2.6 Reelle Zahlen

Ziel: Menge $\mathbb{Q}$ hat „Löcher". Vervollständige $\mathbb{Q}$ durch Hinzunahme der Löcher zu einer „kontinuierlichen Zahlengerade ohne Löcher".

Frage: Mit welchem math. Objekt kann man das Loch eindeutig beschreiben?

Antwort: Cauchy-Folge (denn Loch ist dort, wo sich die Folgenglieder verdichten)

Problem: $\exists$ versch. Cauchy-Folgen, die sich am selben Loch verdichten. Ausweg...

2.51 Definition (i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ Cauchy-Folgen

Via
$$(a_n)_n \sim (b_n)_n :\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0 \in \mathbb{Q}$$
ist eine Äquivalenzrelation auf
$$CF(\mathbb{Q}) := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} : (a_n)_n \text{ ist Cauchy-Folge}\}$$
erklärt (checken!)

(ii) Menge der reellen Zahlen
$$\mathbb{R} := CF(\mathbb{Q})/\sim \qquad (\text{Quotientmenge})$$

„$\mathbb{R}$ ist Vervollständigung von $\mathbb{Q}$"

2.52 Bemerkung (i) Vervollständigung ist sehr wichtiges Konzept in der modernen Analysis.

(ii) Da $\forall (a_n)_n \in CF(\mathbb{Q})$ und $\forall q \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = q \iff (a_n)_n \in [(q,q,q,\dots)]$$

(Beweis: Übung!), ist es üblich via

$$i: \begin{array}{l} \mathbb{Q} \longrightarrow i(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} \\ q \longmapsto [(q,q,q,\dots)] \end{array} \qquad \text{(Einbettungsabb.)}$$

$\mathbb{Q}$ selbst als Teilmenge von $\mathbb{R}$ anzusehen, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, und q statt $[(q,q,q,\dots)]$ zu schreiben.

2.53 Definition

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit Repräsentanten $(a_n)_n \in x$, $(b_n)_n \in y$, $\in CF(\mathbb{Q})$

(i) $$x + y := [(a_n + b_n)_n] \in \mathbb{R}$$
$$x \cdot y := [(a_n b_n)_n] \in \mathbb{R}$$

(ii) $$x \leq y :\iff \exists \text{ Nullfolge } (\gamma_n)_n \subseteq \mathbb{Q} : a_n \leq b_n + \underbrace{\gamma_n}_{\text{o.E.} \geq 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x < y : \iff (x \leq y \wedge x \neq y)$$
$$\iff \exists N \in \mathbb{N} \ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \ \forall n \geq N \quad a_n < q_1 < q_2 < b_n$$

Checken!
(analog $\geq, >$)

2.54 Lemma Obiges ist wohldef., d.h. unabh. von der Wahl der Repräsentanten, und

$$(a_n + b_n)_n, \ (a_n b_n)_n \in CF(\mathbb{Q}).$$

Beweis: (i) "+"

- Sei $c_n := a_n + b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ und, n. V. ($(a_n)_n \wedge (b_n)_n$ Cauchy): $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq N$: $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \quad |c_n - c_m| = |a_n - a_m + b_n - b_m| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|a_n - a_m|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b_m|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$< \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (c_n)_n \text{ Cauchy.}$$

- Seien $(\tilde{a}_n)_n \in x$, $(\hat{b}_n)_n \in y$ andere Repräsentanten

d.h. $(\tilde{a}_n - a_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ und $(\hat{\tilde{b}}_n - b_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Setze $\tilde{c}_n := \tilde{a}_n + \hat{\tilde{b}}_n \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (\underbrace{\tilde{c}_n - c_n}_{(\hat{a}_n - a_n) + (\hat{b}_n - b_n)}) \overset{\text{Satz 2.36 (i)}}{=}$

$$= \lim_{n \to \infty} (\hat{a}_n - a_n) + \lim_{n \to \infty} (\hat{b}_n - b_n) = 0 + 0 = 0 \quad ✓$$

"$\cdot$" ähnlich. (ii) siehe Übung! ∎

$\boxed{\text{2.55 Satz}}$ (i) $\mathbb{R}$ ist ein Körper mit $1 = [(1, 1, 1, \ldots)]$ und $0 = [(0, 0, 0, \ldots)]$ (vgl. 2.52 (ii))

(ii) $(\mathbb{R}, \leq)$ ist total geordnet und $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt genau 1 der 3 Aussagen: $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$.

(iii) Die Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist archimedisch (vgl. Lemma 2.19 (i))

(iv) $\mathbb{R}$ ist bewerteter Körper mit Absolutbetrag $|\cdot|: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \end{array}$

(d.h. es gilt (B1) - (B3) aus Satz 2.21)

Alle Operationen auf $\mathbb{R}$ sind verträglich mit denen auf $\mathbb{Q}$.

<u>Beweis</u> Strategie: führe auf entsprechende Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ zurück!

exemplarisch für (i) & (ii): "+" kommutativ:

$$\underbrace{x}_{[(a_n)_n]} + \underbrace{y}_{[(b_n)_n]} = [(\underbrace{a_n+b_n}_{b_n+a_n})_n] = [(b_n)_n] + [(a_n)_n] = y + x \quad \checkmark$$

da + in $\mathbb{Q}$ komm.

(iii) z.z. $\forall \varepsilon, R \in \mathbb{R}, \ \varepsilon, R > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}: R < \varepsilon n$

Sei $\varepsilon = [(\delta_n)_n]$, $R = [(q_k)_k]$

- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{Q}, \delta > 0 \ \exists K \in \mathbb{N} \ \forall k \geq K: \delta_k > \delta \ (\geq \frac{\delta}{2} > 0)$
- $(q_k)_k \in CF(\mathbb{Q}) \underset{\text{Übung!}}{\Rightarrow} (q_k)_k$ beschränkt, also $\exists q \in \mathbb{Q}: |q_k| < q \ \forall k$ (insbes. $q > 0$)

$\overset{\mathbb{Q} \text{ archim.}}{\Longrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}: q < n\delta$

$\Rightarrow q_k < q < n\delta < n\delta_k \ \forall k \geq K \iff R < n\varepsilon \quad \checkmark$

(iv) Hilfsbehauptung: $\forall (a_n)_n \in CF(\mathbb{Q})$ ist $(|a_n|)_n \in CF(\mathbb{Q})$ und

$$\underset{\text{Betrag in } \mathbb{R}}{|}\underbrace{[(a_n)_n]}_{x \in \mathbb{R}}| = [(\underset{\text{Betrag in } \mathbb{Q}}{|a_n|})_n] \qquad (*)$$

denn: • $||a_n| - |a_m|| \leq |a_n - a_m| \ \forall n, m \in \mathbb{N}$

untere Δ's-Ungl. (Üb. 1, Blatt 4)

- <u>1. Fall: $x \geq 0$</u> zu zeigen: $(a_n)_n \sim (|a_n|)_n$

da $x \geq 0$ $\exists$ Nullfolge $(\eta_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$: $0 \leq a_n + \eta_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

o.E. >0

$$\Rightarrow 0 \leq |a_n| - a_n = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \\ -2a_n, & a_n < 0 \end{cases} \leq 2\eta_n$$

$\overset{\text{Satz 2.40}}{\Longrightarrow} (|a_n| - a_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ ist Nullfolge. $\checkmark$

- <u>2. Fall: $x < 0$</u>: analog

nun zu (B1) - (B3): (B1): • $|x| \geq 0$ klar per. Def.

• $|x| = 0 \iff x = 0$ "$\Leftarrow$" klar per. Def.

"$\Rightarrow$" $0 = \underbrace{|x|}_{[(a_n)_n]} \overset{(*)}{=} [(|a_n|)_n] \Rightarrow (|a_n|)_n \sim (0,0,0,\dots)$

$$\Updownarrow$$

$(\underbrace{||a_n| - 0|}_{|a_n - 0|})_n$ ist Nullfolge

$\Rightarrow (a_n)_n \sim (0,0,0,\dots)$, d.h. $x = 0$ ✓

(B2) $|xy| = |\underbrace{[(a_n)_n] \cdot [(b_n)_n]}_{[(a_n b_n)_n]}| \overset{(*)}{=} [(\underbrace{|a_n b_n|}_{\substack{|a_n||b_n| \\ \text{(B2) in } \mathbb{Q}}})_n] = [(|a_n|)_n] \cdot [(|b_n|)_n]$

$\overset{(*)}{=} |[(a_n)_n]| \cdot |[(b_n)_n]| = |x| \cdot |y|$

(B3) $|x+y| = |\underbrace{[(a_n)_n] + [(b_n)_n]}_{[(a_n + b_n)_n]}| \overset{(*)}{=} [(\underbrace{|a_n + b_n|}_{\leq |a_n| + |b_n| \text{ (B3) in } \mathbb{Q}})_n]$

Def. von $\leq$ in $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $\leq [(|a_n|)_n] + [(|b_n|)_n] \overset{(*)}{=} |[(a_n)_n]| + |[(b_n)_n]|$

$= |x| + |y|$.

Verträglichkeit der Operationen auf $\mathbb{R}$ für Elemente aus $\mathbb{Q}$: nachprüfen mittels $q = [(q,q,q,\dots)] \in \mathbb{R}$ (Übung!) ■

2.56 Definition (i) $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ Folge $:\iff$ Abb.: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto x_n$

(ii) $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \;:\iff\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: |x_n - x| < \varepsilon$$

($<$ in $\mathbb{R}$)

2.57 Bemerkung!! Kap. 2.5 (& Kap. 2.4!) über Folgen & Reihen verwendet nicht, dass $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, nur dass $\mathbb{K}$ bewerteter, archimedisch geordneter Körper

$\Rightarrow$ alles dort gilt auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (!!)

2.58 Satz Sei $(q_n)_n \in CF(\mathbb{Q})$ und $x := [(q_n)_n] \in \mathbb{R}$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} [(q_n, q_n, q_n, \ldots)] = x$ (Kgz. in $\mathbb{R}$)

hierzu mit Notation 2.52 (ii): $\lim_{n\to\infty} q_n = x$.

Bew. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ $\overset{\mathbb{R} \text{ archim.}}{\Longrightarrow}$ $\exists k \in \mathbb{N} : 1 < \varepsilon k$

per Def. Cauchy-Folge (in $\mathbb{Q}$): $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N : |q_n - q_m| < \frac{1}{k}$

(verwendet $1/k \in \mathbb{Q}$!)

für $n \in \mathbb{N}$ sei $y_n := x - [(q_n, q_n, \ldots)]$ $(= x - q_n)$

$= [(q_m)_m] - [(q_n)_m] = [(q_m - q_n)_m]$

(*) im Bew. von Satz 2.55 (iv) $\Longrightarrow$ $|y_n| = [(|q_m - q_n|)_m]$ $\overset{\forall n \geq N}{\Longrightarrow}$ $|y_n| \leq \frac{1}{k} < \varepsilon$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ (in $\mathbb{R}$) ∎

Moral: alle Cauchy-Folgen aus $\mathbb{Q}$ konvergieren in $\mathbb{R}$
(„Löcher in $\mathbb{Q}$ gestopft")

2.59 Definition Sei $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq -n_0$

sei $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$.

b-adischer Bruch: Reihe $\pm \sum_{n=-n_0}^{\infty} a_n \frac{1}{b^n}$ $\Big\}$ $b = 10$: Dezimalbruch; $b = 2$: dyadischer Bruch

2.60 Satz Sei $(S_N)_{N \geq -n_0} \subseteq \mathbb{Q}$ Folge der Partialsummen des b-adischen Bruches aus Def. 2.59. Dann gilt: $(S_N)_{N \geq -n_0} \in CF(\mathbb{Q})$,

somit $x := [(S_N)_{N \geq -n_0}] \in \mathbb{R}$ und nach

Satz 2.58 auch $\lim_{N\to\infty} S_N = x$ (Kgz. in $\mathbb{R}$).

<u>Beweis</u>: $s_N = \pm \sum_{n=-n_0}^{N} a_n \frac{1}{b^n} \in \mathbb{Q}$ für $N \geq -n_0$

Sei $M, N \in \mathbb{N}$, $M \leq N \Rightarrow$

Δ-Ungl. u. $\left|\frac{a_n}{b}\right| \leq 1$

$$|s_N - s_M| = \left| \pm \sum_{n=M+1}^{N} a_n \frac{1}{b^n} \right| \leq \sum_{n=M+1}^{N} \frac{1}{b^{n-1}} \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{b^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{b^M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^M} \frac{1}{1-\frac{1}{b}} \leq \frac{2}{b^M} \quad (\text{da } b \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \tilde{N} \in \mathbb{N} : \frac{2}{b^{\tilde{N}}} < \varepsilon \Rightarrow |s_N - s_M| < \varepsilon \; \forall N, M \geq \tilde{N}$ ∎

$\boxed{2.61 \text{ Satz}}$ Sei $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann $\exists$ b-adischer Bruch, so dass $x = \pm \sum_{n=-n_0}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$ (Kgz. in $\mathbb{R}$)

<u>Moral</u>: Jedes $x \in \mathbb{R}$ lässt sich beliebig gut durch rationale Zahlen approximieren

- $\mathbb{R}$ ist z.B. Menge aller Dezimalbrüche ($b = 10$):

$$\pm \sum_{n=-n_0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \pm a_{-n_0} \cdots a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots$$

<u>Beweis von Satz 2.61</u>: Sei $x \in \mathbb{R}$, o.E. $x > 0$

$\mathbb{R}$ archimedisch geordnet (Satz 2.55 (ii)) und $b > 1$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : x < b^{m+1}$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ kleinste nat. Zahl, für die das wahr.

<u>Beh.</u> $\forall N \in \mathbb{Z}, N \geq -n_0, \forall n \in \{-n_0, -n_0+1, \ldots, N\}$

$\exists a_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und $\exists \xi_N \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \xi_N < b^{-N}$:

$$x = \sum_{n=-n_0}^{N} \frac{a_n}{b^n} + \xi_N$$

Aus Beh. $\Rightarrow$ Satz, da $\lim_{N \to \infty} \xi_N = 0$, also verbleibt:

<u>Bew. der Beh.:</u> per Ind. nach N

Ind. anf.: $N = -n_0$: nach Def. von n_0 gilt

$$0 \leq x b^{-n_0} < b$$

$$\Rightarrow \exists!\, a_{-n_0} \in \{0,1,\dots,b-1\} : \quad x b^{-n_0} = a_{-n_0} + \delta$$

wobei $0 \leq \delta < 1$

setze $\xi_{-n_0} := b^{n_0}\delta$, also $0 \leq \xi_{-n_0} < b^{n_0} \quad (= b^{-N})$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a_{-n_0}}{b^{-n_0}} + \xi_{-n_0} \quad \checkmark$$

Ind.schritt: $N \to N+1$: Sei $x = \sum_{n=-n_0}^{N} \frac{a_n}{b^n} + \xi_N$

mit $0 \leq \xi_N < b^{-N} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \xi_N b^{N+1} < b$

$$\Rightarrow \exists!\, a_{N+1} \in \{0,1,\dots,b-1\} : \quad \xi_N b^{N+1} = a_{N+1} + \tilde{\delta}$$

wobei $0 \leq \tilde{\delta} < 1$

Setze $\xi_{N+1} := \tilde{\delta} b^{-(N+1)} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \xi_{N+1} < b^{-(N+1)}$

und
$$x = \sum_{n=-n_0}^{N} \frac{a_n}{b^n} + \underbrace{\xi_N}_{= \frac{a_{N+1}}{b^{N+1}} + \xi_{N+1}} = \sum_{n=-n_0}^{N+1} \frac{a_n}{b^n} + \xi_{N+1} \quad \checkmark$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{2.62 Satz}}$ (Cauchy)

$\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert (in $\mathbb{R}$).

- Rechtfertigt $\mathbb{R}$ als „Vervollständigung" von $\mathbb{Q}$ zu nennen (Def. 2.51(ii))
- einziger Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$

Beweis von Satz 2.62. Sei $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ Cauchy bel. fest.

1. Akt: Konstruktion von $(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ als Kandidat für Grenzwert x

$x_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\ (\tau_k^{(n)})_k \in CF(\mathbb{Q})$ mit $x_n = [(\tau_k^{(n)})_k]$

$$\overset{\text{Satz 2.58}}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} \tau_k^{(n)} = x_n\ \forall n \quad (0)$$

o.E. gelte $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N} \quad |\tau_{k_1}^{(n)} - \tau_{k_2}^{(n)}| < \frac{1}{n} \quad (1)$

(geht immer für k_1, k_2 groß genug, da $(\tau_k^{(n)})_k$ Cauchy; streiche Anfangsglieder weg $\Rightarrow$ gültig $\forall k_1, k_2$)

setze $q_n := \tau_n^{(n)}\ \forall n \in \mathbb{N}$: Diagonalfolge $(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$

2. Akt: $(q_n)_n \in CF(\mathbb{Q})$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$. $(x_n)_n$ Cauchy $\Rightarrow \exists\ \tilde{N} \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq \tilde{N}: |x_m - x_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\forall k \in \mathbb{N}$: $\forall m, n > N := \max(\tilde{N}, 1/\varepsilon)$ gilt

$$|q_m - q_n| = |\tau_m^{(m)} - \tau_k^{(m)} + \tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)} + \tau_k^{(n)} - \tau_n^{(n)}|$$

$$\overset{(1)}{<} \frac{1}{m} + |\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)}| + \frac{1}{n}$$

$$< 2\varepsilon + |\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)}| \quad (2)$$

Da $\quad x_m - x_n = [(\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)})_k]$ und

$$|x_m - x_n| = [(|\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)}|)_k] < \varepsilon \quad (\forall m, n \geq \tilde{N})$$

folgt: $\exists K \in \mathbb{N}\ \forall k \geq K: \quad |\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)}| < \varepsilon \quad (\text{"})$

Wähle $k \geq K$ in (2), dann:

$$\forall m, n \geq N: \quad |q_m - q_n| < 3\varepsilon \quad \checkmark$$

3. Akt: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in $\mathbb{R}$

wobei $x := [(q_n)_n] \in \mathbb{R}$ (3)

Aus (0) $\wedge$ (1) mit $k_1 = n$ und $k_2 \to +\infty$: $|q_n - x_n| \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |q_n - x_n| = 0$ (in $\mathbb{R}$) (4)

(3) $\underset{\text{Satz 2-58}}{\Rightarrow}$ $\lim_{n\to\infty} |q_n - x| = 0$ (in $\mathbb{R}$) (5)

(NB: $\lim_{n\to\infty} q_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |q_n - x| = 0$)

Aber:

$$0 \leq |x_n - x| \leq |x_n - q_n| + |q_n - x|$$

$\overset{(5),(4)}{\Longrightarrow}$ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ∎

Ab jetzt:
- wird nicht mehr benötigt, dass $\mathbb{R} \ni x = [(q_n)_n]$ (!!)
- „$\varepsilon > 0$" abkürzend für $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

2.63 Definition Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Fkt.

f (monoton) $\left\{\begin{array}{l}\text{wachsend [auch: isoton]} \\ \text{fallend [auch: antiton]}\end{array}\right\} :\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2$: $f(x_1) \underset{\geq}{\leq} f(x_2)$

f streng/strikt (monoton) wachsend [auch: strikt isoton] / fallend [auch: strikt antiton]

$:\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2: \\ f(x_1) \underset{>}{<} f(x_2)\end{array}\right.$

[$D = \mathbb{N} \rightsquigarrow$ (reelle) Folgen]

2-64 Satz Sei $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ isoton. Dann gilt

$$(x_n)_n \text{ kgt.} \iff (x_n)_n \text{ von oben beschränkt}$$

Analog: für antiton und von unten beschränkt!

Schreibweise: $x_n \nearrow x$ bzw. $x_n \searrow x$

Beweis: "$\Rightarrow$" Satz 2-34

"$\Leftarrow$" Sei $x_n \leq S \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad (\Delta)$

Ann: $(x_n)_n$ divergent

(Satz 2.62) $\Rightarrow$ keine Cauchy-Folge, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists m, n \geq N : |x_m - x_n| \geq \varepsilon \qquad (*)$$

o.E. sei $m > n \Rightarrow x_m - x_n \geq \varepsilon$

$\mathbb{R}$ archim. $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N}: \ S - x_1 < K\varepsilon \qquad (**)$

nun wähle $N_1 := 1$ in $(*)$ $\Rightarrow \exists m_1 > n_1 \in \mathbb{N}: \ x_{m_1} - x_{n_1} \geq \varepsilon$

" $N_2 := \max(m_1, n_1) \Rightarrow \exists m_2 > n_2 \geq N_2: \ x_{m_2} - x_{n_2} \geq \varepsilon$

$\vdots$

" $N_K := \max(m_{K-1}, n_{K-1}) \Rightarrow \exists m_K > n_K \geq N_K: \ x_{m_K} - x_{n_K} \geq \varepsilon \qquad (***)$

$$\Rightarrow x_{m_K} - x_{n_1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{K} (x_{m_k} - x_{n_k})}_{\geq \varepsilon \ (***)} + \underbrace{\sum_{k=2}^{K} (x_{n_k} - x_{m_{k-1}})}_{\geq 0} \quad \text{isoton } (n_k \geq m_{k-1})$$

$$\geq K \cdot \varepsilon \overset{(**)}{>} S - x_1$$

$$\Rightarrow x_{m_K} > S + \underbrace{x_{n_1} - x_1}_{\geq 0 \text{ (isoton)}} \geq S \quad \lightning \ (\text{zur } (\Delta))$$

$\blacksquare$

2.65 Definition Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ Folge

(i) Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ strikt isotone Folge. ($\Rightarrow n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$)

Dann heißt $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} := (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ Teilfolge von $(x_n)_n$

(ii) $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt (oder -wert) von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

$:\Leftrightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$: $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

2.66 Beispiel alternierende Folge $x_n = (-1)^n$

$n_k = 2k \Rightarrow$ Teilfolge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (\underbrace{(-1)^{2k}}_{1})_{k\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow 1$ ist Häufungspunkt von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Analog ($n_k = 2k-1$) ist -1 Häufungspkt von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

2.67 Satz von Bolzano-Weierstraß (Version für $\mathbb{R}$)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte Folge. Dann gilt:

$(x_n)_n$ besitzt konvergente (da monotone) Teilfolge.

Mit anderen Worten: jede beschränkte Folge besitzt mind. einen Häufungspunkt.

Beweis: $m \in \mathbb{N}$ Gipfelstelle von $(x_n)_n :\Leftrightarrow x_m > x_n \ \forall n > m$

1. Fall: $(x_n)_n$ hat ∞-viele Gipfelstellen

$m_1 < m_2 < m_3 < \dots$

$\Rightarrow \quad x_{m_1} > x_{m_2} > x_{m_3} > \dots$, d.h. $(x_{m_k})_k$

ist antitone Teilfolge.

2. Fall: $(x_n)_n$ hat keine oder nur endlich viele Gipfelstellen

Sei $n_1 >$ größte Gipfelstelle (also n_1 ist keine Gipfelstelle!)

$\Rightarrow \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \geq x_{n_1}$ (gäbe es kein solches n_2, wäre n_1 Gipfelstelle)

n_2 keine Gipfelstelle $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : x_{n_3} \geq x_{n_2}$

$\vdots$

d.h. $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist isotone Teilfolge ∎

2.68 Definition Intervalle: für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sei

eigentlich:
$$[a,b] := \{x\in\mathbb{R} : a \leq x \leq b\},\quad [a,b[:= \{x\in\mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$]a,b] := \{x\in\mathbb{R} : a < x \leq b\},\quad]a,b[:= \{x\in\mathbb{R} : a < x < b\}$$

uneigentlich:
$$[a,\infty[:= \{x\in\mathbb{R} : x \geq a\},\quad]-\infty,a] := \{x\in\mathbb{R} : x \leq a\}$$
$$]a,\infty[:= \{x\in\mathbb{R} : x > a\},\quad]-\infty,a[:= \{x\in\mathbb{R} : x < a\}$$

2.69 Satz Intervallschachtelungsprinzip

$\forall k\in\mathbb{N}$ seien $a_k, b_k \in\mathbb{R}$ mit $a_k < b_k$ und $J_k := [a_k, b_k]$

Es gelte
- $J_{k+1} \subseteq J_k \quad \forall k\in\mathbb{N}$
- $\lim_{k\to\infty} \underbrace{|J_k|}_{:= b_k - a_k} = 0$

} Intervallschachtelung

Dann $\exists!\, x\in\mathbb{R}$ mit $x\in J_k \;\forall k\in\mathbb{N}$. Für dieses x gilt: $a_k \nearrow x$ und $b_k \searrow x$.

Beweis $\forall l, k \in \mathbb{N}$ gilt: $\quad a_k \leq b_l \quad (*)$ [sonst wäre $J_k \cap J_l = \emptyset$!]

Da

- $(a_k)_k$ isoton und $(*)$

$$\overset{\text{Satz 2.64}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, a \in \mathbb{R} \; : \; \lim_{k\to\infty} a_k = a$$

- $(b_k)_k$ antiton und $(*)$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, b \in \mathbb{R} \; : \; \lim_{k\to\infty} b_k = b$$

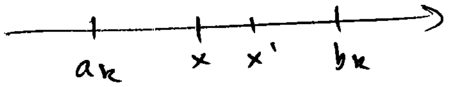
Satz 2.36

$$\Longrightarrow \quad a - b = \lim_{k\to\infty} (a_k - b_k) = 0, \qquad x := a = b$$

$$\left.\begin{array}{lll} l \to \infty \text{ in } (*) & \Longrightarrow & a_k \leq x \quad \forall k \\ k \to \infty \text{ in } (*) & \Longrightarrow & x \leq b_l \quad \forall l \end{array}\right\} \; x \in J_k \;\; \forall k$$

Eindeutigkeit: es gelte $x, x' \in J_k \;\forall k \Longrightarrow$

$$|x - x'| \leq b_k - a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x' \quad \blacksquare$$



Zum Schluss 2 Anwendungen der Konvergenzsätze:

2.70 Satz Wurzel

Sei $x \in \mathbb{R}_> :=]0, \infty[$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann

$\exists!\, r \in \mathbb{R}_>$, so dass $\quad r^k = x$.

Schreibweise: $\quad r =: \sqrt[k]{x} =: x^{1/k} \quad$ k'te Wurzel aus x

Beweis: (Verallg. des babylon. Wurzelziehens aus Satz 2.50)

Def. Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_>$ mittels $r_1 := 1$ (Wert $\in \mathbb{R}_>$ spielt keine Rolle!)

$$r_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)\, r_n + \frac{x}{r_n^{k-1}} \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Zeige (i) $(r_n)_n$ kgt.

- $r_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Bew. mit Induktion!)

  $\Rightarrow (r_n)_n$ nach unten beschränkt

- antiton, da $\forall n \in \mathbb{N}$

$$r_{n+1} = r_n \left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{x}{r_n^k} - 1\right)\right) =: r_n A_n$$

Bernoulli-Ungl. (Auf. 1(ii) Ü. Blatt 4) für A_n^k $\Rightarrow$ $r_{n+1}^k \geq r_n^k \left(1 + k \cdot \frac{1}{k}\left(\frac{x}{r_n^k} - 1\right)\right) = x$

$\Rightarrow \forall n \geq 2: \quad 0 \leq A_n \leq 1 \qquad \left(\text{da } \frac{x}{r_{n+1}^k} \leq 1\right)$

$\Rightarrow (r_n)_{n \geq 2}$ antiton $\overset{\text{Satz 2.64}}{\Rightarrow}$ Kgz.

(ii) $\left(\lim\limits_{n \to \infty} r_n\right)^k = x$

Sei $r := \lim\limits_{n \to \infty} r_n \in \mathbb{R}_{\geq} := [0, \infty[$ — $r \geq 0$ wegen $r_n > 0 \; \forall n$

Rekursion $\Rightarrow$ $r_{n+1} r_n^{k-1} = \frac{1}{k}\left((k-1) r_n^k + x\right)$

(Satz 2.36)

$\overset{n \to \infty}{\Rightarrow}$ $r \; r^{k-1} = \frac{1}{k}\left((k-1) r^k + x\right)$

$\Rightarrow$ $r^k = x \Rightarrow r \in \mathbb{R}_{>}$ (sonst $x = 0$)

(iii) Eindeutigkeit:

für $r < r' \Rightarrow r^k < (r')^k$ ☒

2.71 Definition Rationale Potenzen

Sei $x \in \mathbb{R}_>$, $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$x^q := \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m \in \mathbb{R}_> \quad (\text{insbes.: } x^0 = 1)$$

außerdem $0^q := \begin{cases} 0, & q \in \mathbb{Q}_> \\ 1, & q = 0 \end{cases}$ (nicht def. für neg. Expon)

2.72 Satz (i) obiges ist wohldef., d.h. unabh. von Darstellung $q = \frac{m}{n} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}_>$, $\forall q, r \in \mathbb{Q}$:

$$(xy)^q = x^q y^q, \quad x^q x^r = x^{q+r}, \quad (x^q)^r = x^{q \cdot r}$$

Beweis: Übung.

2.73 Definition Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

- ε-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$: $\mathcal{U}_\varepsilon(a) := \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, \subseteq \mathbb{R}$
- $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungspkt von A
  $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ enthält $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ ∞-viele Punkte von A
- A von oben beschränkt $:\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}: x \leq s \quad \forall x \in A$
  A von unten " : " $x \geq s$ "

s heißt obere (bzw untere) Schranke von A

A beschränkt $:\Leftrightarrow$ A von oben und unten beschränkt.

2.74 Bemerkungen & Beispiele

(i) genau jedes $a \in [0,1]$ ist Häufungspkt. von $]0;1[$ (auch von $[0,1]$)

(ii) jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspkt. von $\mathbb{Q}$
(z. B. b-adische Bruchapprox. !)

(iii) 0 ist Häufungspkt. von $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(iv) A beschränkt $\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} : \forall x \in A : |x| \leq s$

(v) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt $\Leftrightarrow \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt

2.75 Definition Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $S, I \in \mathbb{R}$

- S Supremum von A (kleinste obere Schranke) $:\Leftrightarrow$
  - S obere Schranke von A
  - $\forall$ obere Schranken S' von A gilt: $S \leq S'$

- I Infimum von A (größte untere Schranke) $:\Leftrightarrow$
  - I untere Schranke von A
  - $\forall$ untere Schranken I' von A gilt: $I' \leq I$

Schreibweise: $S = \sup A$, $I = \inf A$

- S Maximum von A, $S = \max A$ $:\Leftrightarrow S = \sup A \wedge \underline{S \in A}$

- I Minimum von A, $I = \min A$ $:\Leftrightarrow I = \inf A \wedge \underline{I \in A}$

$\boxed{2.76 \text{ Satz}}$ Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Mit den Vereinbarungen

- $\sup A := -\infty$, $\inf A := +\infty$, falls $A = \emptyset$
- $\sup A := +\infty$, falls $A\ (\neq \emptyset)$ nicht von oben beschränkt
- $\inf A := -\infty$, falls $A\ (\neq \emptyset)$ nicht von unten "

gilt: A besitzt genau ein Supremum und Infimum in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Außer in den o.g. Fällen gilt: $\sup A, \inf A \in \mathbb{R}$

Beweis: für sup und $A \neq \emptyset$ von oben beschränkt (inf analog),

Sei $s_1 \in \mathbb{R}$ obere Schranke von A und $x_1 \in A$. (o.E. $x_1 < s_1$)

1. Akt: $\exists$ Intervalle $[x_1, s_1] \supseteq [x_2, s_2] \supseteq [x_3, s_3] \supseteq \ldots$

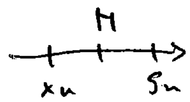
so dass $\forall n \in \mathbb{N}$: (a) $x_n \in A$

(b) s_n ist obere Schranke von A

(c) $s_n - x_n \leq 2^{-(n-1)}(s_1 - x_1)$

per Induktion: $n = 1$ klar

$n \to n+1$: Setze $M := \frac{1}{2}(x_n + s_n)$



1. Fall: $A \cap]M, s_n] = \emptyset \Rightarrow M$ ist obere Schranke und $x_{n+1} := x_n$, $s_{n+1} := M$ erfüllen (a) - (c)

2. Fall: $A \cap]M, s_n] \neq \emptyset \Rightarrow$ wähle $x_{n+1} \in A \cap]M, s_n]$, $s_{n+1} := s_n \Rightarrow$ (a) - (c) erfüllt ✓

Somit $(s_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ antiton & von unten beschr.

$\overset{\text{Satz 2.64}}{\Rightarrow}$ $s := \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$ existiert

2. Akt: S ist Supremum von A

- Sei $x \in A$ bel. fest $\Rightarrow x \le s_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

  $\Rightarrow x \le \lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$

  $\Rightarrow S$ obere Schranke von A.
- Sei S' obere Schranke von A. Ann.: $S' < S$

  $\Leftrightarrow 0 < S - S'$

  $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$:
  $$2^{-(n-1)}(s_1 - x_1) < S - S'$$
  $$s_n - x_n \le 2^{-(n-1)}(s_1 - x_1) < S - S' \le s_n - S' \quad \Leftarrow (s_n)_n \text{ antiton}$$

  $\Rightarrow S' < x_n$ ↯ da $x_n \in A$ und S' obere Schranke

  also $S \le S'$

  $\Rightarrow S$ Supremum (notw. eindeutig!) ☒

2.77 Beispiel: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

- $\sup\, [a,b] = \sup\, [a,b[\; = b$

  $\inf\, [a,b] = \inf\,]a,b] = a$
- $a = \min\, [a,b]$, $b = \max\, [a,b]$

  $[a,b[$ hat kein Max., $]a,b]$ kein Min.
- $\sup \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1$

2.78 Definition Sei $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$; $y_n^{\overset{+}{(-)}} := \underset{(\inf)}{\sup}\{x_k \in \mathbb{R} : k \geq n\}$

[NB: $(y_n^{\overset{+}{(-)}})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ist antiton (isoton)!]

Limes superior von $(x_n)_n$: $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n := \lim\limits_{n\to\infty} y_n^+$

Limes inferior von $(x_n)_n$: $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n := \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n := \lim\limits_{n\to\infty} y_n^-$

falls $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^{\overset{+}{(-)}}$ existiert; sonst, d.h. falls

- $(y_n^{\overset{+}{(-)}})_n = (\overset{+}{(-)}\infty, \overset{+}{(-)}\infty, \ldots)$, setze $\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\inf}{\sup}\, x_n := \overset{+}{(-)}\infty$
- $(y_n^{\overset{+}{(-)}})_n$ hat best. Divergenz nach $\mp\infty$, setze $\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\inf}{\sup}\, x_n := \overset{-}{(+)}\infty$

Fazit: $\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\inf}{\sup}\, x_n$ existiert stets in $\overline{\mathbb{R}}$!

2.79 Satz Sei $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt. Setze

$H := \{h \in \mathbb{R} : h \text{ ist Häufungspkt. von } (x_n)_n\}$

(somit $H \neq \emptyset$, $H \subseteq \mathbb{R}$, da $(x_n)_n$ beschränkt). Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \max H \quad (\text{größter Häufungspkt.})$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \min H \quad (\text{kleinster} \quad \text{"} \quad)$$

Beweis: (nur für lim sup; lim inf analog)

1. Akt: H besitzt max.

Sei $S := \sup H < \infty$ (da $(x_n)_n$ beschr.) und $\varepsilon > 0$ bel.

$\Rightarrow \exists h \in H : S - \varepsilon < h \leq S$ (denn andernfalls wäre $S-\varepsilon$ obere Schranke ↯) !!

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \mathcal{U}_\delta(h) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(S)$; h Häufungspkt von $(x_n)_n$

$\Rightarrow \exists\, \infty$-viele $n \in \mathbb{N}$: $x_n \in \mathcal{U}_\delta(h) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(S)$;

insbes. für $\varepsilon := \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$, $\exists n_j \in \mathbb{N}$:

$$|x_{n_j} - s| < \frac{1}{j} \quad \text{und} \quad n_{j+1} > n_j \quad \forall j$$

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = S \Rightarrow S \in H \text{ und } S = \max H \checkmark$$

2. Akt: $\quad \sigma := \limsup x_n = S$

- da $S \in H \Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$: $x_{n_j} \xrightarrow{j\to\infty} S$

$$\Rightarrow y_n^+ \geq \sup\{x_{n_j} \in \mathbb{R} : j \in \mathbb{N} \text{ mit } n_j \geq n\} \overset{(!)}{\geq} S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma \geq S}$$

- Ann.: $\sigma > S \Rightarrow \exists \delta > 0 : \sigma > S + \delta$

$$\Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N_0 : y_n^+ > S + \delta$$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(l_k)_k \subseteq \mathbb{N}$, $l_k \geq N_0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ mit

$$x_{l_k} > S + \delta.$$

Wegen $(x_n)_n$ beschränkt $\overset{\text{Bolzano-W}}{\Rightarrow}$ $(x_{l_k})_k$ hat Häufungspkt. $\hat{h} \geq S+\delta \Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{l_{k_m}})_m$ mit $\lim_{m\to\infty} x_{l_{k_m}} = \hat{h} \Rightarrow \hat{h}$ ist Häufungspkt. von $(x_n)_n$ $\lightning$ da $\hat{h} \geq S + \delta > S = \sup H$

$$\Rightarrow \underline{\sigma \leq S} \quad \blacksquare$$

2.80 Beispiel

$$\limsup_{n\to\infty} n^{(-1)^n} = +\infty,$$

$$\liminf_{n\to\infty} n^{(-1)^n} = 0$$