2. Aufbau des Zahlensystems

Wir postulieren die natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ und leiten daraus $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. samt alle Rechenregeln ab.

2.1. Natürliche Zahlen

Menge $\mathbb{N}$, für die gelte

2.1 Axiomsystem von Peano

(P1) $\mathbb{N} \neq \emptyset$ (also $\exists$ mind. ein Element in $\mathbb{N}$. Bezeichnung: 1)

$\exists$ Funktion (Nachfolgerabb.) $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

(P2) $1 \notin \nu(\mathbb{N})$ „1 ist kein Nachfolger"

(P3) ν injektiv „Eindeutigkeit des Vorgängers"

(P4) $\forall M \subseteq \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(1 \in M \wedge \nu(M) \subseteq M\right) \Rightarrow \underline{M = \mathbb{N}}$$

(Bem. $\nu(M) \subseteq M \iff \forall n \in M : \nu(n) \in M$)

„Prinzip der Vollständigen Induktion"

Bezeichnungsweisen: $\nu(1) =: 2$, $\nu(2) =: 3$, ...

(Nach (P4) werden so alle $n \in \mathbb{N}$ mit einem Zahlensymbol erfasst).

2.2 Bemerkung: (P1) – (P4) sind

- vollständig (im Sinne von: alle bekannten Rechenregeln ableitbar)
- unabhängig (keines der Axiome aus den anderen ableitbar)
- widerspruchsfrei (Gentzen, 1936)

2.3 Definition $\forall\, k, n \in \mathbb{N}$ sei

"+": $n+1 := \nu(n)$ (1)
$n + \nu(k) := \nu(n+k)$ (2)

"$\cdot$": $n \cdot 1 := n$
$n \cdot \nu(k) = n \cdot k + n$

wird meist weggelassen!

2.4 Bemerkung

- rekursive Def. erklärt wegen (P4) $n+m$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$:

$$n+2 = n+\nu(1) \overset{\text{Def}}{=} \nu(n+1) \overset{\text{Def}}{=} \nu(\nu(n))$$
$$n+3 = n+\nu(2) = \nu(n+2) = \nu(\nu(\nu(n)))$$
$$\vdots$$

- analog für $n \cdot m$

2.5 Lemma Rechenregeln $\forall\, k, m, n \in \mathbb{N}$

	"+"	"$\cdot$"
kommutativ	$n+k = k+n$	$nk = kn$
assoziativ	$(k+m)+n = k+(m+n)$	$(km)n = k(mn)$
distributiv	$(k+m)n = kn + mn$	

[insbes.: $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N}, \cdot)$ sind abelsche Halbgruppen, vgl. Lin. Alg.]

Beweis: "+" ist assoz. $\rightsquigarrow$ Übung!

Hier: "+" ist komm. (dabei wird assoz. verwendet)

1. Schritt: Zeige $\forall n \in \mathbb{N}: n+1 = 1+n$

Bew. per vollst. Induktion: Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : n+1 = 1+n\}$

(i) $1 \in M$, klar! $(1+1 = 1+1)$ „Induk.anfang"

(ii) Sei $n \in M$; zur zeigen: $\underbrace{n+1}_{\nu(n)} \in M$: „Induk.schritt"

„Ind. annahme" (z.z.)

$$\nu(n)+1 \overset{2.3(1)}{=} \nu(\underbrace{\nu(n)}_{n+1}) \underset{n \in M}{=} \nu(1+n) \overset{2.3(2)}{=} 1+\nu(n)$$

d.h., $n+1 \in M$

$(i) \wedge (ii) \overset{(P4)}{\Longrightarrow} M = \mathbb{N}$.

2. Schritt: Zeige, $\forall k, n \in \mathbb{N}: n+k = k+n$

Sei $n \in \mathbb{N}$ fix, Beweis per Ind. nach k:

Sei $K := \{k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n+k = k+n\}$

(i) $1 \in K$ wegen 1. Schritt

(ii) Sei $k \in K$; z.z.: $\nu(k) = k+1 \in K$:

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n+\nu(k) \overset{2.3(2)}{=} \nu(\underbrace{n+k}_{\overset{\shortparallel}{k+n} \text{ da } k \in K}) \overset{2.3(2)}{=} k+\underbrace{\nu(n)}_{\overset{\shortparallel}{n+1} = 1+n \text{ (1. Schritt)}}$$

$$= k+(1+n) \underset{\text{"+" assoziativ}}{=} (k+1)+n \overset{2.3(1)}{=} \nu(k)+n,$$

also $\nu(k) \in K$

$(i) \wedge (ii) \overset{(P4)}{\Longrightarrow} K = \mathbb{N}$. Für "·" alles analog ∎

Die Rechenregeln dürfen (sollen) ab jetzt "hemmungslos" verwendet werden!

2.6 Definition $\forall m, n \in \mathbb{N}$ definieren

- $n < m :\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N} : m = n + k)$
- $n \leq m :\Leftrightarrow (n < m \lor n = m)$

$\leq, <$ sind Relationen auf $\mathbb{N}$

Inverse Relationen: $n > m :\Leftrightarrow m < n$

$n \geq m :\Leftrightarrow m \leq n$

2.7 Satz $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ist <u>genau</u> 1 der 3 Aussagen

$$m < n, \quad m = n, \quad n < m$$

wahr.

Beweis beruht auf 3 Lemmata

2.8 Lemma Jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ hat einen Vorgänger

$(\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \exists m \in \mathbb{N}$ mit $\nu(m) = n)$

<u>Beweis</u>: per Ind. Sei $M := \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N}$ mit $\nu(m) = n\}$

- $1 \in M$ klar („Ind. anf.")
- Sei $n \in M$ („Ind. annahme").

  Dann ist $\nu(n) \in M$, da Nachfolger von n
- $\overset{(P4)}{\Longrightarrow} M = \mathbb{N}$ ☒

2.9 Lemma $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : 1 < n$

<u>Beweis</u> Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \overset{\text{Lem. 2.8}}{\Longrightarrow}$

$$\exists k \in \mathbb{N} : n = \nu(k) = k + 1$$

$$= 1 + k \quad (\text{bei Lem. 2.5})$$

$$\Rightarrow 1 < n \quad (\text{bei Def. 2.6}).$$

☒

2.10 Lemma $\forall k, n \in \mathbb{N}: \; n+k \neq n$

Beweis. Ind. nach n:

(i) $1+k = \nu(k) \neq 1 \;\; \forall k$, da $1 \notin \nu(\mathbb{N})$ (P2)

(ii) gelte $n+k \neq n \;\; \forall k \in \mathbb{N}$; („Ind. annahme")

zeige: $\nu(n)+k \neq \nu(n) \;\; \forall k \in \mathbb{N}$ $(*)$ per Widerspruch:

Annahme: $\exists k \in \mathbb{N}: \nu(n)+k = \nu(n)$ $(\neg(*))$

$$\Rightarrow \quad \nu(n) \overset{2.5}{=} k + \nu(n) \overset{2.3(2)}{=} \nu(k+n)$$

$$\overset{(P3)}{\Longrightarrow} \quad n = k+n \overset{2.5}{=} n+k$$ ↯ (Widerspruch) zu Ind.annahme

– also ist $\neg(*)$ falsch, so $(*)$ wahr.

(i) $\wedge$ (ii) $\overset{(P4)}{\Longrightarrow}$ Behauptung („Beh.") ∎

Beweis von Satz 2.7:

Sei $n \in \mathbb{N}$ fix, setze $\mathbb{N}_- := \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$, $\mathbb{N}_+ := \{m \in \mathbb{N} : n < m\}$

und $M := \mathbb{N}_- \cup \{n\} \cup \mathbb{N}_+$

1. Schritt: zeige $M = \mathbb{N}$ ($\Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}$ ist $m < n \vee m = n \vee n < m$ wahr)

Ind.anf.: $1 \in M$, denn, falls $n = 1$ klar, und falls $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, gilt $1 \in \mathbb{N}_-$ wegen Lemma 2.9.

Ind.schritt: sei $m \in M$; z.z.: $\nu(m) \in M$

1. Fall: $m = n$ $\Rightarrow \nu(m) = n+1 \in \mathbb{N}_+ \subseteq M$

Def. von $<$

2. Fall: $m \in \mathbb{N}_+$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m = n+k$ (Def. $<$)

$\Rightarrow \nu(m) = \nu(n+k) \overset{2.3(2)}{=} n+\nu(k) \overset{\text{Def. von} <}{\Rightarrow} n < \nu(m)$

$\Rightarrow \nu(m) \in \mathbb{N}_+ \subseteq M.$

3. Fall: $m \in \mathbb{N}_-$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = m+k$

falls $k=1 \Rightarrow n = \nu(m) \in M$ ✓

falls $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\} \overset{2.8}{\Rightarrow} k = \tilde{k}+1$ für $\tilde{k} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n = m + \tilde{k}+1 \overset{2.5}{=} \underbrace{m+1}_{\nu(m)} + \tilde{k}$

$\overset{\text{Def. von} <}{\Rightarrow} \nu(m) < n \Rightarrow \nu(m) \in \mathbb{N}_- \subseteq M$

$\Rightarrow$ 1. Schritt bewiesen.

2. Schritt: $M = \mathbb{N}_- \,\dot{\cup}\, \{n\} \,\dot{\cup}\, \mathbb{N}_+$ (paarw. disjunkte Mengen)

1. Teil: z.z. $n \notin \mathbb{N}_-$

Sei $m \in \mathbb{N}_- \Rightarrow m < n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = m+k$

$\Rightarrow m \neq n$ wegen Lemma 2.10.

2. Teil: z.z. $n \notin \mathbb{N}_+$: analog zu 1. Teil

3. Teil: $\mathbb{N}_+ \cap \mathbb{N}_- = \emptyset$:

Sei $m_- \in \mathbb{N}_- \Rightarrow n = m_- + k_-$ für ein $k_- \in \mathbb{N}$

$m_+ \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow m_+ = n + k_+$ — " — $k_+ \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m_+ = (m_- + k_-) + k_+$

$= m_- + \underbrace{(k_- + k_+)}_{\in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow m_+ \neq m_-$ nach Lema 2.10

$\boxtimes$

$\boxed{\text{2.11 Lemma}}$ „Kürzen": $\forall k, n, m \in \mathbb{N}$ gilt

- $n = m \iff (n+k = m+k) \iff (nk = mk)$
- $n < m \iff (n+k < m+k) \iff nk < mk$

Beweis: Übung mit vollst. Ind. nach k $\boxtimes$

2.2. Ganze Zahlen

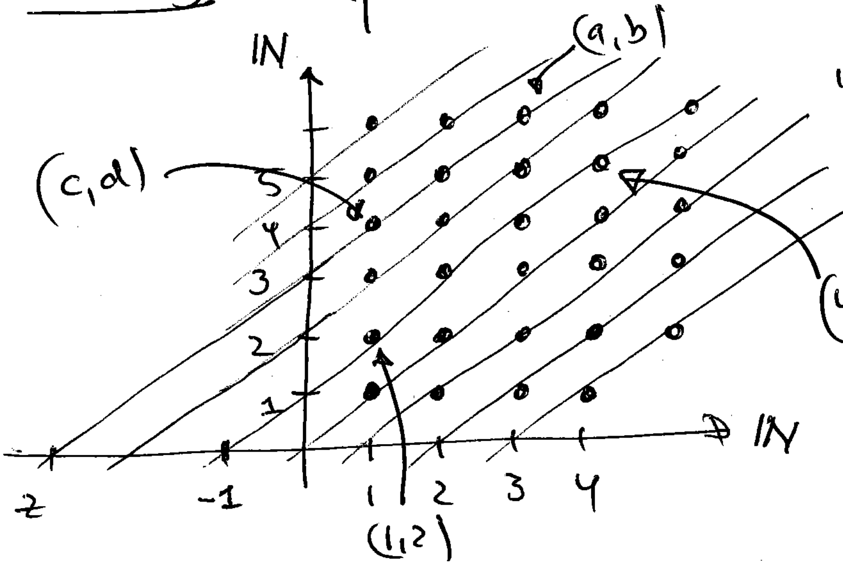
<u>Ziel</u>: Konstruktion der ganzen Zahlen aus $\mathbb{N}$

<u>Durchführung</u>: nur Ideen, Resultate; keine Beweise ($\to$ Üb.!)

<u>grundlegende Idee</u>: jede ganze Zahl ist Differenz zweier natürlicher Zahlen: „$\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\Uparrow}{z}} = \underset{\mathbb{N}}{\underset{\Uparrow}{a}} - \underset{\mathbb{N}}{\underset{\Uparrow}{b}}$"

<u>Probleme</u>:
- „$-$" (noch) nicht def.
- nicht eindeutige Darst.: „$-1 = 1-2 = 4-5$"

<u>Lösung</u>: Äquiv.klassen in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$



„$z = a-b$", „$z = c-d$"

$\to$ $a+d = b+c$

2.12. Def. & Satz (i) Für $(a,b), (c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ def.

$$(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow a+d = b+c$$

eine Äquiv.relation auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit Äquiv.klassen

$$[(a,b)] := \{(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : a+d = b+c\}$$

<u>Menge der ganzen Zahlen</u>:

$$\mathbb{Z} := \{[(a,b)] : a,b \in \mathbb{N}\}$$

(ii) Für $[(a_1,b_1)], [(a_2,b_2)] \in \mathbb{Z}$ sind die Rechenoperationen

Addition: $[(a_1,b_1)] \oplus [(a_2,b_2)] := [(a_1+a_2, b_1+b_2)] \in \mathbb{Z}$

Multiplikation: $[(a_1,b_1)] \odot [(a_2,b_2)] := [(a_1a_2+b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)] \in \mathbb{Z}$

wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten

(iii) $\oplus$ und $\odot$ sind kommutativ, assoziativ und distributiv (vgl. Lemma 2.5)

(iv) Zudem gilt:

$[(a,a)] \in \mathbb{Z}$ $(a \in \mathbb{N})$ ist neutrales Element von $\oplus$

d.h. $[(a_1,b_1)] \oplus [(a,a)] = [(a_1,b_1)] \quad \forall [(a_1,b_1)] \in \mathbb{Z}$

$\forall [(a,b)] \in \mathbb{Z}$ gilt: $[(b,a)]$ ist inverses Element bzg $\oplus$

d.h. $[(a,b)] \oplus [(b,a)] = [(1,1)]$.

Dies legt nahe:

$\boxed{\text{2.13 Definition}}$ Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$n := [(1+n,1)] \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_+ := \{ n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$0 := [(1,1)] \in \mathbb{Z}$$

$$-n := [(1,1+n)] \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_- := \{ -n : n \in \mathbb{N} \}$$

$\boxed{\text{2.14 Satz}}$ (i) Die Abb. $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+$, $n \mapsto n$ ist eine Bijektion

und $\forall [(a,b)] \in \mathbb{Z}$ gilt genau 1 der 3 Aussagen

$$[(a,b)] \begin{cases} \in \mathbb{Z}_+ \\ = 0 \\ \in \mathbb{Z}_- \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Rechtfertigung der Notation

$$z := [(a,b)], \quad -z := [(b,a)]$$

(ii) Verträglichkeit von ○ mit + und · :

$\forall n, m \in \mathbb{N}$:
- $(n+m) = (n) \oplus (m)$
- $(n \cdot m) = (n) \odot (m)$

(iii) Setzt man $(z_1) \ominus (z_2) := (z_1) \oplus (-z_2)$ für $(z_1), (z_2) \in \mathbb{Z}$ so gelten alle aus der Schule bekannten Rechenregeln für $\oplus, \ominus, \odot$ auf $\mathbb{Z}$.

(iv) Via $(z_1) (\leq) (z_2) :\Leftrightarrow \exists (n) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{(0)\} : (z_2) = (z_1) + (n)$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$ erklärt und $(\mathbb{Z}, (\leq))$ ist total geordnet.

Verträglichkeit: $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ist $(n) (\leq) (m) \Leftrightarrow n \leq m$

2.15 Bemerkung
- Von nun an werden alle ○ weggelassen!
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist abelsche Halbgruppe.
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist abelsche Gruppe.

(vergl. Lin. Alg.!)

2.3 Rationale Zahlen

Nur die Strategie wird vorgestellt – wie in Kap. 2.2!

<u>Idee:</u> jede rat. Zahl ist Bruch „$\frac{a}{b}$" mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.

<u>Probleme:</u> • Division noch nicht def.
• nicht eindeutige Darstellung „$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$" $\Leftrightarrow 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$

2.16 Satz (i) Für $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, def.

$$(a,b) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} (c,d) :\Leftrightarrow ad = bc$$

eine Äquiv. rel. auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ mit Äquiv.klassen

$$[(a,b)] := \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (c,d) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} (a,b)\}$$

Menge der <u>rationalen Zahlen</u> $\mathbb{Q} := \{[(a,b)] : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$

(ii) Addition $[(a_1, b_1)] \boxed{+} [(a_2, b_2)] := [(a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2)]$ und

Multiplikation $[(a_1, b_1)] \boxed{\cdot} [(a_2, b_2)] := [(a_1 a_2, b_1 b_2)]$

sind wohldefiniert.

(iii) $\boxed{+}$ und $\boxed{\cdot}$ sind kommutativ, assoziativ und distributiv

(iv) $[(0,1)] \in \mathbb{Q}$ ist neutrales Element von $\boxed{+}$,

$[(-a,b)] \in \mathbb{Q}$ ist inverses Element von

$[(a,b)] \in \mathbb{Q}$ bzgl. $\boxed{+}$

(v) $[(1,1)]$ ist neutrales Element von $\mathbb{Q}$ bzgl. $\boxed{\cdot}$
und $\forall\, [(a,b)] \in \mathbb{Q} \setminus \{[(0,1)]\}$ ist $[(b,a)] \in \mathbb{Q} \setminus \{[(0,1)]\}$
inverses Element bzgl. $\boxed{\cdot}$.

Zusammenfassung (i) - (v): $\mathbb{Q}$ ist Körper (vgl. Lin. Alg.)

(vi) $(\mathbb{Q}, \boxed{\leq})$ ist angeordneter Körper, wobei

$$[(a_1,b_1)] \boxed{\leq} [(a_2,b_2)] :\iff \exists\, m \in \mathbb{N}_0 \ (:= \mathbb{N} \cup \{0\}),\ n \in \mathbb{N}:$$
$$[(a_2,b_2)] = [(a_1,b_1)] \boxed{+} [(m,n)]$$

Die Ordnung ist verträglich mit der auf $\mathbb{Z}$

(Def. von $\boxed{<}$, $\boxed{>}$, $\boxed{\geq}$ wie in Def. 2.6)

2.17 Definition • Für $[(a_1,b_1)], [(a_2,b_2)] \in \mathbb{Q}$:

$$[(a_1,b_1)] \boxed{-} [(a_2,b_2)] := [(a_1,b_1)] \boxed{+} [(-a_2,b_2)] \in \mathbb{Q}$$

• Für $[(a_1,b_1)] \in \mathbb{Q}$, $[(a_2,b_2)] \in \mathbb{Q} \setminus \{[(0,1)]\}$:

$$\frac{[(a_1,b_1)]}{[(a_2,b_2)]} := [(a_1,b_1)] \boxed{\cdot} [(b_2,a_2)] \in \mathbb{Q}$$

• für $z \in \mathbb{Z}$ sei $z := [(z,1)] \in \mathbb{Q}$

2.18 Satz Unter Weglassung aller „$\square$" (ab sofort!) gilt

$$\frac{a}{b} = [(a,b)] \quad \forall a \in \mathbb{Z},\ \forall b \in \mathbb{Z}^*,$$ sowie

alle bekannten Rechenregeln für

$$+,\ -,\ \cdot,\ /,\ \leq,\ <,\ >,\ \geq \ !$$

2.19 Lemma

(i) Die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ ist Archimedisch, d.h.

$$\forall q, r \in \mathbb{Q},\ q, r > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } q < nr$$

(ii) Dichte: $\forall q, r \in \mathbb{Q}$ mit $q < r$ $\exists s \in \mathbb{Q} : q < s < r$

Beweis:

(i) Schreibe $q = \frac{a}{g}$, $r = \frac{b}{g}$ mit $a, b, g \in \mathbb{N}$ (gem. Nenner)

$\Rightarrow$ Beh. ($\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : a < nb$)
wahr: wähle $n = a + 1$

(ii) Klar. wähle $s := \frac{q+r}{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ • $s = q + \underbrace{\frac{r-q}{2}}_{>0} \Rightarrow s > q$

• $r = s + \underbrace{\frac{r-q}{2}}_{>0} \Rightarrow r > s$ $\blacksquare$

2.20 Definition • Sei $q \in \mathbb{Q}$

(Absolut-) Betrag $|q| := \begin{cases} q, & q \geq 0 \\ -q, & q < 0 \end{cases}$

• Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$.

$$\min(q_1, q_2) := \begin{cases} q_1, & q_1 \leq q_2 \\ q_2, & q_2 \leq q_1 \end{cases} \qquad \max(q_1, q_2) = \begin{cases} q_1, & q_1 \geq q_2 \\ q_2, & q_2 \geq q_1 \end{cases}$$

Somit $|q| = \max(q, -q) \geq 0$.

2.21 Satz Für $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ gilt

(B1) $\forall q \in \mathbb{K}$ ist $|q| \geq 0$ und
$|q| = 0 \iff q = 0$

(B2) $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{K}: \quad |q_1 q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$

(B3) $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{K}: \quad |q_1 + q_2| \leq |q_1| + |q_2|$
(Dreiecks-Ungl.)

$\mathbb{Q}$ ist bewerteter Körper

Beweis: • (B1) aus Def. von $|q|$ klar!

• (B2) Sei $q_j = s_j r_j \ (j = 1,2)$ mit $r_j \geq 0$ und $s_j \in \{+1, -1\}$

$$\Rightarrow \quad |q_1 q_2| = |s_1 s_2 r_1 r_2| = \underbrace{\underbrace{|s_1 s_2|}_{\in \{\pm 1\}}}_{1} \underbrace{r_1}_{|s_1 r_1|} \underbrace{r_2}_{|s_2 r_2|} = |q_1| \cdot |q_2| \quad \checkmark$$

• (B3) da $q_1 \leq |q_1| \ \wedge \ q_2 \leq |q_2|$

$$\Rightarrow \quad q_1 + q_2 \leq |q_1| + |q_2| \qquad (1)$$

andererseits: $-q_1 \leq |q_1| \ \wedge \ -q_2 \leq |q_2|$

$$\Rightarrow \quad -(q_1 + q_2) \leq |q_1| + |q_2| \qquad (2)$$

$$\overset{(1) \wedge (2)}{\Longrightarrow} \quad \max(q_1 + q_2, -(q_1 + q_2)) \leq |q_1| + |q_2|$$

☒

$\mathbb{Q}$ ist aber leider nicht groß genug:

$\boxed{\text{2.22 Satz}}$ $\nexists\, c \in \mathbb{Q}$ mit $c^2 = 2$

Beweis: Wir brauchen: Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade ($:\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k+1$)

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad n^2 = \underbrace{\underbrace{(n-1)}_{\text{gerade}} \cdot n}_{\text{gerade}} + \underbrace{n}_{\text{ungerade}} \quad \text{ist ungerade}$$

($n \in \mathbb{N}$ gerade $:\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$)

Annahme: $\exists\, c \in \mathbb{Q} : c^2 = 2$; ohne Einschränkung (o.E.) sei $c > 0$

($c = 0$ nicht möglich; falls $c < 0$ wäre, gilt auch für $\tilde{c} := -c > 0$ dass $\tilde{c}^2 = 2$)

$\Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{N}$, p und q teilerfremd: $c = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow 2 = c^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$ gerade

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ p gerade, also $p = 2\tilde{p}$ mit $\tilde{p} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow q^2 = 2\tilde{p}^2$ gerade $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ q gerade

$\Rightarrow p, q$ nicht teilerfremd $\lightning$ $\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

2.4 Endliche Summen

In diesem Abschnitt, sei $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{Q}$ ein Körper (z. B. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$; später auch! $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

2.23 Definition $\forall k \in \mathbb{N}$, sei $a_k \in \mathbb{K}$.

Dann heißt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ (endliche) <u>Summe</u>

analog: $\forall M \subseteq \mathbb{N}$, M <u>endlich</u>: $\sum_{k \in M} a_k$ Summe der a_k's mit $k \in M$

falls $M = \emptyset$: $\sum_{k \in M} a_k := 0 \quad (\in \mathbb{K})$

2.24 Beispiele

(i) $\sum_{k=1}^{3} k = 1+2+3 = \sum_{j=1}^{3} j = \sum_{j=0}^{2} (j+1) = \sum_{k=2}^{4} (k-1)$

<u>Name</u> des Summationsindex ist belanglos!

(ii) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Bew. Per Ind.

- $n = 1$: $1 = 1$ ✓
- $n \to n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k$

$= (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$ per Ind. <u>ann.</u>

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ✓

(iii) $\sum_{k=1,\, k \text{ ungerade}}^{2n} k = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

$= n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bew. Ind: $n = 1$: klar

$n \to n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = 2n+1 + \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

$= (2n+1) + n^2 = (n+1)^2$

per Ind. <u>ann.</u> $\Rightarrow$ Beh. per Ind.

(iv) geometrische Summe: $\forall q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Beweis: per Induktion oder aus

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} q^{k+1}}_{=\sum_{k=1}^{n+1} q^k \text{ (Index verschieben)}} = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \quad \blacksquare$$

2.25 Definition (i) $\forall j \in \mathbb{N}$, sei $a_j \in \mathbb{K}$. Dann heißt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{j=1}^{n} a_j := a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \quad \text{(endliche) Produkt}$$

Speziell für $a \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}_0$: $a^0 := 1$, $a^n := \prod_{j=1}^{n} a$, $n \in \mathbb{N}$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die Fakultät definiert als

$$0! := 1, \qquad n! := \prod_{j=1}^{n} j \quad (= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$$

(iii) Für $q \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{Z}$ sei der Binomialkoeffizient definiert als

$$\binom{q}{k} := \begin{cases} \prod_{j=1}^{k} \frac{q+1-j}{j}, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

und speziell für $q = n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{q}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

2.26 Binomischer Satz $\forall x, y \in \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Spezialfälle:

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Beweis per Induktion: $n=0$, $n=1$ klar, s.o.

$n \to n+1$: $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n x + (x+y)^n y$

- $(x+y)^n x \underset{\text{Ind. ann.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k}$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} \quad \text{(Index „verschieben"!)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} \quad \left(\binom{n}{-1} = 0 \right)$$

- $(x+y)^n y = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$ (Ind. ann.!)

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \quad \left(\binom{n}{k} = 0 \text{ für } 1 \le n < k,\ n, k \in \mathbb{N} \right)$$

$$\Rightarrow (x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right]}_{= \binom{n+1}{k} \text{ (Übung!)}} x^k y^{n+1-k}$$

$\boxed{2{,}27 \text{ Korollar}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad , \quad 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

$x = y = 1$ $\qquad$ $x = -1,\ y = 1$

2.5 Folgen, Grenzwert, Reihen

Im folgenden ist $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ (aber auch, später, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

2.28 Definition

Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\subseteq \mathbb{K})$:$\Longleftrightarrow$ Abbildung $\begin{array}{l}\mathbb{N} \to \mathbb{K} \\ n \mapsto a_n\end{array}$

(auch: $(a_1, a_2, a_3, \dots)$)

Analog mit „verschobener Indexmenge": $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(a_n)_{n\geq 10}$

– falls keine Verwechslung der Indexmenge: $(a_n)_n$

2.29 Beispiele

(i) konstante Folge: $(a, a, a, \dots)$ mit $a \in \mathbb{K}$

(ii) alternierende Folge $\left((-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

(iii) geometrische Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a \in \mathbb{K}$

(iv) Fibonacci-Folge (rekursiv def.): $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

wobei $a_0 := 0$, $a_1 := 1$, $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$

2.30 Definition

(i) $\left.\begin{array}{l}\text{Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} \\ \text{konvergent gegen } a \in \mathbb{K}\end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overbrace{\forall \varepsilon \in \mathbb{K}, \varepsilon > 0}^{\text{kurz: } \forall \varepsilon > 0}\ \exists N \in \mathbb{N}: \\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon\end{array}\right.$

Schreibweise: $\lim\limits_{(n\to\infty)} a_n = a$, $a_n \xrightarrow{(n\to\infty)} a$

Sprechweise: a ist limes oder Grenzwert von $(a_n)_n$

(NB: $N = N(\varepsilon)$ hängt von ε ab!)

(ii) $(a_n)_n$ ist Nullfolge $:\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(iii) $(a_n)_n$ divergent (in $\mathbb{K}$) $:\Leftrightarrow \nexists\, a \in \mathbb{K} : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

(auch: nicht konvergent)

(iv) Spezialfall von (iii):

$(a_n)_n$ divergent nach $\underset{(-)}{+}\infty$ $:\Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}$:

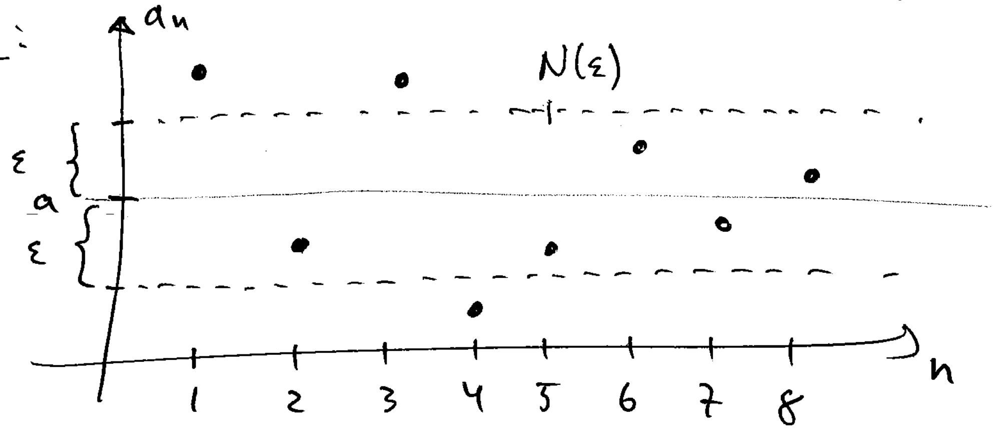
$\forall n \geq N$ gilt $a_n > s$

$(a_n < -s)$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \underset{(-)}{+}\infty$

(NB: $N = N(s)$ hängt von s ab!)

Skizze zu (i):



2.31 Beispiele In Bsp. 2.29 gilt:

(i) kgt. gegen a : $N = 1$ mögliche Wahl $\forall \varepsilon > 0$

(ii) divergent : $\varepsilon \leq 1$ erlaubt keine Wahl von N (was auch immer a)

Beweis: Ann. $\left((-1)^{n+1}\right)_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

$\Rightarrow$ für $\varepsilon = 1\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$: $|a_n - a| < \varepsilon = 1$

andererseits, $2 = |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)|$

$\overset{2.21 (B3)}{\leq} |a_{n+1} - a| + |a - a_n| \overset{(n,\, n+1 \geq N)}{<} 1 + 1 = 2$ $\lightning$ ☒

(iii), (iv) Übung!

Desweiteren:

(v) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge, da für $\varepsilon > 0$ (bel., fest)

$\Rightarrow$ (Lemma 2.19(i)) $\exists N \in \mathbb{N}: 1 < N\varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq N: \quad 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ ✓

2.32 Satz Eindeutigkeit des Limes

Sei $(a_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ Folge, seien $a, b \in \mathbb{K}$ und sei

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Dann ist $a = b$.

Beweis: Ann.: $a \neq b$. $\Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{2}|a-b| > 0$

n.V. $\exists N_a, N_b \in \mathbb{N}$ mit (1) $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_a$

(2) $|a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_b$

Sei $n \geq N := \max(N_a, N_b)$, dann

$$|a-b| = |(a-a_n)+(a_n-b)| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a-a_n| + |b-a_n| \underset{(1)+(2)}{<} 2\varepsilon = |a-b| \quad \text{⚡}$$

$\blacksquare$

2.33 Definition

$$\left.\begin{array}{l}\text{Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} \\ \text{beschränkt}\end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \exists s \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq s$$

analog: beschränkt von oben : $a_n \leq s$

" " unten : $a_n \geq -s$

2.34 Satz Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Folge. Dann gilt:

$$(a_n)_n \text{ kgt.} \implies (a_n)_n \text{ beschränkt.}$$

2.35 Bemerkung Umkehrung von Satz 2.34 i.a. falsch!

Bsp.: $\left((-1)^{n+1}\right)_n$ beschränkt $(s=1)$, aber divergent (Bsp. 2.31 (iii))

Beweis von Satz 2.34

Sei $\lim a_n = a \implies \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < 1$

$\implies |\underbrace{a_n}_{a_n - a + a}| < |a| + 1 \quad \forall n \geq N$

Setze $\quad s := \max(|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a|+1)$

$\implies \quad |a_n| \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \blacksquare$

Hilfreich beim Berechnen von Limiten:

2.36 Satz Summe u. Produkt krg.'er Folgen

Seien $(a_n)_n, (b_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ kgt'e Folgen mit Limiten a und b.
Dann gilt:

(i) $(a_n + b_n)_n$ ist kgt. und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n) + (\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$
$= a + b$

(ii) $(a_n b_n)_n$ ist kgt. und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = ab$

Beweis: (i) Übung. Hier nur (ii)

Satz 2.34 $\implies (a_n)_n$ beschränkt.

$\implies \exists s \in \mathbb{K} : |a_n| \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$(s \neq 0)$ und $|b| \leq s$

Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ bel.

$(a_n)_n, (b_n)_n$ kgt

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \tilde{\varepsilon}$ und $|b_n - b| < \tilde{\varepsilon}$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$

$$\leq \underbrace{|a_n|}_{\leq S} \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{< \tilde{\varepsilon}} + \underbrace{|b|}_{\leq S} \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{< \tilde{\varepsilon}} \quad \forall n \geq N$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Also: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n b_n - ab| < 2S\tilde{\varepsilon}$ (*)

Beweiskosmetik: Sei nun $\varepsilon > 0$ bel., wähle $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2S} > 0$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n b_n - ab| < \varepsilon$

(dies hätte man auch von Anfang an machen können!) ∎

2.37 Satz Quotient kgt.-'er Folgen

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ kgt.'e Folgen mit Limiten a und $b \neq 0$. Dann $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0$ gilt:

(i) $b_n \neq 0$

(ii) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq N_0}$ kgt. mit $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$

Beweis

(i) $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \neq 0 \quad \overset{\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0}{\Longrightarrow} \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$

$$\Rightarrow \forall n \geq N_0 : |b| = |b - b_n + b_n|$$

$$\leq |b - b_n| + |b_n| \quad (\Delta\text{-Ungl.})$$

$$< \frac{|b|}{2} + |b_n|$$

$$\Rightarrow |b_n| > \frac{|b|}{2} > 0 \quad \forall n \geq N_0 \quad (*)$$

$$\overset{2.21 (B1)}{\Longrightarrow} b_n \neq 0 \quad \forall n \geq N_0$$

(ii) es genügt zu zeigen:

$$\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\geq N_0} \text{ kgt. mit } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

(denn dann folgt die Beh. mit Satz 2.36 (ii))

Also: Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow \exists N \geq N_0$ (aus (i)) $: \forall n \geq N \quad |b_n - b| < \varepsilon$

$\forall n \geq N_0$
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| = \underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{< \frac{2}{|b|} \text{ wegen } (*)} \cdot \frac{1}{|b|} |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \varepsilon$$

(auch ohne Kosmetik!)

$\Longrightarrow$ Beh. ∎

2.38 Beispiele (i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n = \frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2} = \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} \qquad (!)$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Bsp. 2.31 (v)) $\Rightarrow$

(a) $\frac{13}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ wg. Satz 2.36 (ii) (& 2.31 (i))

(b) $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0$ "

$\Rightarrow \frac{2}{n^2} \to 0$ "

(c) $3 + \frac{13}{n} \to 3$ wg. (a) $\wedge$ Satz 2.36 (i)

(d) $1 - \frac{2}{n^2} \to 1$ wg. (b) $\wedge$ Satz 2.36 (i) (& 2.31 (i))

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 3$ wg. (c), (d), Satz 2.37.

(ii) $a_n := n$, $b_n := 1$, $c_n := a_n + b_n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ und $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$

$\Rightarrow$ "$\pm\infty$" ist nur formales Symbol def. durch 2.30 (iv), insbes. $\notin \mathbb{K}$ und es liegt keine Konvergenz vor!

Analogon von Satz 2.37 für $b=0$:

2.39 Satz Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Nullfolge und $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (bzw. $a_n < 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty \qquad (\text{bzw.} -\infty)$$

<u>Beweis</u>: Fall $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (Fall $a_n < 0$ analog):

Sei $s \in \mathbb{N}$ bel. $\overset{(a_n)_n \text{ Nullfolge}}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : 0 < a_n < \frac{1}{s}$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{a_n} > s \qquad \blacksquare$$

2.40 Satz <u>Verträglichkeit von lim und Ordnung</u>

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ <u>kgt.'e</u> Folgen mit $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $\displaystyle \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$

<u>Beweis</u>: Wir zeigen „nur": Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ <u>kgt.</u> mit $c_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n \geq 0$

(Beh. folgt dann mit Satz 2.36(i) und $c_n := b_n - a_n$)

<u>Ann.</u>: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = c < 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : |\underbrace{c_n}_{\geq 0} - \underbrace{c}_{<0}| < \frac{|c|}{2}$

$$\Rightarrow \quad c_n - c < \frac{-c}{2}$$

$$\Rightarrow \quad c_n < \frac{c}{2} < 0 \quad ↯ \qquad \blacksquare$$

2.41 Korollar Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ <u>kgt.'e</u> Folge und sei $A, B \in \mathbb{K}$, so dass $A \leq a_n \leq B \ \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $\displaystyle A \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq B$

2.42 Warnung Falls sogar $a_n < b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, so folgt doch nur $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ im allgemeinen.

Bsp.: $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Also $b_n > a_n \ \forall n$

und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2.43 Definition $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \in \mathbb{K}$

- Partialsumme: $S_N := \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$, $N \in \mathbb{N}$
- Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$: Folge $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$
- Summe der Reihe: falls $(S_N)_N$ kgt., setzte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n := \lim\limits_{N\to\infty} S_N$

Vorsicht!! Selbes Symbol für 2 versch. Dinge

Jargon: Reihe kgt.

(analog: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ für $k \in \mathbb{Z}$)

2.44 Bemerkung Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Folge,

so ist $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$a_N = a_1 + \sum_{n=2}^{N} (a_n - a_{n-1})$$

„Teleskopsumme"

(Bew.: Üb.!)

2.45 Beispiel Zeige Kgz. der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$ Partialbruchzerlegung

; sei $a_n := -\frac{1}{n+1}$

Somit $-\frac{1}{N+1} = -\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{N}\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)$ und

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad N\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} = \left(\lim_{N\to\infty} -\frac{1}{N+1}\right) + 1 \underset{\text{Bsp. 2.31 (v).}}{=} 1$$

$\boxed{\textbf{2.46 Satz}}$ Geometrische Reihe. Sei $q\in\mathbb{R}$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist $\begin{cases} \text{konvergent} \Leftrightarrow |q|<1 \\ \text{divergent} \Leftrightarrow |q|\geq 1 \end{cases}$

Für $|q|<1$ gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} q^n = \frac{1}{1-q}$

Beweis $S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n \quad (N\in\mathbb{N})$

1. Fall $q=1 \Rightarrow S_N = N+1 \xrightarrow{N\to\infty} +\infty$ (diverg. nach $+\infty$)

2. Fall $q=-1 \Rightarrow S_N = \begin{cases} 1, & N \text{ gerade} \\ 0, & N \text{ ungerade} \end{cases}$

$\Rightarrow$ divergent.

3. Fall $|q|>1$ oder $|q|<1$ $\Rightarrow S_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ (gültig $\forall q\neq 1$ 2.24 (iv))

Es gilt $q^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 0$ für $|q|<1$, und ist divergent für $|q|>1$ (2.29(iii) & Üb!). Von 2.36 & 2.37, $\frac{1-q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{1-q}$

für $|q|<1$ ∎

2.47 Definition Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Folge

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge (oder Fundamentalfolge) $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m\geq N$ $|a_n-a_m|<\varepsilon$

(„alle Glieder rücken schließlich zusammen")

notwendig für Konvergenz...

2.48 Satz Sei $(a_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ kgt.'e Folge

$\Rightarrow$ $(a_n)_n$ ist Cauchy-Folge

Beweis: Sei $\varepsilon>0$ bel. $\overset{\text{Kgz.}}{\Longrightarrow} \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall n,m\geq N: |a_n-a_m| \leq |a_n-a|+|a-a_m| < \varepsilon$ ∎

Die Umkehrung von Satz 2.48 gilt nur in den allerbesten Welten...

2.49 Definition Sei $\mathbb{K}$ ein bewerteter Körper

$\mathbb{K}$ vollständig $:\Longleftrightarrow$ Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert

2.50 Satz $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig!

Beweis: Heron-Verfahren (= babylonisches Wurzelziehen)

Sei $0 < c \in \mathbb{Q}$. Def. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ durch

$$a_1 := 1$$
$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

wohldef. da $\bullet\ a_n > 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$, $\bullet\ a_n \in \mathbb{Q} \ \forall n\in\mathbb{N}$. } Bew. per Induktion

1. Beh.: $a_n^2 \geq c \quad \forall n \geq 2$

da $$a_{n+1}^2 = \left[\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)\right]^2 \geq a_n \cdot \frac{c}{a_n} = c \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Üb.: $\left[\frac{1}{2}(q+r)\right]^2 \geq qr$

2. Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = c$ und $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$

Def. „Fehler": $f_n := a_n^2 - c \overset{\text{1. Beh.}}{\geq} 0 \quad \forall n \geq 2$

$$\Rightarrow f_{n+1} + c = a_{n+1}^2 = \left[\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2c + \frac{c^2}{a_n^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(f_n + c + 2c + \frac{c^2}{f_n + c}\right)$$

Aber $$\frac{c^2}{f_n + c} = \frac{c^2 + f_n c}{f_n + c} - \underbrace{\frac{f_n c}{f_n + c}}_{\geq 0} \leq c$$

damit

$$f_{n+1} + c \leq c + \frac{1}{4} f_n \quad \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq f_{n+1} \leq \frac{1}{4} f_n \quad \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad \bullet \quad \underbrace{0}_{\text{Nullfolge}} \leq f_n \leq \underbrace{\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-2}}_{\text{Nullfolge}} \underbrace{f_2}_{\text{unabh. von } n} \qquad \forall n \geq 2$$

$\Rightarrow$ $(f_n)_n$ Nullfolge nach Satz 2.40 $\Rightarrow$ Beh.

$$\bullet \quad f_n - f_{n+1} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq a_n^2 - a_{n+1}^2 = (a_n - a_{n+1})\underbrace{(a_n + a_{n+1})}_{>0}$$

$$\Rightarrow a_n - a_{n+1} \geq 0.$$

3. Beh. $(a_n)_n$ ist Cauchy.

Bew. 2. Beh. & Satz 2.48 $\Rightarrow$ $(a_n^2)_n$ ist Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N:$$

$$|a_n^2 - a_m^2| < \varepsilon$$

i.e. $$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{a_n + a_m} \quad (*)$$

Wähle $l \in \mathbb{N}$ so groß, dass $c \geq \frac{1}{l^2}$ $\overset{\text{1. Beh}}{\Longrightarrow}$ $a_n \geq \frac{1}{l}$ $\forall n \geq 2$

$$(*) \Rightarrow \quad |a_n - a_m| < \frac{l}{2} \varepsilon \quad (\forall n, m \geq N). \ \checkmark$$

4. Beh: $(a_n)_n$ divergent in $\mathbb{Q}$ für $c = 2$

Ann.: $\exists a \in \mathbb{Q}$: $a_n \xrightarrow{n \to \infty} a$

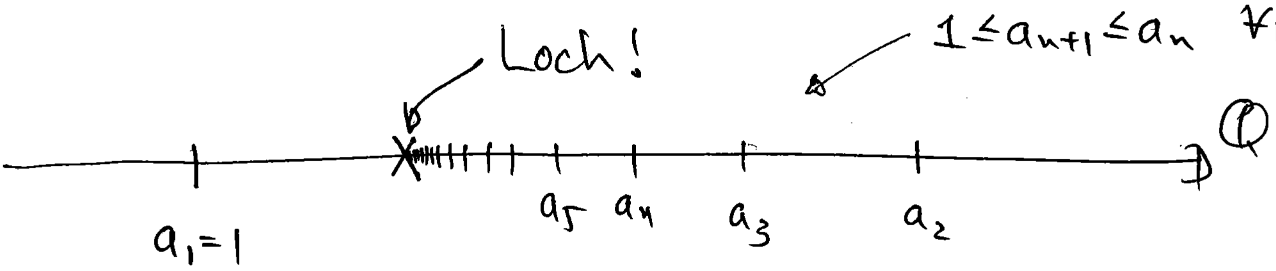
$$\overset{\text{Satz 2.36 (ii)}}{\Longrightarrow} \quad a^2 = \lim_{n \to \infty} a_n^2 = \underbrace{c}_{\uparrow \text{ 2. Beh. (\& 2.32)}} = 2$$

Somit $\lightning$ zu Satz 2.22

3. und 4. Beh $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ nicht vollständig.

Moral für $c = 2$:

aus 1. & 2. Beh.:
$1 \leq a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 2$



2.6 Reelle Zahlen

Ziel: Menge $\mathbb{Q}$ hat „Löcher". Vervollständige $\mathbb{Q}$ durch Hinzunahme der Löcher zu einer „kontinuierlichen Zahlengerade ohne Löcher".

Frage: Mit welchem math. Objekt kann man das Loch eindeutig beschreiben?

Antwort: Cauchy-Folge (denn Loch ist dort, wo sich die Folgenglieder verdichten)

Problem: $\exists$ versch. Cauchy-Folgen, die sich am selben Loch verdichten. Ausweg ...

2.51 Definition (i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ Cauchy-Folgen

Via
$$(a_n)_n \sim (b_n)_n :\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0 \in \mathbb{Q}$$
ist eine Äquivalenzrelation auf
$$CF(\mathbb{Q}) := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} : (a_n)_n \text{ ist Cauchy-Folge}\}$$
erklärt (checken!)

(ii) Menge der reellen Zahlen
$$\mathbb{R} := CF(\mathbb{Q})/_{\sim} \qquad (\text{Quotientmenge})$$

„$\mathbb{R}$ ist Vervollständigung von $\mathbb{Q}$"

2.52 Bemerkung (i) Vervollständigung ist sehr wichtiges Konzept in der modernen Analysis.

(ii) Da $\forall (a_n)_n \in CF(\mathbb{Q})$ und $\forall q \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = q \iff (a_n)_n \in [(q,q,q,\dots)]$$

(Beweis: Übung!), ist es üblich via

$$i: \begin{array}{l} \mathbb{Q} \longrightarrow i(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} \\ q \longmapsto [(q,q,q,\dots)] \end{array} \qquad (\text{Einbettungsabb.})$$

$\mathbb{Q}$ selbst als Teilmenge von $\mathbb{R}$ anzusehen, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, und q statt $[(q,q,q,\dots)]$ zu schreiben.

2.53 Definition

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit Repräsentanten $\underset{\in x}{(a_n)_n}, \underset{\in y}{(b_n)_n} \in CF(\mathbb{Q})$

(i) $$x + y := [(a_n + b_n)_n] \in \mathbb{R}$$

$$x \cdot y := [(a_n b_n)_n] \in \mathbb{R}$$

(ii) $$x \leq y :\iff \exists \text{ Nullfolge } (y_n)_n \subseteq \mathbb{Q} : a_n \leq b_n + \underbrace{y_n}_{\text{o.E.} \geq 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x < y :\iff (x \leq y \wedge x \neq y)$$

$$\iff \exists N \in \mathbb{N} \ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \ \forall n \geq N \quad a_n < q_1 < q_2 < b_n$$

Checken!

(analog $\geq, >$)

2.54 Lemma Obiges ist wohldef., d.h. unabh. von der Wahl der Repräsentanten, und

$$(a_n + b_n)_n, \ (a_n b_n)_n \in CF(\mathbb{Q}).$$

Beweis: (i) "+"

- Sei $c_n := a_n + b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ und, n. V. ($(a_n)_n \wedge (b_n)_n$ Cauchy): $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq N: \ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \quad |c_n - c_m| = |a_n - a_m + b_n - b_m| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|a_n - a_m|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b_m|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$< \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (c_n)_n \text{ Cauchy.}$$

- Seien $(\tilde{a}_n)_n \in x$, $(\hat{b}_n)_n \in y$ andere Repräsentanten

d.h. $(\tilde{a}_n - a_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ und $(\tilde{\hat{b}}_n - b_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Setze $\tilde{c}_n := \tilde{a}_n + \hat{b}_n \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (\underbrace{\tilde{c}_n - c_n}_{(\hat{a}_n - a_n) + (\hat{b}_n - b_n)}) \overset{\text{Satz 2.36 (i)}}{=}$

$$= \lim_{n \to \infty} (\hat{a}_n - a_n) + \lim_{n \to \infty} (\hat{b}_n - b_n) = 0 + 0 = 0 \quad ✓$$

"$\cdot$" ähnlich. (ii) siehe Übung! ■

$\boxed{\text{2.55 Satz}}$ (i) $\mathbb{R}$ ist ein Körper mit $1 = [(1,1,1,\dots)]$ und $0 = [(0,0,0,\dots)]$ (vgl. 2.52 (ii))

(ii) $(\mathbb{R}, \leq)$ ist total geordnet und $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt genau 1 der 3 Aussagen: $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$.

(iii) Die Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist archimedisch (vgl. Lemma 2.19 (i))

(iv) $\mathbb{R}$ ist bewerteter Körper mit Absolutbetrag $|\cdot|: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}\end{array}$

(d.h. es gilt (B1) - (B3) aus Satz 2.21)

Alle Operationen auf $\mathbb{R}$ sind verträglich mit denen auf $\mathbb{Q}$.

Beweis Strategie: führe auf entsprechende Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ zurück!

exemplarisch für (i) & (ii): "+" kommutativ:

$$\underbrace{x}_{[(a_n)_n]} + \underbrace{y}_{[(b_n)_n]} = [(\underbrace{a_n + b_n}_{b_n + a_n \text{ da } + \text{ in } \mathbb{Q} \text{ komm.}})_n] = [(b_n)_n] + [(a_n)_n] = y + x \checkmark$$

(iii) z.z. $\forall \varepsilon, R \in \mathbb{R}, \ \varepsilon, R > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}: R < \varepsilon n$

Sei $\varepsilon = [(\delta_n)_n]$, $R = [(q_k)_k]$

- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{Q}, \delta > 0 \ \exists K \in \mathbb{N} \ \forall k \geq K: \delta_k > \delta \ (\geq \frac{\delta}{2} > 0)$
- $(q_k)_k \in CF(\mathbb{Q}) \underset{\text{Übung!}}{\Rightarrow} (q_k)_k$ beschränkt, also $\exists q \in \mathbb{Q}: |q_k| < q \ \forall k$ (insbes. $q > 0$)

$\overset{\mathbb{Q} \text{ archim.}}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}: q < n\delta$

$\Rightarrow q_k < q < n\delta < n\delta_k \ \forall k \geq K \iff R < n\varepsilon \checkmark$

(iv) Hilfsbehauptung: $\forall (a_n)_n \in CF(\mathbb{Q})$ ist $(|a_n|)_n \in CF(\mathbb{Q})$ und

$$\underbrace{|\underbrace{[(a_n)_n]}_{x \in \mathbb{R}}|}_{\text{Betrag in } \mathbb{R}} = [(\underbrace{|a_n|}_{\text{Betrag in } \mathbb{Q}})_n] \qquad (*)$$

denn: • $||a_n| - |a_m|| \underset{\text{untere } \Delta\text{'s-Ungl. (Üb. 1, Blatt 4)}}{\leq} |a_n - a_m| \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

- 1. Fall: $x \geq 0$ zu zeigen: $(a_n)_n \sim (|a_n|)_n$

da $x \geq 0 \ \exists$ Nullfolge $(\eta_n)_n \subseteq \mathbb{Q}: \ 0 \leq a_n + \eta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 0 \leq |a_n| - a_n = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \\ -2a_n, & a_n < 0 \end{cases} \overset{\text{o.E.} > 0}{\leq} 2\eta_n$$

$\overset{\text{Satz 2.40}}{\Rightarrow} (|a_n| - a_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ ist Nullfolge. $\checkmark$

- 2. Fall: $x < 0$: analog

nun zu (B1) - (B3): (B1): • $|x| \geq 0$ klar per. Def.

• $|x| = 0 \iff x = 0$ "$\Leftarrow$" klar per. Def.

"$\Rightarrow$" $0 = \underbrace{|x|}_{[(a_n)_n]} \overset{(*)}{=} [(|a_n|)_n] \Rightarrow (|a_n|)_n \sim (0,0,0,\dots)$

$\Updownarrow$

$(\underbrace{||a_n| - 0|}_{|a_n - 0|})_n$ ist Nullfolge

$\Rightarrow (a_n)_n \sim (0,0,0,\dots)$, d.h. $x = 0$ ✓

(B2) $|xy| = |\underbrace{[(a_n)_n] \cdot [(b_n)_n]}_{[(a_n b_n)_n]}| \overset{(*)}{=} [(\underbrace{|a_n b_n|}_{\substack{|a_n||b_n| \\ \text{(B2) in } \mathbb{Q}}})_n] = [(|a_n|)_n] \cdot [(|b_n|)_n]$

$\overset{(*)}{=} |[(a_n)_n]| \cdot |[(b_n)_n]| = |x| \cdot |y|$

(B3) $|x+y| = |\underbrace{[(a_n)_n] + [(b_n)_n]}_{[(a_n + b_n)_n]}| \overset{(*)}{=} [(\underbrace{|a_n + b_n|}_{\leq |a_n| + |b_n| \text{ (B3) in } \mathbb{Q}})_n]$

Def. von $\leq$ in $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $\leq [(|a_n|)_n] + [(|b_n|)_n] \overset{(*)}{=} |[(a_n)_n]| + |[(b_n)_n]|$

$= |x| + |y|$.

Verträglichkeit der Operationen auf $\mathbb{R}$ für Elemente aus $\mathbb{Q}$: nachprüfen mittels $q = [(q,q,q,\dots)] \in \mathbb{R}$ (Übung!) ■

2.56 Definition (i) $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ *Folge* $:\iff$ Abb.: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto x_n$

(ii) $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x :\iff \forall \varepsilon \in \underline{\mathbb{R}}, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: |x_n - x| < \varepsilon$ ($<$ in $\mathbb{R}$)

2.57 Bemerkung!! Kap. 2.5 (& Kap. 2.4!) über Folgen & Reihen verwendet <u>nicht</u>, dass $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, nur dass $\mathbb{K}$ bewerteter, archimedisch <u>geordneter</u> Körper

$\Rightarrow$ <u>alles</u> dort gilt auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (!!)

2.58 Satz Sei $(q_n)_n \in CF(\mathbb{Q})$ und $x := [(q_n)_n] \in \mathbb{R}$

Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} [(q_n, q_n, q_n, \ldots)] = x$ (Kgz. in $\mathbb{R}$)

hierzu mit Notation 2.52 (ii): $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$.

Bew. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ $\overset{\mathbb{R} \text{ archim.}}{\Longrightarrow}$ $\exists k \in \mathbb{N}: 1 < \varepsilon k$

per Def. Cauchy-Folge (in $\mathbb{Q}$): $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N: |q_n - q_m| < \frac{1}{k}$ (verwendet $1/k \in \mathbb{Q}$!)

für $n \in \mathbb{N}$ sei $y_n := x - [(q_n, q_n, \ldots)]$ $(= x - q_n)$

$$= [(q_m)_m] - [(q_n)_m] = [(q_m - q_n)_m]$$

(*) im Bew. von Satz 2.55 (iv) $\Longrightarrow$ $|y_n| = [(|q_m - q_n|)_m] \overset{\forall n \geq N}{\Longrightarrow} |y_n| \leq \frac{1}{k} < \varepsilon$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \quad (\text{in } \mathbb{R}) \qquad \blacksquare$$

Moral: alle Cauchy-Folgen aus $\mathbb{Q}$ konvergieren in $\mathbb{R}$ („Löcher in $\mathbb{Q}$ gestopft")

2.59 Definition Sei $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq -n_0$ sei $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$.

b-adischer Bruch: Reihe $\pm \sum\limits_{n=-n_0}^{\infty} a_n \frac{1}{b^n}$

$b = 10$: Dezimalbruch

$b = 2$: dyadischer Bruch

2.60 Satz Sei $(S_N)_{N \geq -n_0} \subseteq \mathbb{Q}$ Folge der Partialsummen des b-adischen Bruches aus Def. 2.59. Dann gilt: $(S_N)_{N \geq -n_0} \in CF(\mathbb{Q})$, somit $x := [(S_N)_{N \geq -n_0}] \in \mathbb{R}$ und nach Satz 2.58 auch $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = x$ (Kgz. in $\mathbb{R}$).

Beweis: $S_N = \pm \sum_{n=-n_0}^{N} a_n \frac{1}{b^n} \in \mathbb{Q}$ für $N \geq -n_0$

Sei $M, N \in \mathbb{N}$, $M \leq N \Rightarrow$

Δ-Ungl. u. $\left|\frac{a_n}{b}\right| \leq 1$

$$|S_N - S_M| = \left| \pm \sum_{n=M+1}^{N} a_n \frac{1}{b^n} \right| \leq \sum_{n=M+1}^{N} \frac{1}{b^{n-1}} \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{b^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{b^M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^M} \frac{1}{1-\frac{1}{b}} \leq \frac{2}{b^M} \quad (\text{da } b \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \tilde{N} \in \mathbb{N}: \frac{2}{b^{\tilde{N}}} < \varepsilon \Rightarrow |S_N - S_M| < \varepsilon \ \forall N, M \geq \tilde{N}$ ∎

2.61 Satz Sei $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann $\exists$ b-adischer Bruch, so dass $x = \pm \sum_{n=-n_0}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$ (Kgz. in $\mathbb{R}$)

Moral: Jedes $x \in \mathbb{R}$ lässt sich beliebig gut durch rationale Zahlen approximieren

- $\mathbb{R}$ ist z.B. Menge aller Dezimalbrüche ($b = 10$):

$$\pm \sum_{n=-n_0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \pm a_{-n_0} \dots a_0, a_1 a_2 a_3 \dots\dots$$

Beweis von Satz 2.61: Sei $x \in \mathbb{R}$, o.E. $x > 0$

$\mathbb{R}$ archimedisch geordnet (Satz 2.55 (ii)) und $b > 1$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0: \ x < b^{m+1}$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ kleinste nat. Zahl, für die das wahr.

Beh. $\forall N \in \mathbb{Z}, N \geq -n_0, \forall n \in \{-n_0, -n_0+1, \dots, N\}$

$\exists a_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ und $\exists \xi_N \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \xi_N < b^{-N}$:

$$x = \sum_{n=-n_0}^{N} \frac{a_n}{b^n} + \xi_N$$

Aus beh. $\Rightarrow$ Satz, da $\lim_{N \to \infty} \xi_N = 0$, also

verbleibt:

<u>Bew. der Beh.:</u> per Ind. nach N

Ind. anf.: $N=-n_0$: nach Def. von n_0 gilt

$$0 \le x b^{-n_0} < b$$

$$\Rightarrow \exists!\, a_{-n_0} \in \{0,1,\dots,b-1\}: \quad x b^{-n_0} = a_{-n_0} + \delta$$

wobei $0 \le \delta < 1$

setze $\xi_{-n_0} := b^{n_0}\delta$, also $0 \le \xi_{-n_0} < b^{n_0}$ $(= b^{-N})$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a_{-n_0}}{b^{-n_0}} + \xi_{-n_0} \quad ✓$$

Ind.schritt: $N \to N+1$: Sei $x = \sum_{n=-n_0}^{N} \frac{a_n}{b^n} + \xi_N$

mit $0 \le \xi_N < b^{-N}$ $\Rightarrow$ $0 \le \xi_N b^{N+1} < b$

$$\Rightarrow \exists!\, a_{N+1} \in \{0,1,\dots,b-1\}: \quad \xi_N b^{N+1} = a_{N+1} + \tilde\delta$$

wobei $0 \le \tilde\delta < 1$

Setze $\xi_{N+1} := \tilde\delta\, b^{-(N+1)}$ $\Rightarrow$ $0 \le \xi_{N+1} < b^{-(N+1)}$

und
$$x = \sum_{n=-n_0}^{N} \frac{a_n}{b^n} + \underbrace{\xi_N}_{= \frac{a_{N+1}}{b^{N+1}} + \xi_{N+1}} = \sum_{n=-n_0}^{N+1} \frac{a_n}{b^n} + \xi_{N+1} \quad ✓$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{2.62 Satz}}$ (Cauchy)

$\mathbb{R}$ ist voll<u>ständig</u>, d.h. jede Cauchy-Folge $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert (in $\mathbb{R}$).

- Rechtfertigt $\mathbb{R}$ als „Vervollständigung" von $\mathbb{Q}$ zu nennen (Def. 2.51(ii))
- einziger Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$

<u>Beweis von Satz 2.62.</u> Sei $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ Cauchy bel. fest.

<u>1. Akt:</u> Konstruktion von $(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ als Kandidat für Grenzwert x

$x_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\ (\tau_k^{(n)})_k \in CF(\mathbb{Q})$ mit $x_n = [(\tau_k^{(n)})_k]$

$\overset{\text{Satz 2.58}}{\Longrightarrow} \quad \lim\limits_{k\to\infty} \tau_k^{(n)} = x_n \ \forall n \qquad (0)$

o.E. gelte $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N} \quad |\tau_{k_1}^{(n)} - \tau_{k_2}^{(n)}| < \frac{1}{n} \qquad (1)$

(geht immer für k_1, k_2 groß genug, da $(\tau_k^{(n)})_k$ Cauchy; streiche Anfangsglieder weg $\Rightarrow$ gültig $\forall k_1, k_2$)

setze $q_n := \tau_n^{(n)}\ \forall n \in \mathbb{N}$: <u>Diagonalfolge</u> $(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$

<u>2. Akt:</u> $(q_n)_n \in CF(\mathbb{Q})$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$. $(x_n)_n$ Cauchy $\Rightarrow \exists\ \tilde{N} \in \mathbb{N}\ \forall m,n \geq \tilde{N}: |x_m - x_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ <u>$\forall k \in \mathbb{N}$</u>: $\forall m, n > N := \max(\tilde{N}, 1/\varepsilon)$ gilt

$$|q_m - q_n| = |\tau_m^{(m)} - \tau_k^{(m)} + \tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)} + \tau_k^{(n)} - \tau_n^{(n)}|$$

$$\overset{(1)}{<} \frac{1}{m} + |\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)}| + \frac{1}{n}$$

$$< 2\varepsilon + |\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)}| \qquad (2)$$

Da $\quad x_m - x_n = [(\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)})_k]$ und

$|x_m - x_n| = [(|\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)}|)_k] < \varepsilon \quad (\forall m,n \geq \tilde{N})$

folgt: $\exists K \in \mathbb{N}\ \forall k \geq K: \quad |\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)}| < \varepsilon \quad ($ " $)$

Wähle $k \geq K$ in (2), dann:

$$\forall m,n \geq N: \quad |q_m - q_n| < 3\varepsilon \quad \checkmark$$

3. Akt: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in $\mathbb{R}$

wobei $x := [(q_n)_n] \in \mathbb{R}$ (3)

Aus (0) $\wedge$ (1) mit $k_1 = n$ und $k_2 \to +\infty$: $|q_n - x_n| \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |q_n - x_n| = 0 \quad (\text{in } \mathbb{R}) \qquad (4)$$

(3) $\underset{\text{Satz 2-58}}{\Rightarrow}$ $\lim_{n\to\infty} |q_n - x| = 0$ (in $\mathbb{R}$) (5)

(NB: $\lim_{n\to\infty} q_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |q_n - x| = 0$)

Aber:

$$0 \leq |x_n - x| \leq |x_n - q_n| + |q_n - x|$$

$$\overset{(5),(4)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \blacksquare$$

Ab jetzt:
- wird <u>nicht</u> mehr benötigt, dass $\mathbb{R} \ni x = [(q_n)_n]$ (!!)
- „$\varepsilon > 0$" abkürzend für $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

2.63 Definition Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Fkt.

f (monoton) $\left\{\begin{array}{l} \text{wachsend [auch: isoton]} \\ \text{fallend [auch: antiton]} \end{array}\right\} :\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2$: $f(x_1) \underset{\geq}{\leq} f(x_2)$

f streng/strikt (monoton) wachsend [auch: strikt isoton] / fallend [auch: strikt antiton]

$$:\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2: \\ f(x_1) \underset{>}{<} f(x_2) \end{array}\right.$$

[$D = \mathbb{N} \rightsquigarrow$ (reelle) Folgen]

$\boxed{\text{2-64 Satz}}$ Sei $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ isoton. Dann gilt

$$(x_n)_n \text{ kgt.} \iff (x_n)_n \text{ von oben beschränkt}$$

Analog: für antiton und von unten beschränkt!

Schreibweise: $x_n \nearrow x$ bzw. $x_n \searrow x$

Beweis: "$\Rightarrow$" Satz 2-34

"$\Leftarrow$" Sei $x_n \leq S \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad (\Delta)$

Ann: $(x_n)_n$ divergent

$\overset{\text{(Satz 2.62)}}{\Rightarrow}$ keine Cauchy-Folge, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists m, n \geq N : |x_m - x_n| \geq \varepsilon \qquad (*)$$

o.E. sei $m > n \Rightarrow x_m - x_n \geq \varepsilon$

$\mathbb{R}$ archim. $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N} : \; S - x_1 < K\varepsilon$ $\qquad (**)$

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{nun wähle } N_1 := 1 \text{ in } (*) \Rightarrow \exists m_1 > n_1 \in \mathbb{N} : & x_{m_1} - x_{n_1} \geq \varepsilon \\
\text{" } N_2 := \max(m_1, n_1) \Rightarrow \exists m_2 > n_2 \geq N_2 : & x_{m_2} - x_{n_2} \geq \varepsilon \\
\vdots & \\
\text{" } N_K := \max(m_{K-1}, n_{K-1}) \Rightarrow \exists m_K > n_K \geq N_K : & x_{m_K} - x_{n_K} \geq \varepsilon
\end{array}\right\} (***)$$

$$\Rightarrow x_{m_K} - x_{n_1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{K} (x_{m_k} - x_{n_k})}_{\geq \varepsilon \; (***)} + \underbrace{\sum_{k=2}^{K} (x_{n_k} - x_{m_{k-1}})}_{\geq 0} \quad \text{isoton } (n_k \geq m_{k-1})$$

$$\geq K \cdot \varepsilon \overset{(**)}{>} S - x_1$$

$$\Rightarrow x_{m_K} > S + \underbrace{x_{n_1} - x_1}_{\geq 0 \text{ (isoton)}} \geq S \quad ↯ \text{ (zur } (\Delta))$$

∎

2.65 Definition Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ Folge

(i) Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ strikt isotone Folge. ($\Rightarrow n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$)

Dann heißt $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} := (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ Teilfolge von $(x_n)_n$

(ii) $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt (oder -wert) von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

$:\Leftrightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

2.66 Beispiel

alternierende Folge $x_n = (-1)^n$

$n_k = 2k \Rightarrow$ Teilfolge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (\underbrace{(-1)^{2k}}_{1})_{k\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow 1$ ist Häufungspunkt von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Analog ($n_k = 2k-1$) ist -1 Häufungspkt von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

2.67 Satz von Bolzano-Weierstraß (Version für $\mathbb{R}$)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte Folge. Dann gilt:

$(x_n)_n$ besitzt konvergente (da monotone) Teilfolge.

Mit anderen Worten: jede beschränkte Folge besitzt mind. einen Häufungspunkt.

Beweis: $m \in \mathbb{N}$ Gipfelstelle von $(x_n)_n :\Leftrightarrow x_m > x_n \ \forall n > m$

1. Fall: $(x_n)_n$ hat ∞-viele Gipfelstellen

$m_1 < m_2 < m_3 < \dots$

$\Rightarrow x_{m_1} > x_{m_2} > x_{m_3} > \dots$, d.h. $(x_{m_k})_k$ ist antitone Teilfolge.

2. Fall: $(x_n)_n$ hat keine oder nur endlich viele Gipfelstellen

Sei $n_1 >$ größte Gipfelstelle (also n_1 ist keine Gipfelstelle!)

$\Rightarrow \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \geq x_{n_1}$ (gäbe es kein solches n_2, wäre n_1 Gipfelstelle)

n_2 keine Gipfelstelle $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : x_{n_3} \geq x_{n_2}$

$\vdots$

d.h. $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist isotone Teilfolge ☒

2.68 Definition Intervalle für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sei

eigentlich:
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad [a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$]a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

uneigentlich:
$$[a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \quad]-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$
$$]a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad]-\infty,a[:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

2.69 Satz Intervallschachtelungsprinzip

$\forall k \in \mathbb{N}$ seien $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k < b_k$ und $J_k := [a_k, b_k]$

Es gelte
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ J_{k+1} \subseteq J_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \bullet\ \lim\limits_{k\to\infty} \underbrace{|J_k|}_{:= b_k - a_k} = 0 \end{array}\right\} \text{Intervallschachtelung}$$

Dann $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ mit $x \in J_k\ \forall k \in \mathbb{N}$. Für dieses x gilt: $a_k \nearrow x$ und $b_k \searrow x$.

Beweis $\forall l, k \in \mathbb{N}$ gilt: $\quad a_k \le b_l \quad (*)$ [sonst wäre $J_k \cap J_l = \emptyset$!]

Da

- $(a_k)_k$ isoton und $(*)$

$$\overset{\text{Satz 2.64}}{\Longrightarrow} \quad \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{k\to\infty} a_k = a$$

- $(b_k)_k$ antiton und $(*)$

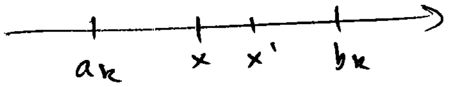
$$\Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} : \lim_{k\to\infty} b_k = b$$

$$\overset{\text{Satz 2.36}}{\Longrightarrow} \quad a - b = \lim_{k\to\infty}(a_k - b_k) = 0, \qquad x := a = b$$

$$\left.\begin{array}{lll} l \to \infty \text{ in } (*) & \Rightarrow & a_k \le x \quad \forall k \\ k \to \infty \text{ in } (*) & \Rightarrow & x \le b_l \quad \forall l \end{array}\right\} \quad x \in J_k \quad \forall k$$

Eindeutigkeit: es gelte $x, x' \in J_k \; \forall k \Rightarrow$

$$|x - x'| \le b_k - a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \Rightarrow x = x' \quad \blacksquare$$



Zum Schluss 2 Anwendungen der Konvergenzsätze:

2.70 Satz Wurzel

Sei $x \in \mathbb{R}_> :=]0, \infty[$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann

$\exists!\, r \in \mathbb{R}_>$, so dass $\quad r^k = x$.

Schreibweise: $\quad r =: \sqrt[k]{x} =: x^{1/k} \quad$ k'te Wurzel aus x

Beweis: (Verallg. des babylon. Wurzelziehens aus Satz 2.50)

Def. Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_>$ mittels $r_1 := 1$ (Wert $\in \mathbb{R}_>$ spielt keine Rolle!)

$$r_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)\, r_n + \frac{x}{r_n^{k-1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Zeige (ii) $(r_n)_n$ kgt.

- $r_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Bew. mit Induktion!)

  $\Rightarrow (r_n)_n$ nach unten beschränkt

- antiton, da $\forall n \in \mathbb{N}$

$$r_{n+1} = r_n \left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{x}{r_n^k} - 1\right)\right) =: r_n A_n$$

Bernoulli-Ungl. (Auf. 1(ii) Ü. Blatt 4) für A_n^k $\Rightarrow \quad r_{n+1}^k \geq r_n^k \left(1 + k \cdot \frac{1}{k}\left(\frac{x}{r_n^k} - 1\right)\right) = x$

$\Rightarrow \forall n \geq 2: \quad 0 \leq A_n \leq 1 \qquad \left(\text{da } \frac{x}{r_{n+1}^k} \leq 1\right)$

$\Rightarrow (r_n)_{n\geq 2}$ antiton $\overset{\text{Satz 2.64}}{\Longrightarrow}$ Kgz.

(ii) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} r_n\right)^k = x$

$r \geq 0$ wegen $r_n > 0 \ \forall n$

Sei $\quad r := \lim\limits_{n\to\infty} r_n \in \mathbb{R}_{\geq} := [0, \infty[$

Rekursion $\Rightarrow \quad r_{n+1} r_n^{k-1} = \frac{1}{k}\left((k-1) r_n^k + x\right)$

(Satz 2.36)

$n \to \infty$ $\Rightarrow \quad r \ r^{k-1} = \frac{1}{k}\left((k-1) r^k + x\right)$

$\Rightarrow \quad r^k = x \quad \Rightarrow \quad r \in \mathbb{R}_{>}$ (sonst $x = 0$)

(iii) Eindeutigkeit:

für $r < r' \quad \Rightarrow \quad r^k < (r')^k$ ☒

2.71 Definition Rationale Potenzen

Sei $x \in \mathbb{R}_>$, $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$x^q := \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m \in \mathbb{R}_> \quad (\text{insbes.}: x^0 = 1)$$

außerdem $0^q := \begin{cases} 0, & q \in \mathbb{Q}_> \\ 1, & q = 0 \end{cases}$ (nicht def. für neg. Expon)

2.72 Satz (i) obiges ist wohldef., d.h. unabh. von Darstellung $q = \frac{m}{n} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}_>$, $\forall q, r \in \mathbb{Q}$:

$$(xy)^q = x^q y^q, \quad x^q x^r = x^{q+r}, \quad (x^q)^r = x^{q \cdot r}$$

Beweis: Übung.

2.73 Definition Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

- ε-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$: $U_\varepsilon(a) :=]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subseteq \mathbb{R}$
- $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungspkt von A $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ enthält $U_\varepsilon(a)$ ∞-viele Punkte von A
- A von oben beschränkt $:\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}: x \leq s \quad \forall x \in A$

  A von unten " : " $x \geq s$ "

  s heißt obere (bzw untere) Schranke von A

  A beschränkt $:\Leftrightarrow$ A von oben und unten beschränkt.

2.74 Bemerkungen & Beispiele

(i) genau jedes $a \in [0,1]$ ist Häufungspkt. von $]0;1[$ (auch von $[0,1]$)

(ii) jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspkt. von $\mathbb{Q}$ (z.B. b-adische Bruchapprox.!)

(iii) 0 ist Häufungspkt. von $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(iv) A beschränkt $\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} : \forall x \in A : |x| \leq s$

(v) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt $\Leftrightarrow \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt

2.75 Definition Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $S, I \in \mathbb{R}$

- S Supremum von A (kleinste obere Schranke) $:\Leftrightarrow$
  - S obere Schranke von A
  - $\forall$ obere Schranken S' von A gilt: $S \leq S'$

- I Infimum von A (größte untere Schranke) $:\Leftrightarrow$
  - I untere Schranke von A
  - $\forall$ untere Schranken I' von A gilt: $I' \leq I$

Schreibweise: $S = \sup A$, $I = \inf A$

- S Maximum von A, $S = \max A$ $:\Leftrightarrow S = \sup A \wedge S \in A$

- I Minimum von A, $I = \min A$ $:\Leftrightarrow I = \inf A \wedge I \in A$

2.76 Satz Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Mit den Vereinbarungen

- $\sup A := -\infty$, $\inf A := +\infty$, falls $\underline{\underline{A = \emptyset}}$
- $\sup A := +\infty$, falls $A\ (\neq \emptyset)$ nicht von oben beschränkt
- $\inf A := -\infty$, falls $A\ (\neq \emptyset)$ nicht von unten "

gilt: A besitzt genau ein Supremum und Infimum in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Außer in den o.g. Fällen gilt: $\sup A, \inf A \underline{\in \mathbb{R}}$

Beweis: für sup und $A \neq \emptyset$ von oben beschränkt (inf analog), sei $s_1 \in \mathbb{R}$ obere Schranke von A und $x_1 \in A$. (o.E. $x_1 < s_1$)

1. Akt: $\exists$ Intervalle $[x_1, s_1] \supseteq [x_2, s_2] \supseteq [x_3, s_3] \supseteq \ldots$

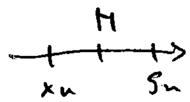
so dass $\forall n \in \mathbb{N}$: (a) $x_n \in A$

(b) s_n ist obere Schranke von A

(c) $s_n - x_n \leq 2^{-(n-1)}(s_1 - x_1)$

per Induktion: $n = 1$ klar

$n \to n+1$: Setze $M := \frac{1}{2}(x_n + s_n)$



1. Fall: $A \cap \,]M, s_n] = \emptyset \Rightarrow M$ ist obere Schranke und $x_{n+1} := x_n$, $s_{n+1} := M$ erfüllen (a) - (c)

2. Fall: $A \cap \,]M, s_n] \neq \emptyset \Rightarrow$ wähle $x_{n+1} \in A \cap \,]M, s_n]$

$s_{n+1} := s_n \Rightarrow$ (a) - (c) erfüllt ✓

Somit $(s_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ antiton & von unten beschr.

$\overset{\text{Satz 2.64}}{\Rightarrow}$ $s := \lim_{n \to \infty} s_n \in \mathbb{R}$ existiert

2. Abt: S ist Supremum von A

- Sei $x \in A$ bel. fest $\Rightarrow x \leq s_n \;\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x \leq \lim_{n\to\infty} s_n = S$$

$\Rightarrow$ S obere Schranke von A.

- Sei S' obere Schranke von A. Ann.: $S' < S$

$$\Leftrightarrow 0 < S - S'$$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$:

$$\underset{s_n - x_n}{\overset{\vee\!\!/}{2^{-(n-1)}(s_1 - x_1)}} < \underset{s_n - S'}{\overset{\mathbin{\rotatebox{90}{$\geq$}}}{S - S'}} \quad (s_n)_n \text{ antiton}$$

$\Rightarrow S' < x_n$ ↯ da $x_n \in A$ und S' obere Schranke

also $S \leq S'$

$\Rightarrow S$ supremum (notw. eindeutig!) ☒

2.77 Beispiel: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

- $\sup\,[a,b] = \sup\,[a,b[\; = b$

  $\inf\,[a,b] = \inf\,]a,b] = a$

- $a = \min\,[a,b]$, $b = \max\,[a,b]$

  $[a,b[$ hat kein Max., $]a,b]$ kein Min.

- $\sup\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1$

2.78 Definition Sei $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$; $y_n^{\overset{+}{(-)}} := \underset{(\inf)}{\sup} \{x_k \in \mathbb{R} : k \geq n\}$

[NB: $(y_n^{\overset{+}{(-)}})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ist antiton (isoton)!]

<u>Limes superior</u> von $(x_n)_n$: $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n := \lim\limits_{n\to\infty} y_n^{+}$

<u>Limes inferior</u> von $(x_n)_n$: $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n := \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n := \lim\limits_{n\to\infty} y_n^{-}$

<u>falls</u> $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^{\overset{+}{(-)}}$ existiert; sonst, d.h. falls

- $(y_n^{\overset{+}{(-)}})_n = (\overset{+}{(-)}\infty, \overset{+}{(-)}\infty, \ldots)$, setze $\lim\limits_{n\to\infty} \overset{\sup}{\inf}\, x_n := \overset{+}{(-)}\infty$
- $(y_n^{\overset{+}{(-)}})_n$ hat best. Divergenz nach $\mp\infty$, setze
  $\lim\limits_{n\to\infty} \overset{\sup}{\inf}\, x_n := \overset{-}{(+)}\infty$

<u>Fazit</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} \overset{\sup}{\inf}\, x_n$ existiert stets in $\overline{\mathbb{R}}$!

2.79 Satz Sei $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt. Setze

$H := \{h \in \mathbb{R} : h \text{ ist Häufungspkt. von } (x_n)_n\}$

(somit $H \neq \emptyset$, $H \subseteq \mathbb{R}$, da $(x_n)_n$ beschränkt). Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \max H \quad (\text{größter Häufungspkt.})$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \min H \quad (\text{kleinster} \quad \text{"} \quad)$$

<u>Beweis</u>: (nur für lim sup; lim inf analog)

<u>1. Ahl</u>: H besitzt max.

Sei $S := \sup H < \infty$ (da $(x_n)_n$ beschr.) und $\varepsilon > 0$ bel.

$\Rightarrow \exists h \in H : S - \varepsilon < h \leq S$ (denn andernfalls wäre $S-\varepsilon$ obere Schranke ↯) $\boxed{!!}$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \mathcal{U}_\delta(h) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(S)$; h Häufungspkt von $(x_n)_n$

$\Rightarrow \exists \infty$-viele $n \in \mathbb{N}$: $x_n \in \mathcal{U}_\delta(h) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(S)$;

insbes. für $\varepsilon := \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$, $\exists n_j \in \mathbb{N}$:

$$|x_{n_j} - s| < \frac{1}{j} \quad \text{und} \quad n_{j+1} > n_j \quad \forall j$$

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = s \Rightarrow s \in H \text{ und } s = \max H \checkmark$$

2. Akt: $\quad \sigma := \limsup x_n = s$

- da $s \in H \Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$: $x_{n_j} \xrightarrow{j\to\infty} s$

$$\Rightarrow y_n^+ \geq \sup\{x_{n_j} \in \mathbb{R} : j \in \mathbb{N} \text{ mit } n_j \geq n\} \overset{(!)}{\geq} s \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma \geq s}$$

- Ann.: $\sigma > s \Rightarrow \exists \delta > 0 : \sigma > s + \delta$

$$\Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N_0 : y_n^+ > s + \delta$$

$$\Rightarrow \exists \text{ Teilfolge } (l_k)_k \subseteq \mathbb{N},\ l_k \geq N_0 \ \forall k \in \mathbb{N} \text{ mit}$$

$$x_{l_k} > s + \delta.$$

Wegen $(x_n)_n$ beschränkt $\overset{\text{Bolzano-W}}{\Rightarrow}$ $(x_{l_k})_k$ hat Häufungspkt. $\hat{h} \geq s + \delta \Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{l_{k_m}})_m$ mit $\lim_{m\to\infty} x_{l_{k_m}} = \hat{h} \Rightarrow \hat{h}$ ist Häufungspkt. von $(x_n)_n$ $\lightning$ da $\hat{h} \geq s + \delta > s = \sup H$

$$\Rightarrow \underline{\sigma \leq s} \qquad \blacksquare$$

2.80 Beispiel

$$\limsup_{n\to\infty} n^{(-1)^n} = +\infty,$$

$$\liminf_{n\to\infty} n^{(-1)^n} = 0$$

2.7. Komplexe Zahlen

Motivation: math. Rahmen für Lösungen der Glg. $x^2+1=0$

2.81 Definition $\mathbb{C} := \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit den 2 Verknüpfungen

$$(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) := (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$$(x_1,y_1) \odot (x_2,y_2) := (x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$$

2.82 Satz $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ ist ein Körper.

Beweis: Kommutativität, Assoziativität u. Distributivität von $\oplus$ und $\odot$ folgen sofort aus entsprechenden Eigenschaften von $\mathbb{R}$ (Assoz. von $\odot$ braucht kurze Rechnung $\rightsquigarrow$ Übung!).

	$\oplus$	$\odot$
neutrales Elem.	$(0,0)$	$(1,0)$
inverses Element zu $z:=(x,y)$	$-z:=(-x,-y)$	$\frac{1}{z} := z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ [für $z\neq(0,0)$]

$\blacksquare$

2.83 Bemerkung:

$$J: \mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad x\mapsto(x,0)$$ ist Körperhomomorphismus

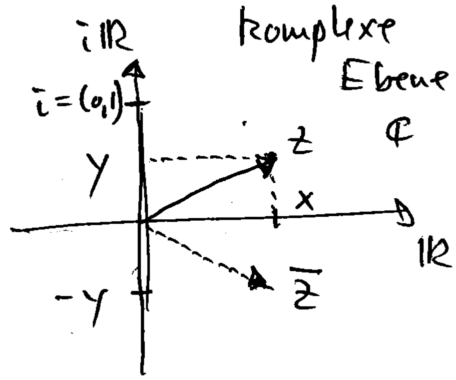
d.h. $(\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}, \oplus, \odot)$ erfüllt alle Eigenschaften von $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ identifiziere $\mathbb{R}$ mit $J(\mathbb{R})$, Notation $x := (x,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$,
so dass $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Sonit gilt unter Weglassung von Δ:

$\boxed{\text{2.84 Lemma}}$ Sei $z := (x,y) \in \mathbb{C}$ und $i := (0,1) \in \mathbb{C}$.

(a) $i^2 = -1$, (b) $i^{-1} = -i$, (c) $z = x + iy$



Beweis: (a), (b) klar (nachrechnen)

(c) $z = \underset{x}{\underset{\downarrow}{(x,0)}} \underset{+}{\underset{\downarrow}{\triangle\!\!\!\!+}} \underset{i}{\underset{\downarrow}{(0,1)}} \underset{\cdot}{\underset{\downarrow}{\triangle\!\!\!\cdot}} \underset{y}{\underset{\downarrow}{(y,0)}}$

(nachrechnen)

$\boxed{\text{2.85 Definition}}$ Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist

$\bar{z} := x - iy$ komplexe Konjugation (von z)
(entspricht Spiegelung an x-Achse!)

$\operatorname{Re} z := x$ Realteil

$\operatorname{Im} z := y$ Imaginärteil

Klar ist (nachrechnen!)

$\boxed{\text{2.86 Lemma}}$ Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten

(a) $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

(b) $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(c) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2)$

(d) Falls $z \neq 0$: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$

(NB: $z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 > 0$ ((c) & $z \neq 0$))

[$\rightsquigarrow$ Standardtrick, um $\frac{1}{z}$ in Re u. Im zu zerlegen!]

$\boxed{2.87.\ \text{Def. u. Satz}}$ Die Betragsabb.

$$|\cdot| : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto |z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = (z \cdot \bar{z})^{1/2} \end{array}$$

erfüllt

(B1) $|z| \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(B2) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ $\quad \Big\}\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(B3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Jargon: $\mathbb{C}$ ist bewerteter Körper (vgl. Satz 2.21)

Beweis: (B1) klar wegen Lemma 2.86 (c)

(B2) $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$

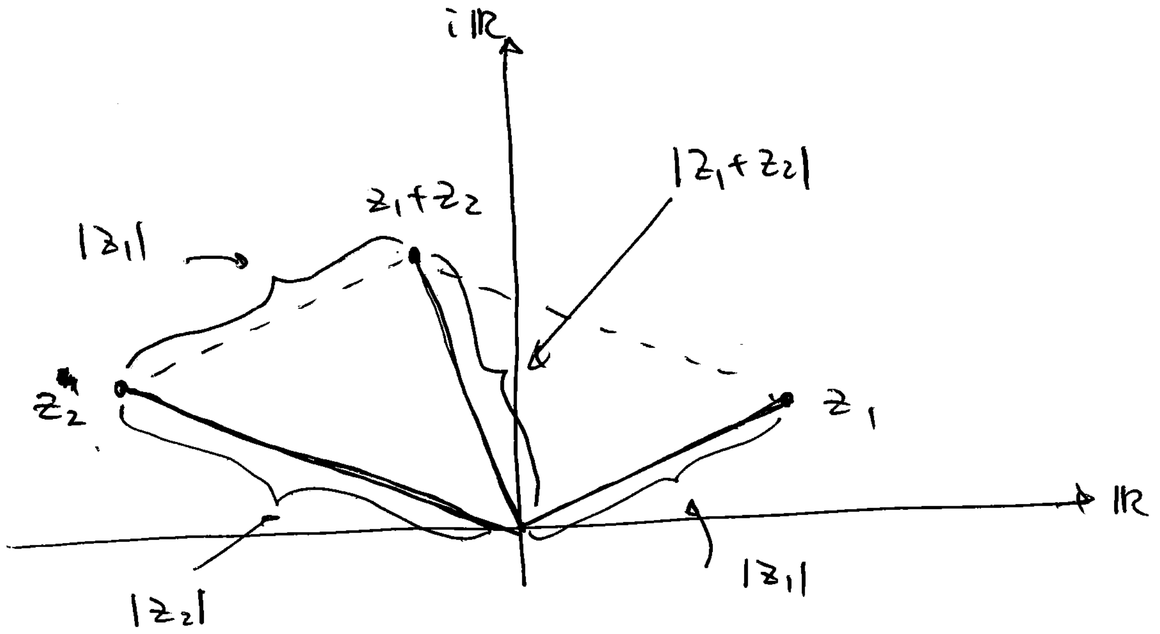
(B3) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$

Aber $\bar{z}_1 z_2 = \overline{z_1 \bar{z}_2}$, so $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$

Bem. dass $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ (und $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$) per def.

Damit $|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2$
$= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$ ∎

zu (B3): Dreieck im Parallelogramm in komplexer Ebene:

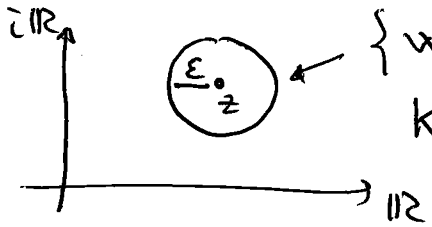


Übertragung der Konvergenzbegriffe aus Kap. 2.5 u. 2.6

2.88 Definition Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ Folge und $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; |z_n - z| < \varepsilon$$

$(z_n)_n$ kgt. (in $\mathbb{C}$) gegen z



$\{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \varepsilon\}$ Kreisscheibe um z mit Radius ε

2.89 Warnung !! Es gibt keine natürliche Ordnung auf $\mathbb{C}$ (Bew.: unten)! (d.h., „$z_1 \leq z_2$" sinnloss!)

Deswegen können: ($|z_1| \leq |z_2|$ kann sinn machen)

- bestimmte Divergenz nach $\pm\infty$
- Beschränktheit von oben / unten
- Verträglichkeit von limes & Ordnung
- isotone / antitone Folgen
- Intervallschachtelungsprinzip
- obere / untere Schranken; Supremum / Infimum, Min / Max
- lim inf, lim sup

nicht (!) verallgemeinert werden von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$!

Bew. (es gibt auf $\mathbb{C}$ kein natürliche Ordnung):

Natürliche Ordnung $\preccurlyeq$ auf $\mathbb{C}$ sollte erfüllen:

(i) Verträglichkeit mit Ordnung auf $\mathbb{R}$:

$$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} : \quad r_1 < r_2 \Leftrightarrow r_1 \prec r_2$$

(ii) Trichotonie: $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt genau 1 der 3 Aussagen

$$z \prec 0 \; , \quad z = 0 \; , \quad 0 \prec z$$

(iii) Abgeschlossen bzg. + und $\cdot$:

$$0 \prec z_1,\ 0 \prec z_2 \Rightarrow 0 \prec z_1 + z_2 \wedge 0 \prec z_1 z_2 \quad (*)$$

Da $i^2 = -1 \overset{(i)}{\Rightarrow} i^2 \prec 0$. Da $i \neq 0 \overset{(ii)}{\Rightarrow}$

$$i \prec 0 \quad \text{oder} \quad 0 \prec i$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow \lightning \text{ zu } (*) \ \& \ i^2 = -1$$

$$0 \prec -i$$

$$(-i)^2 = -1 \longrightarrow \Downarrow \lightning \text{ zu } (*)$$

Fazit: $\nexists$ natürliche Ordnung auf $\mathbb{C}$!

2.90 Satz Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ Folge. Dann gilt

$(z_n)_n$ kgt. in $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Re}\, z_n)_n$ und $(\mathrm{Im}\, z_n)_n$ kgt. in $\mathbb{R}$

Im Fall der Kgz. gilt:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n\right) + i \left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, z_n\right)$$

Bew. Sei $z_n = x_n + i y_n$ mit $x_n := \mathrm{Re}\, z_n$, $y_n := \mathrm{Im}\, z_n$

"$\Rightarrow$": $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z = x + iy \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: |z_n - z|^2 < \varepsilon^2$

$$|z_n - z|^2 = |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2$$

"$\Leftarrow$": $x_n \to x \wedge y_n \to y \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \max(N_x, N_y) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \left(|x_n - x| < \varepsilon \wedge |y_n - y| < \varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow |z_n - z| < \sqrt{2} \cdot \varepsilon \quad \blacksquare$$

2.91 Korollar Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ Folge. Dann gilt

$$z_n \xrightarrow{n\to\infty} z \iff \overline{z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \overline{z}$$

2.92 Bemerkung

Def. von Cauchy-Folgen und kgt'en Reihen wie gehabt (nur mit $|\cdot|$ aus Def. 2.87). Wegen Satz 2.90 und 2.93 (unten) überträgt sich alles weitere – mit Ausnahme des in Warnung 2.89 genannten!! – auf Folgen $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$

2.93 Satz $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ ist Cauchy-Folge (in $\mathbb{C}$)

$\Longleftrightarrow$ $(\operatorname{Re} z_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ und $(\operatorname{Im} z_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ sind Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$

Bew: Übung! Analog zu Satz 2.90.

2.94 Korollar $\mathbb{C}$ ist vollständig.

Bew.: Übung! Verwende Satz von Cauchy für $\mathbb{R}$ (Satz 2.62)

Die reelle Version von Bolzano-Weierstraß beruht auf monotonen Folgen – dennoch:

2.95 Satz von Bolzano-Weierstraß (Version für $\mathbb{C}$)

Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt. Dann hat $(z_n)_n$ mind. einen Häufungspunkt

Bew.: Übung! Verwende Sätze 2.90 & 2.67.

2.8 Mächtigkeit von Mengen

2.96 Definition Seien M, M' Mengen

- M und M' gleichmächtig $:\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $M \to M'$
- M endlich $:\Leftrightarrow M = \emptyset$ oder ($\exists n \in \mathbb{N}$ und Bijekt. $\{1, \dots, n\} \to M$)

  Schreibweise: $n =: |M| =: \#(M)$ Anzahl der Elemente von M ($= 0$ für $M = \emptyset$)
- M abzählbar $:\Leftrightarrow M = \emptyset$ oder $\exists$ Surjektion $\mathbb{N} \to M$

  M abzählbar unendlich $:\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $\mathbb{N} \to M$
- M überabzählbar $:\Leftrightarrow$ M nicht abzählbar

2.97 Satz Sei M endliche Menge. Dann ist

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} \qquad (\to \text{Notation: } \mathcal{P}(M) = 2^M)$$

Beweis:

$$|\mathcal{P}(M)| = \sum_{k=0}^{|M|} \underbrace{|\{M' \subseteq M : |M'| = k\}|}_{\substack{\#\text{ Möglichkeiten } k \text{ Elemente} \\ \text{aus } |M| \text{ Elementen auszu-} \\ \text{wählen } \overset{(!)}{=} \binom{|M|}{k}}} = \sum_{k=0}^{|M|} \binom{|M|}{k} \underset{\text{Kor. 2.27}}{=} 2^{|M|}$$

☒

2.98 Beispiele

- M endlich $\Rightarrow$ M abzählbar
- $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich, ebenso $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$
- $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ sind gleichmächtig; $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ auch.

2.99 Satz Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar:

$$\left(\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}},\ M_i \text{ abzählbar } \forall i\in\mathbb{N}\right) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \text{ abzählbar}$$

Beweis: Cantorsches Diagonalverfahren:

$$\begin{array}{llllll}
M_1: & x_{11} & x_{12} \rightarrow & x_{13} & x_{14} \rightarrow & x_{15} \ \cdots \\
M_2: & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\
M_3: & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\
M_4: & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\
\vdots & x_{51} & & & &
\end{array}$$

∎

2.100 Korollar $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beweis: $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $A_n := \left\{ \frac{k}{n} : k\in\mathbb{Z} \right\}$

$\mathbb{Z}$ abzählbar, also auch $A_n\ \forall n \overset{2.99}{\Longrightarrow}$ Beh. ∎

2.101 Satz Endliche kartesische Produkte abzählbarer Mengen sind abzählbar: $\forall N\in\mathbb{N}: \{M_i\}_{i=1}^{N}$, M_i abzählbar $\forall i=1,\dots,N$

$\Rightarrow M_1\times\dots\times M_N$ abzählbar

Bew.: Übung!

Warnung: Abzählbar unendliche kart. Produkt dagegen nicht, siehe Satz 2.104 (falls ≥ 2 Elemente!)

2.102 Satz Sei M eine Menge. Dann $\nexists$ Surjektion

$$M \to \mathcal{P}(M).$$

<u>Beweis</u>: <u>1. Fall</u>: $M=\emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(M)=\{\emptyset\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}|M|=0\\ |\mathcal{P}(M)|=1\end{array}\right\} \Rightarrow$ Beh.

<u>2. Fall</u>: $M\neq\emptyset$: Annahme: $\exists$ Surjektion $\sigma: M\to\mathcal{P}(M)$

Setze $A:=\{m\in M: m\notin\sigma(m)\}$, d.h. $\forall m\in M$ gilt: $m\in A \Leftrightarrow m\notin\sigma(m)$

σ surjektiv $\Rightarrow \exists x\in M: \sigma(x)=A \overset{m=x}{\Rightarrow} x\in A \Leftrightarrow x\notin A$ ↯ ■

2.103 Korollar $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist <u>überabzählbar</u>.

2.104 Satz $\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \times_{\mathbb{N}}\{0,1\} := \{(a_1,a_2,a_3,\dots): a_n\in\{0,1\}\ \forall n\in\mathbb{N}\}$
$= \{\varphi:\mathbb{N}\to\{0,1\}\}$

ist <u>überabzählbar</u>

<u>Bew.</u> Sei $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$, d.h. $A\subseteq\mathbb{N}$, betrachte <u>Indikatorfkt.</u> von A

$1_A\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, d.h.: $1_A: \begin{array}{l}\mathbb{N}\to\{0,1\}\\ x\mapsto 1_A(x):=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}\end{array}$

$\Rightarrow \mu: \begin{array}{l}\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}\\ A\mapsto 1_A\end{array}$ ist <u>injektiv</u> $(A_1\neq A_2\Rightarrow 1_{A_1}\neq 1_{A_2})$

$\Rightarrow \mu^{-1}: \begin{array}{l}\mu(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\to\mathcal{P}(\mathbb{N})\\ 1_A\mapsto A\end{array}$ ist (wohldef. &) surjektiv (*)

<u>Ann.</u>: $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ abzählbar $\Rightarrow \mu(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\subseteq\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ abzählbar

$\Rightarrow \exists\sigma:\mathbb{N}\to\mu(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ surj. $\overset{(*)}{\Rightarrow} \mu^{-1}\circ\sigma:\mathbb{N}\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ surj.

d.h. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar ↯ Satz 2.102 ■

2.105 Korollar $\mathbb{R}$, und somit auch die <u>irrationalen Zahlen</u> $(:=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, sind <u>überabzählbar</u>.

<u>Beweis</u>: b-adische Darstellung (mit $b\geq 3$)

und Satz 2.104 ■