5.2. Ableitungsregeln

5.10. Satz Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x \in D$, $f, g : D \to \mathbb{K}$ diff-bar in x

(a) Linearität der Ableitung

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ist $\lambda f + \mu g$ diff. bar in x und

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$$

(b) Produktregel

$f \cdot g$ ist diff. bar in x und

$$(fg)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

(c) Quotientenregel

Sei $g(x) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ diff. bar in x und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}$$

Beweis: (a) aus Regeln für Limiten

(b) Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $x + h \in D$

$$\Rightarrow (fg)(x+h) = f(x+h) g(x+h) = f(x+h) g(x) + f(x+h)[g(x+h) - g(x)]$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = f'(x) g(x) + \underbrace{\lim_{h \to 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]}_{\substack{\text{Kor 5.9} \\ \text{\& Satz 3.6 (ii)}} \longrightarrow \; = f(x) g'(x) \text{ existiert}}$$

(c) da $g(x) \neq 0$ & g diff. bar in x

$$\overset{\text{Kor 5.9, Satz 3.18 (i)}}{\Longrightarrow} \quad \exists \delta > 0 \; \forall y \in D \cap B_\delta(x) : \; g(y) \neq 0$$

1. Abt: $f = 1$

Sei $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$ mit $x+h \in D$ (also $g(x+h) \neq 0$!)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right)\frac{1}{h} = \underbrace{\frac{1}{g(x+h)}}_{\substack{h\to 0 \\ \longrightarrow\ \frac{1}{g(x)}}} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(x+h)}{h}}_{\substack{h\to 0 \\ \longrightarrow\ -g'(x)\ \text{u.V.}}}$$

Kor 5.9. $\rightarrow$

Satz 3.14 (iii)

$$\Rightarrow \frac{1}{g} \text{ diff.-bar in } x \text{ und } \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

2. Abt: $f \neq 1$

aus 1. Abt & Produktregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \blacksquare$$

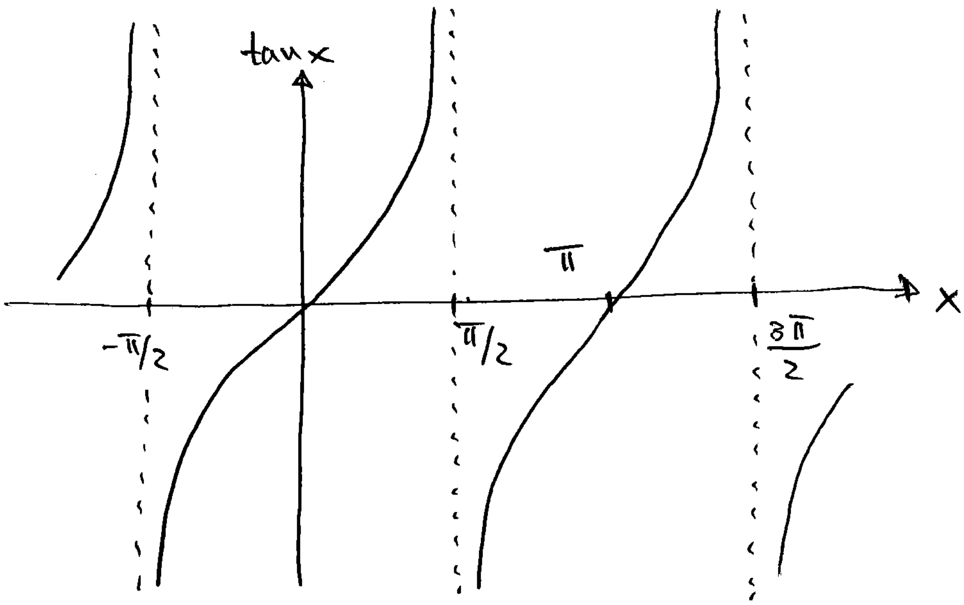
5.11 Beispiel (i) Für $D := \mathbb{C} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ setze

$$\tan: \begin{array}{l} D \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \tan z := \dfrac{\sin z}{\cos z} \end{array}$$ (komplexer) Tangens

Quot.-regel $\Rightarrow$ $\tan: \begin{array}{l} D \cap \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x \end{array}$ ist diff.-bar mit

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

reeller Tangens



(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ und $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{-n} \end{array}$ gilt

f diff. bar mit

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}$$

Bsp. 5.3(ii) $\Rightarrow$ $\forall n \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}} : \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

$\boxed{5.12 \text{ Satz}}$ (Kettenregel)

Seien $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$, $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{C}$ Funktionen mit $f(D_f) \subseteq D_g$.

Sei f diff. bar in $x \in D_f$ und g diff. bar in $f(x) \in D_g$.

Dann ist $g \circ f$ diff. bar in x mit

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$$

Beweis: Nach Satz 5.7:

- f diff. bar. in $x \Rightarrow \exists \delta > 0\ \exists \varphi : \underbrace{B_\delta(0) \cap (D_f - \{x\})}_{=: D_\varphi} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{f'(x)h + \varphi(h)}_{=: \mathcal{H}(h)} \quad \forall h \in D_\varphi \text{ und } \frac{\varphi(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

- g diff. bar in $y := f(x) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\ \exists \chi : \underbrace{B_\varepsilon(0) \cap (D_g - \{y\})}_{=: D_\chi} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(y+k) = g(y) + g'(y)k + \chi(k) \quad \forall k \in D_\chi \text{ und } \frac{\chi(k)}{k} \xrightarrow{k \to 0} 0.$$

Da $\varkappa(h) \xrightarrow{h\to 0} 0 \underset{\text{Bem. 5.8(ii)}}{\Rightarrow} \exists\, 0 < \tilde{\delta} \le \delta : \varkappa(h) \in D_\chi \;\forall h \in \underbrace{D_\varphi \cap B_{\tilde{\delta}}(0)}_{=: \tilde{D}_\varphi}$

$\Rightarrow \forall h \in \tilde{D}_\varphi$:

$$g(\underbrace{f(x+h)}_{f(x)+\varkappa(h)}) = g(f(x)) + g'(f(x))\varkappa(h) + \chi(\varkappa(h))$$

$\Rightarrow \forall\, 0 \neq h \in \tilde{D}_\varphi$:

$$\frac{1}{h}\left[(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x)\right] = g'(f(x))f'(x) + g'(f(x))\underbrace{\frac{\varphi(h)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} + \underbrace{\frac{\chi(\varkappa(h))}{h}}_{=: \Phi(h)}$$

z.z.: $\Phi(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$.

1. Fall: $\varkappa(h) = 0 \Rightarrow \chi(\varkappa(h)) = 0 \Rightarrow \Phi(h) = 0$

2. Fall: $\varkappa(h) \neq 0 \Rightarrow \Phi(h) = \underbrace{\frac{\varkappa(h)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{\chi(\varkappa(h))}{\varkappa(h)}}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} \longrightarrow 0,\; h \to 0$

$\frac{\varkappa(h)}{h} = f'(x) + \frac{\varphi(h)}{h}$, da $\varkappa(h) \to 0,\; h \to 0$ und $\frac{\chi(k)}{k} \xrightarrow{k\to 0} 0$

■

5.13. Beispiel:

Ableitung von $x \mapsto x^z$ ($D = \mathbb{R}_>$), $z \in \mathbb{C}$

$$x^z \underset{\text{Def. 4.49}}{=} e^{z\ln x} = g(\ln x) \quad \text{mit} \quad g := e^{z\cdot}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}x^z = \underbrace{g'(\ln x)}_{\underset{\text{Bsp. 5.3(iii)}}{=} zg(\ln x)} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\ln x}_{1/x \text{ (Übung!)}}$$

$$= z x^z \cdot \frac{1}{x} \underset{\text{Fktlglg. der e-Fkt.}}{=} \boxed{z x^{z-1}}$$

5.14 Satz Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (uneigentliches) Intervall, nicht ausgeartet (d.h. mit > 1 Elementen).

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton, diff.bar in $x \in I$ mit $f'(x) \neq 0$.

Dann ist f^{-1} diff.bar in $f(x)$ und

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\left(\Leftrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \text{für } y = f(x) \right)$$

Beweis: Übung!