3.2. Limes einer Funktion

3.3. Definition Sei $f : D \to \mathbb{K}'$, sei a Häufungspkt. von D.

- $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert $:\Leftrightarrow \begin{cases} \exists y \in \mathbb{K}' : \forall (x_n)_n \subseteq D \setminus \{a\} \text{ mit} \\ x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \text{ gilt}: \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y \end{cases}$

NB
- $\exists (x_n)_n \subseteq D \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$, da a Häuf.pkt.
- y ist unabh. von der gew. Folge!

Notation: $\lim_{x \to a} f(x) = y$

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und falls a Häufungspkt. von $D \cap]-\infty, a]$, sei

$\lim_{x \nearrow a} f(x)$ existiert $:\Leftrightarrow \begin{cases} \exists y \in \mathbb{K}' : \forall (x_n)_n \subseteq D \cap]-\infty, a[\\ \text{mit } x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \quad \text{gilt}: \\ \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y \end{cases}$

(linkseitiger Limes)

analog: rechtsseitiger Limes: $\lim_{x \searrow a} f(x)$

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und D von oben unbeschränkt sei

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ existiert $:\Leftrightarrow \begin{cases} \exists y \in \mathbb{K}' \ \forall (x_n)_n \subseteq D \text{ mit} \\ x_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \text{ gilt}: \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y \end{cases}$

Notation: $\lim_{x \to \infty} f(x) = y$

analog: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y$

- Falls $K' = \mathbb{R}$ und es gilt in einem der obigen Fälle dass: $\lim\limits_{n\to a} f(x_n) = +\infty$ für alle dort zugelassenen Folgen $(x_n)_n$, dann definieren wir: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert nicht; jedoch:

(bestimmte) Divergenz von f nach $+\infty$ für $x \to a$

Notation: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

analog für $-\infty$, oder für $x \nearrow a$, $x \searrow a$, $x \to \pm\infty$.

- Falls $a \in D$ kein Häufungspkt. von D ($\Leftrightarrow$: a ist isolierter Pkt. von D), setze

$$\lim_{x\to a} f(x) := f(a)$$

3.4 Beispiel

$$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.

3.5 Definition (Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}}$)

- $\infty + r := r + \infty := \infty \quad \forall r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

  $-\infty + r := r - \infty := -\infty \quad \forall r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

- $$\overset{+}{(-)}\infty \cdot r := r \cdot (\overset{+}{(-)}\infty) := \begin{cases} \overset{+}{(-)}\infty, & r \in \mathbb{R}_{>} \cup \{\infty\} \\ \overset{-}{(+)}\infty, & r \in \mathbb{R}_{<} \cup \{-\infty\} \end{cases}$$

- $$\frac{r}{\overset{+}{(-)}\infty} := r \cdot \frac{1}{\overset{+}{(-)}\infty} := \frac{1}{\overset{+}{(-)}\infty} \cdot r := 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

! $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\overset{+}{(-)}\infty \cdot 0$, $0 \cdot (\overset{+}{(-)}\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$!

sind nicht definiert

$\boxed{\text{3.6. Satz}}$ Seien $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$, a Häufungspkt. von $\mathcal{D}$ und $\underbrace{\lim_{x \to a} f(x)}_{=: \varphi\ (\in \mathbb{K}')}$ existiert, $\underbrace{\lim_{x \to a} g(x)}_{=: \gamma\ (\in \mathbb{K}')}$ existiert. Dann gilt:

(i) $\lim_{x \to a} (f+g)(x)$ existiert (und $= \varphi + \gamma$)

(ii) $\lim_{x \to a} (fg)(x)$ existiert (und $= \varphi \gamma$)

(iii) falls $\gamma \neq 0 \Rightarrow a$ ist Häufungspkt. von $\tilde{\mathcal{D}} := \{ x \in \mathcal{D} : g(x) \neq 0 \}$ und

$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ existiert (und $= \frac{\varphi}{\gamma}$)

Zusatz: (Z1) falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: analog für $x \uparrow a$, $x \downarrow a$, $x \to \pm\infty$

(Z2) falls $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$:

- (i) [& (Z1)] bleibt gültig für $\varphi, \gamma \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, oder $\varphi, \gamma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
- (ii) [& (Z1)] " " " $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}$, $\gamma \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$
- (iii) [& (Z1)] " " " $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder $\varphi \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

Beweis: (i) Sei $x_n \xrightarrow{n \to \infty} a \Rightarrow (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} \varphi + \gamma$

Satz 2.36 (i)

(ii) analog zu (i) (verw. 2.36 (ii))

(iii) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \gamma \neq 0 \Rightarrow$ für $(x_n)_n \subseteq D\setminus\{a\}$, $x_n \to a$

gilt: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \underline{|g(x_n) - \gamma| < \frac{|\gamma|}{2}}$

$\Rightarrow g(x_n) \neq 0$

$\Rightarrow$ a ist Häufungspkt. von $\hat{D}$!

Sei nun $(x_n)_n \subseteq \hat{D}\setminus\{a\}$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\varphi}{\gamma}.$$

Satz 2.37

<u>Zusätze analog</u>, z.B. (Z2) für (i): Sei $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $x_n \neq a$

Sei $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \gamma \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\forall S \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$: $f(x_n) > S - U$

$\exists U \in \mathbb{R} : g(x_n) > U\ \forall n \in \mathbb{N}$

(hier geht ein, dass $\gamma \neq -\infty$!)

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$$\forall n \geq N : (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) > S$$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \infty$

Da $(x_n)_n \subseteq D\setminus\{a\}$ bel. (mit $x_n \to a$)

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} (f+g)(x) = \infty \qquad \blacksquare$$