4.4. Trigonometrische Funktionen, π und Polardarstellung komplexer Zahlen

4.32. Definition

Kosinus

$$\cos: \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \end{array}$$

Kgz. radius $r = \infty$

Sinus

$$\sin: \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \end{array}$$

$\Rightarrow$ abs. kgt. auf $\mathbb{C}$.

4.33 Satz $\forall z \in \mathbb{C}$:

(a) sin, cos sind stetig

(b) $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$

$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

(c) $\cos(z) = \cos(-z)$; $\sin(z) = -\sin(-z)$; insbes.: $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$

(d) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ Eulersche Formel

(e) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ Pythagoras $\left[\sin^2 z := (\sin z)^2\right]$

(f) Additionstheoreme: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(i) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

(ii) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

(iii) $\sin z_1 - \sin z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2}$

(iv) $\cos z_1 - \cos z_2 = -2 \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2}$

u.v.m. ... siehe z. B.

Gradshteyn / Ryzhik: „Table of integrals, series and products".

<u>Beweis</u> (a) Satz 4.23 (da $r=\infty$)

(b) $e^{iz}+e^{-iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}$

(beide Reihen kgt. $\forall z\in\mathbb{C}$) $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big[\underbrace{(iz)^n+(-iz)^n}_{=\begin{cases}0, & n \text{ ungerade}\\ 2\underbrace{(iz)^n}_{i^n z^n}, & n \text{ gerade}\end{cases}}\Big]$

$=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\underbrace{i^{2k}}_{(\underbrace{i^2}_{-1})^k} z^{2k}$

$=2\cos z.$

<u>allg.:</u> $i^n=\begin{cases}1, & n=4l\\ i, & n=4l+1\\ -1, & n=4l+2\\ -i, & n=4l+3\end{cases}$ $l\in\mathbb{N}_0$

Für sin analog!

(c) klar aus Def., oder (b)

(d) klar aus (b)

(e) Übung!

(f) Übung!

4.34 Satz (Reelle trigonom. Fkt.'en)

(a) $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ stetig

(b) $\forall x \in \mathbb{R}: \cos x = \operatorname{Re} e^{ix}, \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$

Beweis: (b) aus $e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ & Satz 4.33 (b)

(a) $\sin(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, $\cos(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ aus Def.

$\Rightarrow \sin^2 x \geq 0, \quad \cos^2 x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\overset{\text{Satz 4.33(e)}}{\Rightarrow} \sin^2 x \in [0,1], \quad \cos^2 x \in [0,1] \Rightarrow$ Beh. ∎

4.35 Satz & Definition

$\exists!\, \xi \in]0,2[$ mit $\cos \xi = 0$.

Kreiszahl: $\pi := 2\xi$ (also $\pi \in]0,4[$)

Der Beweis beruht auf

4.36 Lemma $\forall x \in]0,3[$ gilt

(a) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

(b) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$

[Die Aussage von Lemma 4.36 ist sogar $\forall x > 0$ wahr – mehr dazu später]

Beweis: Übung!

Beweis von Satz 4.35

Lemma 4.36(a)

$$\cos 0 = 1, \quad \cos 2 < 1 - 2 + \underbrace{\frac{16}{24}}_{2/3} = -\frac{1}{3} < 0$$

da cos stetig $\overset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow}$ $\exists \xi \in]0,2[$ mit $\cos \xi = 0$.

Eindeutigkeit von ξ aus: $\cos :]0,2[\to \mathbb{R}$ strikt antiton

- wahr, denn $\forall x, y \in]0,2[$ mit $x > y$

Satz 4.33(f)(iv) $\Rightarrow$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\Big(\underbrace{\frac{x-y}{2}}_{\in]0,1[}\Big) \sin\Big(\underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\in]0,2[}\Big) < 0$$

da Lemma 4.36(b): $\forall \tilde{x} \in]0,2[$:

$$\sin \tilde{x} > \tilde{x}\Big(1 - \frac{\tilde{x}^2}{6}\Big) > \frac{\tilde{x}}{3} > 0 \quad \blacksquare$$

4.37 Satz $\forall z \in \mathbb{C}$

(i) $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin z$

$\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$

(ii) $\cos(z + \pi) = -\cos z$

$\sin(z + \pi) = -\sin z$

(iii) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ und 2π ist kleinste

$\sin(z + 2\pi) = \sin z$ reelle Periode von sin und cos

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$$

<u>Beweis</u>: $\cos\frac{\pi}{2}=0 \overset{4.33(e)}{\Longrightarrow} \left|\sin\frac{\pi}{2}\right|=1 \underset{4.36(b)}{\overset{\frac{\pi}{2}\in\,]0,2[}{\Longrightarrow}} \sin\frac{\pi}{2}=1$

$\Rightarrow$ 4.33(d): $e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$e^{mi\pi/2}=\left(e^{i\pi/2}\right)^m \Longrightarrow$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
e^{ix}	1	i	-1	$-i$	1

$\Rightarrow$ $\forall z\in\mathbb{C}$ aus Funktionalglg. von exp:

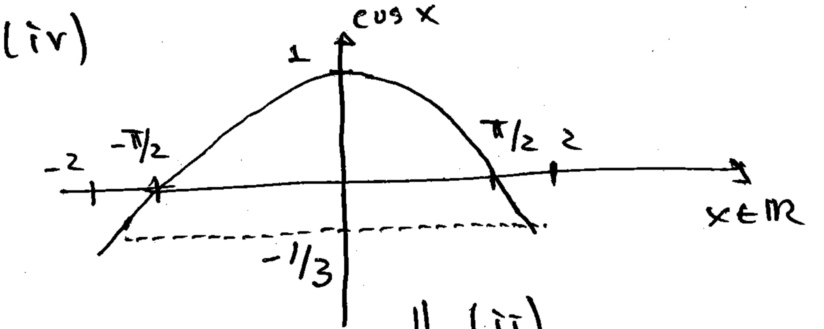
$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{e^{iz+i\pi/2}}_{e^{iz}\underbrace{e^{i\pi/2}}_{i}} + \underbrace{e^{-i(z+\frac{\pi}{2})}}_{\frac{e^{-iz}}{e^{+i\pi/2}}=-ie^{-iz}}\Big) = -\sin z \quad \checkmark$$

sin: analog.

(ii), (iii): Iteration von (i), insbes.: 2π ist <u>Periode</u>.

(<u>kleinste</u> Periode: siehe unten!)

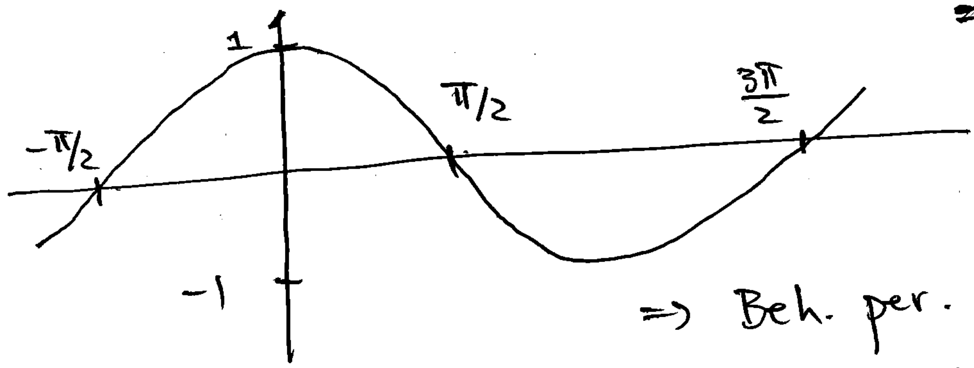
(iv)



Satz 4.35 und cos <u>gerade</u>:

$\pm\frac{\pi}{2}$ einzige Nullst. in $]-2,2[$

$\Downarrow$ (ii)



$\Rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ einzige Nullst. in $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow$ Beh. per. Induktion.

Nullstellen von sin nun aus (i)

<u>Schließlich</u>: 2π ist kleinste Periode von cos (und somit auch von sin), da:

$\cos x>0 \quad \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$\cos x<0 \quad \forall x\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

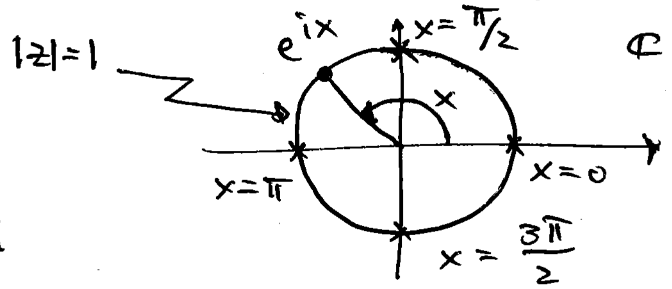
$\Rightarrow$ geht nicht kleiner ■

4.38 Satz

(i) $2\pi i$ ist kleinste imaginäre Periode von exp, insbes.:

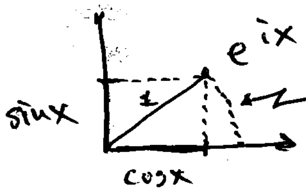
$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(ii) Mit wachsendem $x \in [0, 2\pi[$ durchläuft e^{ix} genau einmal den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ entgegen dem Urzeigersinn



Beweis: Satz 4.37 und Eulersche Formel ∎

Später:

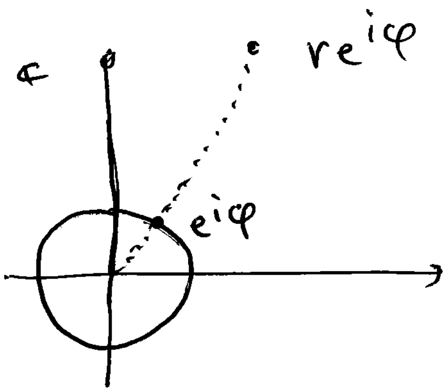


x = Länge des Winkelbogens im Einheitskreis

4.39 Korollar (Polardarstellung komplexer Zahlen)

$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists!\ r \geq 0\ \exists \varphi \in \mathbb{R}: \quad z = r e^{i\varphi}$ — φ: Phase, Argument; r: Betrag

es gilt:
- $r = |z|$
- falls $z \neq 0 \Rightarrow$ φ eindeutig bis auf Addition von $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



Beweis: Sei $0 \neq z \in \mathbb{C}$ $\quad (z = 0 \Rightarrow r = 0,\ \varphi$ bel.$)$

$$\Rightarrow \left|\frac{z}{|z|}\right| = 1 \overset{\text{Satz 4.38}}{\Rightarrow} \exists!\ \varphi_0 \in [0, 2\pi[: \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi_0} \quad ∎$$

4.40 Def. Hauptzweig des Arguments

$$\arg: \begin{array}{l} \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow]-\pi, \pi] \\ z \longmapsto \varphi =: \arg(z) \end{array}$$

also: $z = |z| e^{i \arg(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

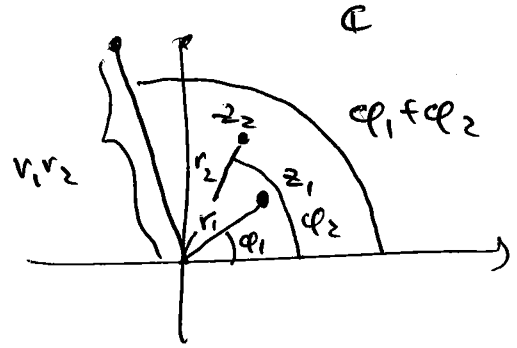
(ist nach Kor. 4.39 wohldef.)

4.41 Korollar (Multiplikation in Polardarstellung)

Seien $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$, $j = 1,2$, so ist

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

„Beträge multiplizieren, Argumente addieren"

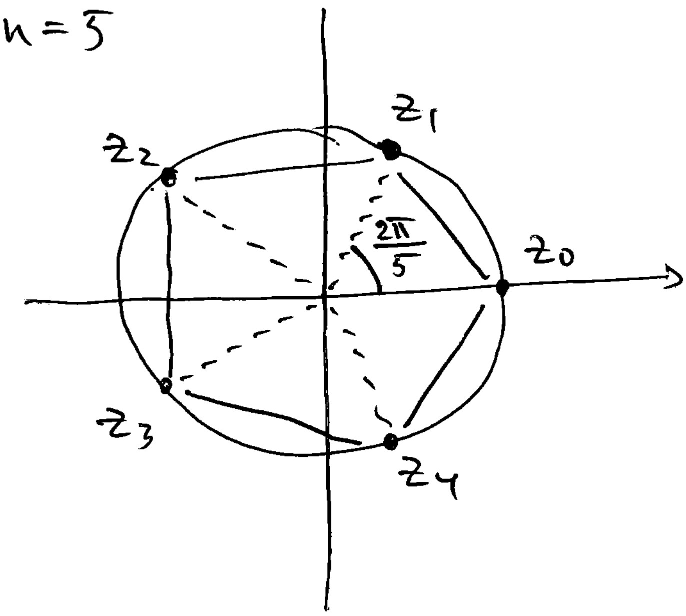


4.42 Korollar Sei $n \in \mathbb{N}$

Die Gleichung $z^n = 1$ besitzt genau n Lösungen in $\mathbb{C}$: $z_k := e^{k2\pi i/n}$, $k = 0, \dots, n-1$

n.te Einheitswurzeln

Bsp.: $n = 5$



allg.: regelmäßiges n-Eck

unter Benutzung der Bem. zwischen 4.38 und 4.39

Eine schöne Anwendung von Kor. 4.42 sowie der Sätze über stetige Funktionen ist

4.43 Fundamentalsatz der Algebra

Sei $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}$, d.h. $\exists a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0$, so dass $P(z) = \sum_{j=0}^{k} a_j z^j$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Dann besitzt P eine Nullstelle.

<u>Beweis</u>: o.E. sei $a_k = 1$ (sonst betrachte $\tilde{P} := \frac{1}{a_k} P$)

Sei $Q: \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq}$, $z \mapsto |P(z)|$

<u>1. Akt</u>: Q nimmt Minimum an

(Idee: da $Q(z) \to \infty$, $|z| \to \infty$)

(i) $Q(z) = |z|^k \cdot \Big| 1 + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a_j z^{j-k}}_{=: r(z)} \Big|$

$$|r(z)| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |a_j| \, |z|^{j-k} \xrightarrow{|z| \to \infty} 0$$

- $j - k < 0$
- endliche Summe

$\Rightarrow \exists \rho \in \,]0, \infty[\,: \; |r(z)| < \frac{1}{2} \;\; \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho$

Da $1 = |1 - r(z) + r(z)| \leq |1 + r(z)| + |r(z)|$

$\Rightarrow \; |1 + r(z)| \geq 1 - |r(z)| > \frac{1}{2} \quad (|z| > \rho)$

$\Rightarrow Q(z) > |z|^k/2 \quad \forall |z| > \rho$

Sei $R \geq \rho$ so groß, dass $R^k/2 \geq |a_0| = Q(0)$

$\Rightarrow \inf_{z \in \mathbb{C}} Q(z) = \inf_{z \in \overline{B_R}} Q(z)$ mit

$\overline{B_R} := \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \}$

(ii) Da $\overline{B_R}$ kompakt (Bsp. 3.25)

und $Q : \overline{B_R} \to \mathbb{R}_{\geq}$ stetig $\overset{\text{Satz 3.26}}{\Rightarrow}$

$$\exists z_- \in \overline{B_R} : Q(z_-) = \min_{z \in \overline{B_R}} Q(z) = \inf_{z \in \overline{B_R}} Q(z)$$

$\Rightarrow$ Beh. mit (i) ✓

<u>2. Abl</u>: $Q(z_-) = 0$

<u>Ann</u>: $Q(z_-) > 0$; sei $q(z) := \frac{1}{P(z_-)} P(z_- + z) \; \forall z \in \mathbb{C}$

also: (i) q Polynom vom Grad k mit $|q(z)| \geq q(0) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(ii) $\exists \xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $m \in \{1, .., k\}$ und Polynom $\tilde{q} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

so dass $q(z) = 1 + \xi z^m + z^{m+1} \tilde{q}(z)$ verwende: Pol $q(z)-1$ verschwindet bei $z=0$

Nun wähle $\tau \in \mathbb{C}$ mit $|\tau| = 1$: $\tau^m = -\overline{\xi}/|\xi|$ (!)

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_{\geq}: |q(\tau t)| = |1 - |\xi| t^m + (\tau t)^{m+1} \tilde{q}(\tau t)|$$

$$\leq |1 - |\xi| t^m| + t^{m+1} |\tilde{q}(\tau t)|$$

$$\overset{\text{für } t < |\xi|^{-1/m}}{=} 1 - t^m \underbrace{(|\xi| - \underbrace{t|\tilde{q}(\tau t)|}_{\xrightarrow{t \to 0} 0})}_{\geq \frac{|\xi|}{2}}$$

$\exists t_0 > 0$: $\forall 0 < t \leq t_0$

$\Rightarrow \forall 0 < t < \min(|\xi|^{-1/m}, t_0)$ gilt

$$|q(\tau t)| \leq 1 - \frac{t^m |\xi|}{2} < 1 \quad ↯ \text{ zu (i)} \quad \boxtimes$$

4.44 Korollar Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom von Grad $k \in \mathbb{N}$. Dann besitzt P genau k Nullstellen in $\mathbb{C}$, gezählt mit ihrer Vielfachheit.