## 2.7. Komplexe Zahlen

Motivation: math. Rahmen für Lösungen der Glg. $x^2+1=0$

**2.81 Definition** $\mathbb{C} := \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit den 2 Verknüpfungen

$$(x_1,y_1) \boxplus (x_2,y_2) := (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$$(x_1,y_1) \boxdot (x_2,y_2) := (x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$$

**2.82 Satz** $(\mathbb{C}, \boxplus, \boxdot)$ ist ein Körper.

Beweis: Kommutativität, Assoziativität u. Distributivität von $\boxplus$ und $\boxdot$ folgen sofort aus entsprechenden Eigenschaften von $\mathbb{R}$ (Assoz. von $\boxdot$ braucht kurze Rechnung $\leadsto$ Übung!).

| | $\boxplus$ | $\boxdot$ |
|---|---|---|
| neutrales Elem. | $(0,0)$ | $(1,0)$ |
| inverses Element zu $z:=(x,y)$ | $-z:=(-x,-y)$ | $\frac{1}{z}:=z^{-1}:=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ [für $z\neq(0,0)$] |

$\blacksquare$

2.83 Bemerkung:

$$J:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad x\mapsto(x,0)$$ ist Körperhomomorphismus

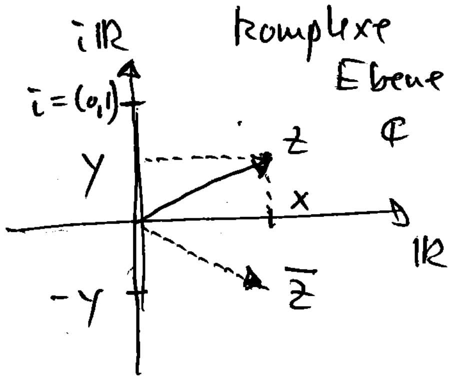
d.h. $(\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}, \boxplus, \boxdot)$ erfüllt alle Eigenschaften von $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ identifiziere $\mathbb{R}$ mit $J(\mathbb{R})$, Notation $x := (x,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, so dass $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Somit gilt unter Weglassung von $\Delta$:

$\boxed{\text{2.84 Lemma}}$ Sei $z := (x,y) \in \mathbb{C}$ und $i := (0,1) \in \mathbb{C}$.

(a) $i^2 = -1$, (b) $i^{-1} = -i$, (c) $z = x + iy$




Beweis: (a), (b) klar (nachrechnen)

(c) $z = \underset{\substack{\downarrow \\ x}}{(x,0)} \; \underset{\substack{\downarrow \\ +}}{\underline{\triangle}} \; \underset{\substack{\downarrow \\ i}}{(0,1)} \; \underset{\substack{\downarrow \\ \cdot}}{\dot{\triangle}} \; \underset{\substack{\downarrow \\ y}}{(y,0)}$

(nachrechnen) $\square$

$\boxed{\text{2.85 Definition}}$ Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist

$\bar{z} := x - iy$ komplexe Konjugation (von $z$)
(entspricht Spiegelung an x-Achse!)

$\operatorname{Re} z := x$ Realteil

$\operatorname{Im} z := y$ Imaginärteil

Klar ist (nachrechnen!)

$\boxed{\text{2.86 Lemma}}$ Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten

(a) $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

(b) $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(c) $z_1 = z_2 \iff (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2)$

(d) Falls $z \neq 0$: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$

(NB: $z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 > 0$ ((c) & $z \neq 0$))

[$\rightsquigarrow$ Standardtrick, um $\frac{1}{z}$ in Re u. Im zu zerlegen!]

**2.87. Def. u. Satz** Die Betragsabb.

$$|\cdot| : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto |z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = (z \cdot \bar{z})^{1/2} \end{array}$$

erfüllt

(B1) $|z| \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(B2) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(B3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$\Big\} \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Jargon: $\mathbb{C}$ ist bewerteter Körper (vgl. Satz 2.21)

Beweis: (B1) klar wegen Lemma 2.86 (c)

(B2) $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$

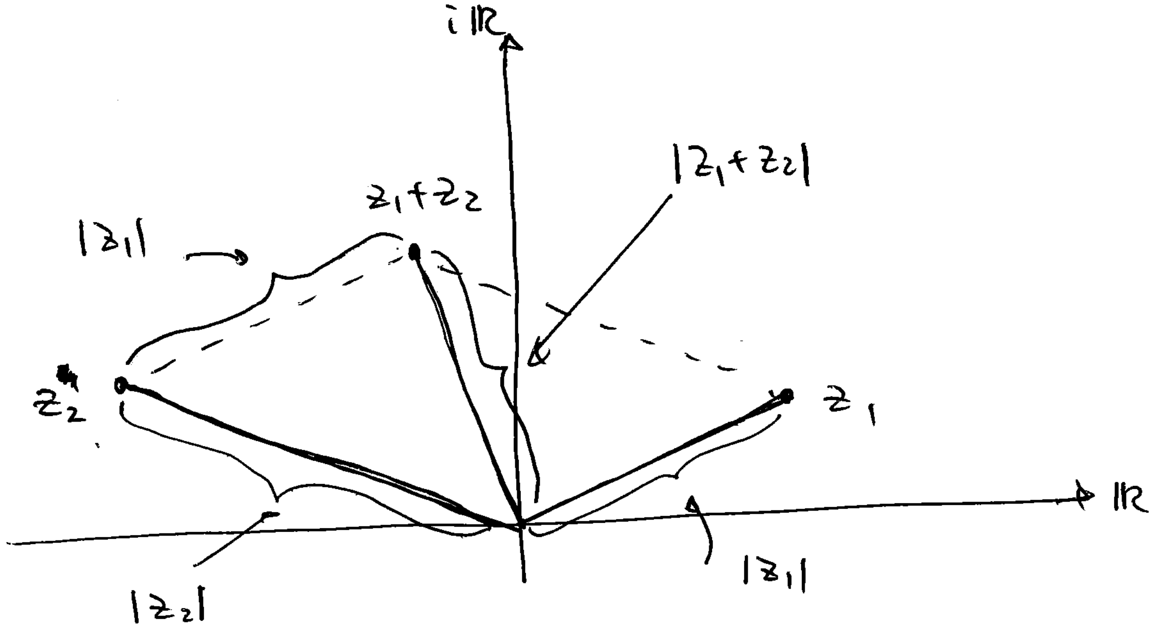
(B3) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$

Aber $\bar{z}_1 z_2 = \overline{z_1 \bar{z}_2}$, so $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$

Bem. dass $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ (und $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$) per def.

Damit
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$ ■

zu (B3): Dreieck im Parallelogramm in komplexer Ebene:

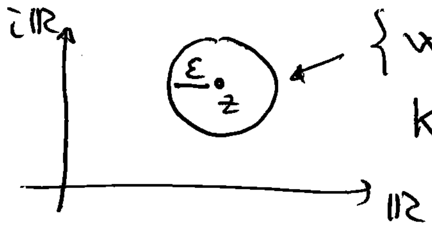


## Übertragung der Konvergenzbegriffe aus Kap. 2-5 u. 2-6

**2.88 Definition** Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ Folge und $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon>0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; |z_n - z| < \varepsilon$$

$(z_n)_n$ kgt. (in $\mathbb{C}$) gegen $z$




$\{w \in \mathbb{C} : |w-z| < \varepsilon\}$ Kreisscheibe um $z$ mit Radius $\varepsilon$

---

**2.89 Warnung!!** Es gibt keine natürliche Ordnung auf $\mathbb{C}$ (Bew.: unten)! (d.h. „$z_1 \leq z_2$" sinnlos!)

( $|z_1| \leq |z_2|$ kann sinn machen)

Deswegen können:

- bestimmte Divergenz nach $\pm\infty$
- Beschränktheit von oben / unten
- Verträglichkeit von limes & Ordnung
- isotone / antitone Folgen
- Intervallschachtelungsprinzip
- obere / untere Schranken; Supremum / Infimum, Min / Max
- lim inf, lim sup

nicht (!) verallgemeinert werden von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$!

Bew. (es gibt auf $\mathbb{C}$ kein natürliche Ordnung):

Natürliche Ordnung $\prec$ auf $\mathbb{C}$ sollte erfüllen:

(i) Verträglichkeit mit Ordnung auf $\mathbb{R}$:

$$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} : \quad r_1 < r_2 \Leftrightarrow r_1 \prec r_2$$

(ii) Trichotonie: $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt genau 1 der 3 Aussagen

$$z \prec 0 \;, \quad z = 0 \;, \quad 0 \prec z$$

(iii) Abgeschlossen bzg. + und $\cdot$ :

$$0 \prec z_1,\ 0 \prec z_2 \Rightarrow 0 \prec z_1 + z_2 \wedge 0 \prec z_1 z_2 \quad (*)$$

Da $i^2 = -1 \overset{(i)}{\Rightarrow} i^2 \prec 0$. Da $i \neq 0 \overset{(ii)}{\Rightarrow}$

$i \prec 0$ oder $0 \prec i$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$ $\lightning$ zu $(*)$ & $i^2 = -1$

$0 \prec -i$

$(-i)^2 = -1 \longrightarrow \Downarrow \lightning$ zu $(*)$

Fazit: $\nexists$ natürliche Ordnung auf $\mathbb{C}$ !

**2.90 Satz** Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ Folge. Dann gilt

$(z_n)_n$ kgt. in $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Re}\, z_n)_n$ und $(\mathrm{Im}\, z_n)_n$ kgt. in $\mathbb{R}$

Im Fall der Kgz. gilt:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n\right) + i \left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, z_n\right)$$

Bew. Sei $z_n = x_n + i y_n$ mit $x_n := \mathrm{Re}\, z_n$, $y_n := \mathrm{Im}\, z_n$

"$\Rightarrow$": $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z = x + iy \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \underbrace{|z_n - z|^2}_{= |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2} < \varepsilon^2$

"$\Leftarrow$": $x_n \to x \wedge y_n \to y \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \max(N_x, N_y) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \left(|x_n - x| < \varepsilon \wedge |y_n - y| < \varepsilon\right)$

$\Rightarrow |z_n - z| < \sqrt{2} \cdot \varepsilon$ ▨

**2.91 Korollar** Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ Folge. Dann gilt

$$z_n \xrightarrow{n\to\infty} z \iff \overline{z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \overline{z}$$

**2.92 Bemerkung**

Def. von Cauchy-Folgen und kgt'en Reihen wie gehabt (nur mit $|\cdot|$ aus Def. 2.87). Wegen Satz 2.90 und 2.93 (unten) überträgt sich alles weitere – mit Ausnahme des in Warnung 2.89 genannten!! – auf Folgen $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$

**2.93 Satz** $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ ist Cauchy-Folge (in $\mathbb{C}$)

$\iff$ $(\operatorname{Re} z_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ und $(\operatorname{Im} z_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ sind Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$

Bew.: Übung! Analog zu Satz 2.90.

**2.94 Korollar** $\mathbb{C}$ ist vollständig.

Bew.: Übung! Verwende Satz von Cauchy für $\mathbb{R}$ (Satz 2.62)

Die reelle Version von Bolzano-Weierstraß beruht auf monotonen Folgen – dennoch:

**2.95 Satz von Bolzano-Weierstraß** (Version für $\mathbb{C}$)

Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt. Dann hat $(z_n)_n$ mind. einen Häufungspunkt

Bew.: Übung! Verwende Sätze 2.90 & 2.67.