}$, da $\varkappa(h) \to 0,\, h \to 0$ und $\frac{\chi(k)}{k} \xrightarrow{k\to 0} 0$ ∎

5.13. Beispiel:

Ableitung von $x \mapsto x^z$ ($D = \mathbb{R}_>$), $z \in \mathbb{C}$

$$x^z \underset{\text{Def. 4.49}}{=} e^{z\ln x} = g(\ln x) \quad \text{mit} \quad g := e^{z\cdot}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}x^z \underset{\text{Bsp. 5.3(iii)}}{=} \underbrace{g'(\ln x)}_{z g(\ln x)} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\ln x}_{1/x \text{ (Übung!)}}$$

$$= z x^z \cdot \frac{1}{x} \underset{\text{Fktlglg. der e-Fkt.}}{=} \boxed{z x^{z-1}}$$

5.14 Satz Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (uneigentliches) Intervall, nicht ausgeartet (d.h. mit > 1 Elementen).

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton, diff.bar in $x \in I$ mit $f'(x) \neq 0$.

Dann ist f^{-1} diff. bar in $f(x)$ und

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\left(\Leftrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \text{für } y = f(x) \right)$$

Beweis: Übung!

5.3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

In diesem Unterkapitel: • Fkt.'en $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
• stets $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

5.15 Definition

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, sei $\xi \in D$.

f hat lokales Maximum (bzw. Minimum) in ξ $:\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in B_\varepsilon(\xi) \cap D:$ $f(\xi) \geq f(x)$ (bzw. $f(\xi) \leq f(x)$)

- ξ heißt Maximalstelle (bzw. Minimalstelle)
- falls $\forall x \in (B_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}) \cap D$ sogar $f(\xi) > f(x)$: striktes lok. Max (analog für Min)
- Extremum: Maximum oder Minimum

Eine notwendige Bed. für Extrema:

5.16 Satz Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$. Sei $\xi \in]a,b[$ lokales Extremum von f und f diff. bar in ξ

Dann gilt: $$f'(\xi) = 0$$

Beweis: o.E., sei ξ Maximalstelle (für Min analog!)

Sei $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(\xi) \subset]a,b[$, sei $x \in B_\varepsilon(\xi)$

$$\underset{\text{in } \xi}{\overset{\text{f diff.bar}}{\Longrightarrow}} \quad f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \nearrow \xi} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\geq 0} = \lim_{x \searrow \xi} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \quad f'(\xi) = 0$$

∎

5.17 Warnung

(i) Bed. $f'(\xi)=0$ nicht hinreichend für lok. Extremum

Bsp.: $f: \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ und $\xi = 0$

(ii) Randpkt.'e a, b ausgeschlossen in Satz 5.16

Bsp: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ und $\xi = 0$ oder $\xi = 1$

5.18. Satz (Rolle)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und f diff.bar auf $\left]a,b\right[$. Dann $\exists \xi \in \left]a,b\right[: f'(\xi) = 0$.

Beweis: 1. Fall: $f =$ konst. trivial

2. Fall: $f \neq$ konst

$\Rightarrow \exists x_0 \in \left]a,b\right[$ mit $f(x_0) \neq f(a)$. o.E. sei $f(x_0) > f(a)$
("<" analog!)

Satz 3.26 $\Rightarrow f$ nimmt Maximum an,

d.h. $\exists \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

wegen $f(x_0) > f(a) \Rightarrow \xi \in \left]a,b\right[\Rightarrow$ Beh. mit Satz 5.16

5.19 Korollar (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff.bar in $\left]a,b\right[$. Sei $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in \left]a,b\right[$ ($\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} g(a) \neq g(b)$!). Dann gilt

$$\exists \xi \in \left]a,b\right[: f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi).$$

Insbesondere für $g = \mathrm{id}$:

$$\exists \tau \in \left]a,b\right[: f'(\tau) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Beweis: Mittels Rolle für

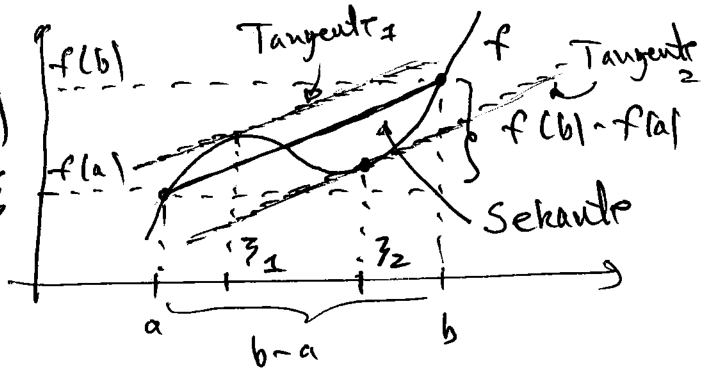
$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,(g(x)-g(a))$$

dann φ stetig auf $[a,b]$, diff-bar auf $]a,b[$ &

$$\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)$$

$$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi = \xi(g) \in\,]a,b[\, : 0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(\xi) \quad \blacksquare$$

Geom. Interpretation für $g = \mathrm{id}$: Steigung Sekante durch $(a, f(a))$ & $(b, f(b))$ = Steigung Tangente bei ξ



Zusammenhang Monotonie & Ableitung in

$\boxed{\text{5.20 Satz}}$ Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ diff-bar

(a) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in\,]a,b[\ \Rightarrow f$ isoton

$>$ $\Rightarrow f$ strikt isoton

$\leq$ $\Rightarrow f$ antiton

$<$ $\Rightarrow f$ strikt antiton

(b) f isoton $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \ \forall x \in\,]a,b[$

f antiton $\Rightarrow$ $\leq$

(hier kein extra Version für „strikt"; Bsp: $f(x) = x^3$)

Beweis: Übung!

5.21 Satz Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ diff-bar und $\xi \in]a,b[$.

Sei
- f 2 mal diff. bar in ξ
- $f'(\xi) = 0$
- $f''(\xi) > 0$ (bzw. < 0)

Dann hat f in ξ ein striktes lokales Minimum (bzw. Max)

5.22. Bemerkung

Im Gegensatz zu Satz 5.16 gibt Satz 5.21 eine hinreichende, aber nicht notwendige Bed. für ein lokales Extremum. Bsp. $f: \begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^4 \end{array}$ und $\xi = 0$

Beweis von Satz 5.21 nur Fall $f''(\xi) > 0$ (< 0 analog!)

da $0 < f''(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$

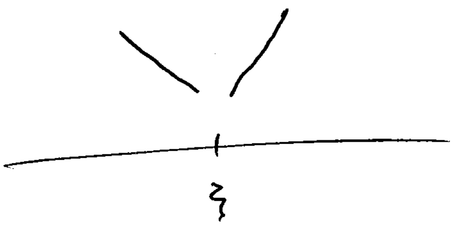
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\xi) \subseteq]a,b[$ & $\dfrac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} > 0 \ \forall x \in B_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}$

da $f'(\xi) = 0 \Rightarrow$
- $f'(x) > 0 \ \forall x \in]\xi, \xi + \varepsilon[$
- $f'(x) < 0 \ \forall x \in]\xi - \varepsilon, \xi[$

Satz 5.20
$\Rightarrow$ f strikt antiton in $]\xi - \varepsilon, \xi[$

f " isoton in $]\xi, \xi + \varepsilon[$

$\Rightarrow$ striktes lok. Min in ξ $\boxtimes$



$\boxed{5.23 \text{ Satz}}$ (Regeln von de l'Hopital)

Seien $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ diff.bar mit $g'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in]a,b[$

Sei **entweder** $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \searrow a} g(x)$

oder $\lim\limits_{x \searrow a} g(x) = \pm\infty$

Weiter **existiere** $\lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} =: L$

Dann existiert $\lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Zusatz: analog für $x \nearrow b$ und $x \to \pm\infty$

Beweis: • Fall „entweder": Sei $x_0 \in]a,b[$ und

$$\hat{f} : \begin{array}{l} [a, x_0] \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x), & x \in]a, x_0] \\ 0, & x = a \end{cases} \end{array} \qquad (\text{stetig!})$$

analog def. $\hat{g}$!

Mittelwertsatz mit $\hat{f}, \hat{g}$ auf $[a, x_0] \Rightarrow \exists \xi = \xi_{x_0} \in]a, x_0[$:

$$\frac{\hat{f}'(\xi)}{\hat{g}'(\xi)} = \frac{\hat{f}(x_0) - \hat{f}(a)}{\hat{g}(x_0) - \hat{g}(a)}, \quad \text{d.h.} \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$\Rightarrow$ Beh. mit $x_0 \searrow a \quad (\Rightarrow \xi_{x_0} \searrow a)$

• Fall „oder": Sei $\varepsilon > 0$, n.V. $\exists \delta > 0 \; \forall x \in]a, a+\delta[\; (\delta < |b-a|)$

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon \quad (*)$$

Sei $a < x_0 < y_0 < a+\delta$, so dass $g(x) \neq 0 \;\; \forall x \in]a, y_0]$ (möglich n.V.!)

Mittelwertsatz auf $[x_0, y_0]$

$$\Longrightarrow \quad \exists \xi \in]x_0, y_0[: \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(y_0) - f(x_0)}{g(y_0) - g(x_0)}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \left| \frac{f(y_0)-f(x_0)}{g(y_0)-g(x_0)} - L \right| < \varepsilon$$

$$\overset{(**)}{\Longrightarrow} \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L - \frac{f(y_0)-Lg(y_0)}{g(x_0)} \right| < \varepsilon$$

(**) $\frac{g(x_0)-g(y_0)}{g(x_0)} = 1 - \frac{g(y_0)}{g(x_0)} > 0$ (!) $\forall x_0$ nahe bei a

$$|\xi - \eta| \geq |\xi| - |\eta| \Longrightarrow \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L \right| < \varepsilon + \left| \frac{f(y_0)-Lg(y_0)}{g(x_0)} \right|$$

$$\Rightarrow \limsup_{x_0 \downarrow a} \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L \right| \leq \varepsilon \quad \underline{\forall \varepsilon > 0} \quad (!) \text{ weil } \lim_{x \downarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

$$\Rightarrow \limsup_{x_0 \downarrow a} \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L \right| = 0 \overset{|\cdot| \geq 0}{\Longrightarrow} \lim_{x_0 \downarrow a} \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L \right| = 0 \quad \checkmark$$

Zusatz: $x \nearrow b$ klar; $x \to \pm\infty$ mittels $f(x) =: \tilde{f}(\frac{1}{x}), g(x) =: \tilde{g}(\frac{1}{x})$ aus Fall $x \overset{\nearrow 0}{\searrow 0}$ für $\tilde{f}, \tilde{g}$. ∎

5.24 Beispiel Sei $D =]0,\infty[$, $\alpha > 0$. Dann gilt:

(a) $\lim_{x \downarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$ „ln wächst langsamer als jede Potenz"

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Beweis (a): $\ln x \overset{x \downarrow 0}{\longrightarrow} -\infty$, $x^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln x} \overset{x \downarrow 0}{\longrightarrow} \infty$

$$\overset{\text{Satz 5.23}}{\Longrightarrow} \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-\alpha})'} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1/x}{\alpha x^{-\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \downarrow 0} x^\alpha = 0$$

(b) aus (a) mittels $y = \frac{1}{x}$ und $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$. ∎