4.3. Exponentialfunktion

4.26. Definition

Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{z^n}{n!} =: \exp(z)$

[wohldef., da Kgz.radius der Potenzreihe $r=\infty$ (siehe Bsp. 4.10) $\Rightarrow$ abs. kgt. auf $\mathbb{C}$]

4.27 Satz (a) exp ist stetig.

(b) $\exp(0)=1$, $\exp(1) = e := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n!}$ (Eulersche Zahl)

(c) Funktionalglg: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1+z_2)$$

(d) $\forall z \in \mathbb{C}$: $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

(e) $\forall z \in \mathbb{C}$: $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$

(f) insbes. $\forall x \in \mathbb{R}$:
- $\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix)$
- $|\exp(ix)| = 1$

Beweis: (a) Satz 4.23, da $r=\infty$ (b) klar!

(c) Übung

(d) Ann.: $\exists z_0 \in \mathbb{C}$: $\exp(z_0) = 0$

$$\Rightarrow e = \exp(1) = \exp(1-z_0+z_0) \overset{(c)}{=} \exp(1-z_0)\underbrace{\exp(z_0)}_{0} = 0 \ ↯$$

Somit $1 = \exp(0) = \exp(z-z) \overset{(c)}{=} \exp(z)\exp(-z)$

$\overset{\exp(z)\neq 0}{\Rightarrow} \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.

(e) $\overline{\exp(z)} = \overline{\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right)} \overset{\text{Kor 2.9}}{=} \lim_{N\to\infty} \underbrace{\left(\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}}\right)}_{\sum_{n=0}^{N} \overline{\frac{z^n}{n!}}}$

$\overline{\frac{z^n}{n!}} = \frac{1}{n!}\underbrace{\overline{z^n}}_{(\overline{z})^n}$

$= \exp(\overline{z})$

(f) aus (e) und (c) ∎

$\boxed{\text{4.28 Satz}}$ (Reelle Exp. Fkt.)

(a) $\exp: \mathbb{R} \to]0,\infty[$ strikt isoton, bijektiv, stetig

(b) $\exp(\mathbb{R}_>) =]1,\infty[$, d.h. $x>0 \Rightarrow \exp(x) > 1$

(c) $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

Beweis: (a) $\exp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ klar wegen Def. (nur reelle Koeff.).

Sei $x\in\mathbb{R} \Rightarrow \exp(x) \overset{4.27(c)}{=} \big(\underbrace{\exp(\tfrac{x}{2})}_{\in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ (4.27(d))}\big)^2 > 0$

- stetig nach Satz 4.23
- strikt isoton: $x_2 > x_1 \Rightarrow \exp(x_2) = \exp(x_1)\exp(\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}) \overset{(b)}{>} \exp(x_1)$
- injektiv (da strikt isoton)
- surjektiv: (c) & Stetigkeit (& Zwischenwertsatz)

(b) Sei $x > 0 \Rightarrow \exp(x) = 1 + x + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{>0} > 1 + x > 1$

(c) $\lim_{x\to\infty} \underbrace{\exp(x)}_{\geq 1+x} \overset{(b)}{=} \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\exp(-x)}_{1/\exp(x)} = 0$ ∎

4.29 Korollar $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z) = \exp(\operatorname{Re} z)\exp(i \operatorname{Im} z)$$
$$|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$$

4.30 Satz $\forall q \in \mathbb{Q}$: $\exp(q) = e^q$

(Erinnerung: $q = \frac{m \in \mathbb{Z}}{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow e^q = \sqrt[n]{e^m}$)

Beweis: $[\exp(q)]^n = \exp(\underbrace{nq}_{=m=1\cdot m}) = [\underbrace{\exp(1)}_{e}]^m = e^m > 0$

$\Rightarrow \exp(q) = \sqrt[n]{[\exp(q)]^n} = \sqrt[n]{e^m} = e^q$ ∎

4.31 Definition $\forall z \in \mathbb{C}$: $e^z := \exp(z)$ $(\in \mathbb{C})$

- Im Einklang mit Bisherigem für $z \in \mathbb{Q}$ wegen Satz 4.30
- alle Resultate für $\exp(\cdot)$ übertragen sich auf $e^{\cdot}$