2.8 Mächtigkeit von Mengen

2.96 Definition Seien M, M' Mengen

- M und M' gleichmächtig $:\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $M \to M'$
- M endlich $:\Leftrightarrow M = \emptyset$ oder ($\exists n \in \mathbb{N}$ und Bijekt. $\{1, \ldots, n\} \to M$)

  Schreibweise: $n =: |M| =: \#(M)$ Anzahl der Elemente von M ($= 0$ für $M = \emptyset$)
- M abzählbar $:\Leftrightarrow M = \emptyset$ oder $\exists$ Surjektion $\mathbb{N} \to M$

  M abzählbar unendlich $:\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $\mathbb{N} \to M$
- M überabzählbar $:\Leftrightarrow$ M nicht abzählbar

2.97 Satz Sei M endliche Menge. Dann ist

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} \qquad (\to \text{Notation: } \mathcal{P}(M) = 2^M)$$

Beweis:

$$|\mathcal{P}(M)| = \sum_{k=0}^{|M|} \underbrace{|\{M' \subseteq M : |M'| = k\}|}_{\substack{\#\text{ Möglichkeiten } k \text{ Elemente} \\ \text{aus } |M| \text{ Elementen auszu-} \\ \text{wählen } \overset{(!)}{=} \binom{|M|}{k}}} = \sum_{k=0}^{|M|} \binom{|M|}{k} \underset{\text{Kor. 2.27}}{=} 2^{|M|}$$

☒

2.98 Beispiele

- M endlich $\Rightarrow$ M abzählbar
- $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich, ebenso $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$
- $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ sind gleichmächtig; $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ auch.

2.99 Satz Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar:

$$\left(\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}},\ M_i \text{ abzählbar } \forall i\in\mathbb{N}\right) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \text{ abzählbar}$$

Beweis: Cantorsches Diagonalverfahren:

$$\begin{array}{llllll}
M_1: & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \ \cdots \\
M_2: & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\
M_3: & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\
M_4: & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\
\vdots & x_{51} & & & &
\end{array}$$

■

2.100 Korollar $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beweis: $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $A_n := \left\{\frac{k}{n} : k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\mathbb{Z}$ abzählbar, also auch $A_n\ \forall n \overset{2.99}{\Longrightarrow}$ Beh. ■

2.101 Satz Endliche kartesische Produkte abzählbarer Mengen sind abzählbar: $\forall N\in\mathbb{N}: \{M_i\}_{i=1}^{N}$ abzählbar $\forall i=1,\dots,N$

$\Rightarrow M_1\times\dots\times M_N$ abzählbar

Bew.: Übung!

Warnung: Abzählbar unendliche kart. Produkt dagegen nicht, siehe Satz 2.104 (falls ≥ 2 Elemente!)

2.102 Satz Sei M eine Menge. Dann $\nexists$ Surjektion

$$M \to \mathcal{P}(M).$$

<u>Beweis</u>: <u>1. Fall: $M = \emptyset$</u> $\Rightarrow \mathcal{P}(M) = \{\emptyset\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |M| = 0 \\ |\mathcal{P}(M)| = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Beh.

<u>2. Fall: $M \neq \emptyset$</u>: Annahme: $\exists$ Surjektion $\sigma: M \to \mathcal{P}(M)$

Setze $A := \{m \in M : m \notin \sigma(m)\}$, d.h. $\forall m \in M$ gilt: $m \in A \Leftrightarrow m \notin \sigma(m)$

σ surjektiv $\Rightarrow \exists x \in M : \sigma(x) = A \overset{m = x}{\Rightarrow} x \in A \Leftrightarrow m \notin A$ ↯ ■

2.103 Korollar $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist <u>überabzählbar</u>.

2.104 Satz $\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \bigtimes_{\mathbb{N}} \{0,1\} := \{(a_1, a_2, a_3, \dots) : a_n \in \{0,1\} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$
$= \{\varphi : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$

ist über<u>abzähl</u>bar

<u>Bew.</u> Sei $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, d.h. $A \subseteq \mathbb{N}$, betrachte <u>Indikatorfkt.</u> von A

$1_A \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, d.h.: $1_A : \begin{matrix} \mathbb{N} \to \{0,1\} \\ x \mapsto 1_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \end{matrix}$

$\Rightarrow \mu : \begin{matrix} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ A \mapsto 1_A \end{matrix}$ ist <u>injektiv</u> $(A_1 \neq A_2 \Rightarrow 1_{A_1} \neq 1_{A_2})$

$\Rightarrow \mu^{-1} : \begin{matrix} \mu(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ 1_A \mapsto A \end{matrix}$ ist (wohldef. &) surjektiv (*)

<u>Ann.</u>: $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ abzählbar $\Rightarrow \mu(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ abzählbar

$\Rightarrow \exists \sigma : \mathbb{N} \to \mu(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ surj. $\overset{(*)}{\Rightarrow} \mu^{-1} \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ surj.

d.h. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar ↯ Satz 2.102 ■

2.105 Korollar $\mathbb{R}$, und somit auch die <u>irrationalen</u> Zahlen $(:= \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, sind <u>überabzählbar</u>.

<u>Beweis</u>: b-adischer Darstellung (mit $b \geq 3$)

und Satz 2.104

■