5. Differenzieren von Funktionen auf $\mathbb{R}$

5.1. Ableitung

Im folgenden stets:
$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

5.1. Definition

Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$, sei $a \in \mathcal{D}$ ein Häufungspunkt von $\mathcal{D}$

(a) f differenzierbar in a $:\Leftrightarrow$ $\underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ existiert

$$=: f'(a) =: \frac{df}{dx}(a)$$

(1.) Ableitung von f in a

(auch: Differentialquotient von f in a)

(b) falls $a \in \mathcal{D}$ Häufungspkt. von $\mathcal{D} \cap [a, \infty[$, setze:

f von rechts diff. in a $:\Leftrightarrow$ $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =: f'_+(a)$ existiert

analog: von links diff-bar

(c) Sei $A \subseteq \mathcal{D}$ mit $\forall a \in A$ gilt: a ist Häufungspkt. von $\mathcal{D}$

f diff. bar auf A $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall a \in A \text{ gilt:} \\ f \text{ diff. bar in } a \end{cases}$

mit

(1.) Ableitung von f auf A: $f' : \begin{array}{l} A \to \mathbb{K}' \\ a \mapsto f'(a) \end{array}$

auch: $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx} f$

(d) f diff. bar $:\Leftrightarrow$ f diff. bar auf $\mathcal{D}$.

5.2. Bemerkung (i) Für $a \in D$ Häufungspkt von D gilt:

$$f \text{ diff-bar in } a \iff \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{=: g(h),\ \mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f) - a} \text{ existiert}$$

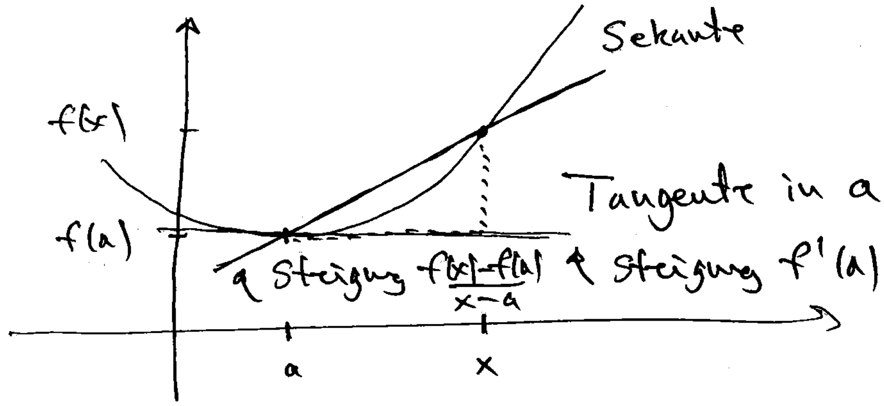
$$:= \{x-a : x \in \mathrm{dom}(f)\}$$

d.h. hier sind bel. Nullfolgen $(h_n)_n$ zu betrachten mit $h_n \neq 0$, $h_n \in \mathrm{dom}(g)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\frac{df}{dx}$ ist kein Quotient; nur Notation!
(Gelegentlich schreiben wir auch $f'(x) =: \frac{df(x)}{dx}$)

(iii) geometrische Interpretation für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$f'(a)$ ist Steigung der Tangente an Graphen von f im Pkt. a



5.3. Beispiele

(i) konstante Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x) =: c$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\frac{c-c}{x-a}} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

(ii) Monom $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f'(a) = n a^{n-1} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \text{ da}$$

$$f(a+h)-f(a) = (a+h)^n - a^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k a^{n-k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h}\left(f(a+h)-f(a)\right) = \binom{n}{1} a^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} a^{n-k}}_{\to 0,\ h\to 0}$$

(iii) e-Fkt.:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{\lambda x} \end{array} \quad \text{wobei } \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f'(a) = \lambda e^{\lambda a} = \lambda f(a)} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

insbes.:
- $\exp' = \exp$ $\quad (\lambda = 1)$
- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$

$\Big\}$ (aus $\lambda = \pm i$)

da: $\frac{1}{h}\left(f(a+h)-f(a)\right) = e^{\lambda a} \underbrace{\left(e^{\lambda h}-1\right)/h}_{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n h^{n-1}}{n!}}$ $\quad \forall h \neq 0$

Funktionalgl.

$$= \lambda e^{\lambda a} g(h), \qquad g: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{(n+1)!}$$

Potenzreihe mit Kgz. radius ∞ (Quot. krit.!)

Satz 4.23
$\Rightarrow$ g stetig auf $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \lim_{h\to 0} g(h) = g(0) = 1$ ✓

(iv) $|\cdot| : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$ diff.bar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, aber nicht in 0,

mit $\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sgn}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(Ableitung von rechts bzw links in 0 existiert dagegen!)

5.4 Definition (Höhere Ableitungen) Sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{K}$, sei $x \in \mathcal{D}$, sei $A \subseteq \mathcal{D}$

(a) Falls $\exists\, \varepsilon > 0$, so dass f diff-bar auf $\mathcal{D} \cap \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ und f' diff. bar in x, setze

$$f''(x) := (f')'(x) \qquad \text{2. Ableitung von } f \text{ in } x$$

f 2-mal diff. bar (auf A) $:\Leftrightarrow f, f'$ diff. bar (auf A)

(b) induktive Def. für $k \in \mathbb{N}$:

falls $\exists\, \varepsilon > 0$, so dass $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} := f'$, $\ldots$, $f^{(k-2)}$ diff. bar auf $\mathcal{D} \cap \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ und $f^{(k-1)}$ diff. in x, setze

$$f^{(k)}(x) := \left(f^{(k-1)}\right)'(x) \qquad k\text{'te Ableitung von } f \text{ in } x$$

f k-mal diff. bar (auf A) $:\Leftrightarrow \begin{cases} f^{(0)}, \ldots, f^{(k-1)} \\ \text{diff. bar (auf } A) \end{cases}$

mit

k'te Ableitung von f auf A: $\quad f^{(k)}: \begin{array}{l} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f^{(k)}(x) \end{array}$

(c) f k-mal stetig diff-bar (auf A) $:\Leftrightarrow f$ k-mal diff. bar (auf A) und $f^{(k)}$ stetig (auf A)

5.5. Bemerkung

(i) Notation: $f^{(k)} =: \dfrac{d^k f}{dx^k} =: \dfrac{d^k}{dx^k} f =: \left(\dfrac{d}{dx}\right)^k f$

analog $\quad f^{(k)}(x) =: \dfrac{d^k f(x)}{dx^k} = \ldots$

(ii) mit (i) gilt: $\qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)} = \frac{d}{dk} f^{(k-1)} \quad \left(\text{falls Ableitungen existieren natürlich!}\right)$$

5.6. Beispiel

(i) $\exp^{(k)} = \exp \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(ii) $\sin'' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$

5.7. Satz (Lineare Approximierbarkeit)

Sei $f: D \to \mathbb{K}^1$, $a \in D$ ein Häufungspkt von D.
Dann gilt:

$$f \text{ diff. bar in } a \iff \begin{cases} \exists m \in \mathbb{K}^1, \delta > 0 \text{ und } \varphi: D \cap B_\delta(a) \to \mathbb{K}^1 \\ \text{mit } \lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0, \text{ so dass} \\ f(x) = f(a) + m(x-a) + \varphi(x) \\ \qquad \forall x \in D \cap B_\delta(a) \end{cases}$$

In diesem Fall gilt $f'(a) = m$.

5.8 Bemerkung

(i) Später dient lineare Approximierbarkeit als Def. der Diff.barkeit in allg. Situationen

(ii) es gilt $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} \left[\frac{\varphi(x)}{x-a} (x-a) \right] \underset{\text{Satz 3.6 (ii)}}{=} 0$

5.9 Korollar

(a) f diff. bar in $a \Rightarrow f$ stetig in a

(b) f k-mal stetig diff.bar für ein $k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow f^{(j)}$ stetig $\forall j \in \{0, 1, \dots, k\}$

Beweis von Satz 5.7

"$\Rightarrow$" Setze $m := f'(a)$ und $\forall x \in D$ (entspricht δ bel. groß)

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - m(x-a)$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\xrightarrow[\text{n.V.}]{x \to a} m} - m \quad \forall x \in D \setminus \{a\}$$

✓

"$\Leftarrow$" $\forall x \in D \cap B_\delta(a) \setminus \{a\}$ gilt:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m + \frac{\varphi(x)}{x-a}$$

$\Rightarrow$ f diff.bar in a mit $f'(a) = m$

nach Vor. an φ ∎