3.3. Stetigkeit

3.7 Definition Sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathcal{D}$

(i) f <u>folgenstetig in a</u> $:\Leftrightarrow \left\{ \forall (x_n)_n \subseteq \mathcal{D}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a) \right.$

(ii) f <u>stetig in a</u> $:\Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}\right.$ mit $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Moral: „Wenn x nur nahe genug bei a, dann ist auch $f(x)$ nahe bei $f(a)$."

3.8 Satz Sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathcal{D}$. Dann gilt:

f stetig in a $\Leftrightarrow$ f folgenstetig in a

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei $(x_n)_n \subseteq \mathcal{D}$ mit $x_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$

n.V. $\exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}$ mit $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Da $x_n \to a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x_n - a| < \delta$

und somit $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$

d.h. $f(x_n) \to f(a)$ ✓

„$\Leftarrow$" per Widerspruch.

Ann. f nicht stetig in a

$\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathcal{D}$ mit $|x-a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

$(\delta = \frac{1}{n})$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in D$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)_n \subseteq D$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und $(f(x_n))_n$ kgt. nicht gegen $f(a)$

$\lightning$ f folgenstetig in a $\blacksquare$

3.9 Bemerkung

Wegen Satz 3.8 fortan keine Unterscheidung zwischen folgenstetig und stetig (wir nennen beides nun stetig). Grund für Unterscheidung in Def. 3.7:

Falls $\mathbb{K}'$ allgemeiner als $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (z.B. topologischer Raum ohne 1. Abzählbarkeitsaxiom, siehe nächstes Semester), so gilt nur „Stetig $\Rightarrow$ folgenstetig", aber nicht die Umkehrung.

3.10 Satz Sei $f: D \to \mathbb{K}'$ und $a \in D$. Dann gilt

$$f \text{ stetig in } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

(bedeutet: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert und $= f(a)$).

Beweis: <u>1. Fall</u>: a isolierter Punkt von $\mathcal{D}$

- rechte Seite gilt stets wegen Def. 3.5
- linke Seite gilt auch stets, da (siehe Übung)

$x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: x_n = a$

$\Rightarrow f(x_n) = f(a)\ \forall n \geq N \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$

<u>2. Fall</u>: a Häufungspkt von $\mathcal{D}$

„$\Rightarrow$" klar, da nach Def 3.7 (i) links <u>mehr</u> Folgen erlaubt als rechts.

„$\Leftarrow$" <u>Ann.</u> f <u>nicht</u> stetig $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \mathcal{D}$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $\underbrace{|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon}_{\Rightarrow x_n \neq a}$

also: $\exists (x_n)_n \subseteq \mathcal{D}\setminus\{a\}$ mit $x_n \to a$ und $(f(x_n))_n$ kgt. <u>nicht</u> gegen $f(a)$

$\lightning$ zu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ $\blacksquare$

Der Beweis hat gezeigt:

3.11 Korollar Sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathcal{D}$ ein <u>isolierter</u> Pkt. Dann ist f stetig in a.

3.12 Definition

Sei $f: D \to \mathbb{K}'$ und $A \subseteq D$

- f <u>stetig auf A</u> $:\Leftrightarrow \forall a \in A: f$ stetig in a
- f <u>stetig</u> $:\Leftrightarrow f$ stetig auf D

3.13 Beispiele

(i) konst. Fkt. ist stetig

(ii) $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}: \begin{array}{l} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto x \end{array}$ stetig

(iii) Jede Fkt. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{K}'$ ist stetig

3.14 Satz („Summen, Produkte, Quotienten stetiger Fkt.'en sind stetig!")

Seien $f, g: D \to \mathbb{K}'$, stetig in $a \in D$. Dann gilt:

(i) $f+g$ stetig in a

(ii) fg stetig in a

(iii) falls $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}: \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{K}'$ stetig in a

<u>Beweis</u>: Folgt aus Satz 3.6 und 3.10 ☒

3.15 Korollar Jede <u>rationale</u> Fkt. ist stetig

<u>Beweis</u>: Beispiele 3.13 und Satz 3.14 ☒

3.16 Satz Verkettung stetiger Fkt.'en ist stetig

Seien $f: D_f \to \mathbb{K}'$, $g: D_g \to \mathbb{K}''$ ($\mathbb{K}'' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)
mit $f(D_f) \subseteq D_g \subseteq \mathbb{K}'$ sowie

- f stetig in $a \in D_f$
- g stetig in $f(a)$ ($\in D_g$)

Dann ist $g \circ f : D_f \to \mathbb{K}''$ stetig in a.

Beweis: Sei $(x_n)_n \subseteq D_f$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

$\overset{f \text{ stetig in } a}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{f(x_n)}_{=:y_n} \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{f(a)}_{=:y}$

Da $(y_n)_n \subseteq D_g$ mit $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ ($\in D_g$) und g stetig in y

$\Rightarrow$ $g(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} g(y)$,

also $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(g\circ f)(x_n)}_{g(\underbrace{f(x_n)}_{y_n})} = g(y) = g(f(a)) = (g\circ f)(a)$

Da Folge $(x_n)_n$ bel. mit $x_n \to a$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x) = (g\circ f)(a)$

exist. insbesonders ! ∎

3.17 Beispiele

Sei f stetig, dann ist $|f|$ stetig,
aus Satz 3.16, da $|f| = |\cdot| \circ f$ und
(siehe Übung) $|\cdot|$ ist stetig.