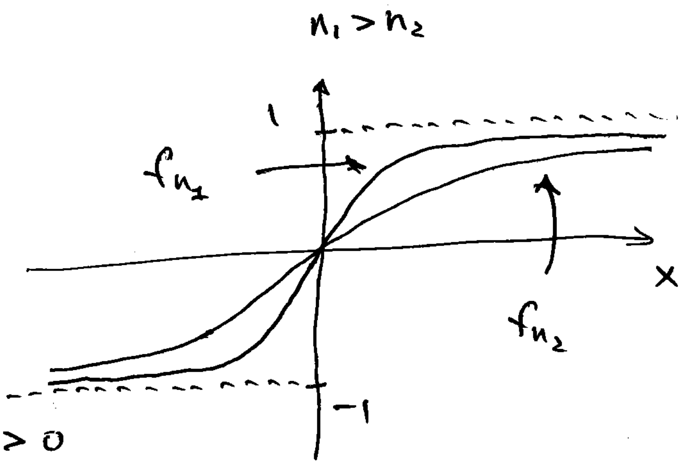
## 3.5. Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Fragestellung wird illustriert durch

### 3.30 Beispiel

$\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{\frac{1}{n} + |x|} \end{array}$




klar (!): $f_n$ stetig $\forall n$

$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{existiert}$$

Definiere Fkt.

$$f := \operatorname{sgn} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \end{array} \quad \text{unstetig!}$$

Frage: Ist Stetigkeitsverlust vermeidbar?

Ja - wenn man „schärfere" Kgz. hat!

**3.31 Definition** Sei $D \subseteq \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{K}'$

(i) Fkt'enfolge $(f_n)_n$ kgt. punktweise gegen $f : D \to \mathbb{K}'$

$$:\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in D \text{ und } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N} : \\ \qquad \forall n \geq N \text{ gilt: } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left( \forall x \in D : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \right)$$

(ii) Fkt'enfolge $(f_n)_n$ kgt. gleichmässig gegen $f: D \to \mathbb{K}'$

$$:\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \text{ gilt} \\ \qquad \underline{\forall x \in D}: \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$ gilt:

$$\|f_n - f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| := \sup \{ |f_n(x) - f(x)| : x \in D \} < \varepsilon$$

- Unterschied zu (i): das zu geg. $\varepsilon > 0$ gesuchte $N$ ist <u>unabhängig</u> von $x$! („gleichmässig")
- gleichmässige (glm.) kgt. $\Rightarrow$ pkt. weise kgt.

3.32 Beispiel: $(f_n)_n$ aus Bsp. 3.30 kgt. punktweise, aber <u>nicht</u> gleichmässig gegen sgn. [Nachprüfen! Folgt aber auch aus:]

**3.33 Satz** (Gleichmässige Limiten stetiger Fkt'en sind stetig!)

Sei $D \subseteq \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{K}'$ stetig und $(f_n)_n$ <u>glm.</u> kgt. gegen $f: D \to \mathbb{K}'$. Dann ist auch $f$ stetig.

Beweis: „$\frac{\varepsilon}{3}$-Argument": Sei $x \in D$ bel. <u>fest</u>, sei $\varepsilon > 0$.

$\forall y \in D\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \quad (*)$$

$$\text{glm. Kgz. } f_n \to f \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall \xi \in D: \ |f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\Rightarrow$ für dieses $N$ gilt:

$$\forall y \in D: \ |f(x) - f(y)| < \frac{2}{3}\varepsilon + |f_N(x) - f_N(y)| \quad (**)$$

<u>NB</u>: $(**)$ <u>wäre</u> im allg. falsch, wenn $N$ von $\xi$ abhinge!

$f_N$ stetig in $x \Rightarrow \exists\, \delta = \delta_{x,N,\varepsilon} > 0$ so dass $\forall y \in D$
mit $|x-y| < \delta$ gilt: $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\overset{(**)}{\Longrightarrow}$ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, also $f$ stetig in $x$ ■

---

# 4. Potenzreihen und elementare Funktionen

Zur Vorbereitung eine Vertiefung unseres Verständnisses über:

## 4.1 Reihen (2. Teil)

Erinnerung: Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ kgt. $:\Leftrightarrow (s_n)_n$ kgt. $\Leftrightarrow (s_n)_n$ Cauchy.

**4.1. Satz** $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ kgt. in $\mathbb{K} \Longrightarrow (a_k)_k$ ist Nullfolge

Beweis: n. V. is $(s_n)_n$ Cauchy, d.h.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n,m \geq N: \quad |s_n - s_m| < \varepsilon \quad (*)$

- für $n = m+1$ gilt $s_{m+1} - s_m = a_{m+1}$

$(*) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m \geq N: \quad |a_{m+1}| < \varepsilon \Rightarrow$ Beh. ■

## 4.2 Bemerkung

Es gilt nicht „$\Leftarrow$" in Satz 4.1

Bsp.: harmonische Reihe $a_k = \frac{1}{k}$

(vgl. Aufg. 2, Blatt 5)