2.3 Rationale Zahlen

Nur die Strategie wird vorgestellt – wie in Kap. 2.2!

Idee: jede rat. Zahl ist Bruch „$\frac{a}{b}$" mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.

Probleme: • Division noch nicht def.
• nicht eindeutige Darstellung „$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$" $\Leftrightarrow 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$

2.16 Satz (i) Für $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, def.

$$(a,b) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} (c,d) :\Leftrightarrow ad = bc$$

eine Äquiv.rel. auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ mit Äquiv.klassen

$$[(a,b)] := \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (c,d) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} (a,b)\}$$

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} := \{[(a,b)] : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$

(ii) Addition $[(a_1, b_1)] \boxed{+} [(a_2, b_2)] := [(a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2)]$ und

Multiplikation $[(a_1, b_1)] \boxed{\cdot} [(a_2, b_2)] := [(a_1 a_2, b_1 b_2)]$

sind wohldefiniert.

(iii) $\boxed{+}$ und $\boxed{\cdot}$ sind kommutativ, assoziativ und distributiv

(iv) $[(0,1)] \in \mathbb{Q}$ ist neutrales Element von $\boxed{+}$,

$[(-a,b)] \in \mathbb{Q}$ ist inverses Element von

$[(a,b)] \in \mathbb{Q}$ bzgl. $\boxed{+}$

(v) $[(1,1)]$ ist neutrales Element von $\mathbb{Q}$ bzgl. $\boxed{\cdot}$ und $\forall [(a,b)] \in \mathbb{Q} \setminus \{[(0,1)]\}$ ist $[(b,a)] \in \mathbb{Q} \setminus \{[(0,1)]\}$ inverses Element bzgl. $\boxed{\cdot}$.

Zusammenfassung (i) - (v): $\mathbb{Q}$ ist Körper (vgl. Lin. Alg.)

(vi) $(\mathbb{Q}, \boxed{\leq})$ ist angeordneter Körper, wobei

$$[(a_1,b_1)] \boxed{\leq} [(a_2,b_2)] :\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 \; (:= \mathbb{N} \cup \{0\}),\; n \in \mathbb{N}:$$
$$[(a_2,b_2)] = [(a_1,b_1)] \boxed{+} [(m,n)]$$

Die Ordnung ist verträglich mit der auf $\mathbb{Z}$ (Def. von $\boxed{<}$, $\boxed{>}$, $\boxed{\geq}$ wie in Def. 2.6)

2.17 Definition • Für $[(a_1,b_1)], [(a_2,b_2)] \in \mathbb{Q}$:

$$[(a_1,b_1)] \boxed{-} [(a_2,b_2)] := [(a_1,b_1)] \boxed{+} [(-a_2,b_2)] \in \mathbb{Q}$$

• Für $[(a_1,b_1)] \in \mathbb{Q}$, $[(a_2,b_2)] \in \mathbb{Q} \setminus \{[(0,1)]\}$:

$$\frac{[(a_1,b_1)]}{[(a_2,b_2)]} := [(a_1,b_1)] \boxed{\cdot} [(b_2,a_2)] \in \mathbb{Q}$$

• für $z \in \mathbb{Z}$ sei $z := [(z,1)] \in \mathbb{Q}$

2.18 Satz Unter Weglassung aller „$\square$" (ab sofort!) gilt

$$\frac{a}{b} = [(a,b)] \quad \forall a \in \mathbb{Z},\; \forall b \in \mathbb{Z}^*,$$ sowie

alle bekannten Rechenregeln für

$$+, -, \cdot, /, \leq, <, >, \geq \;!$$

2.19 Lemma

(i) Die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ ist Archimedisch, d.h.

$$\forall q, r \in \mathbb{Q},\ q, r > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } q < nr$$

(ii) Dichte: $\forall q, r \in \mathbb{Q}$ mit $q < r$ $\exists s \in \mathbb{Q}: q < s < r$

Beweis:

(i) Schreibe $q = \frac{a}{g}$, $r = \frac{b}{g}$ mit $a, b, g \in \mathbb{N}$ (gem. Nenner)

$\Rightarrow$ Beh. ($\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}: \quad a < nb$)

wahr: wähle $n = a+1$

(ii) Klar. wähle $s := \frac{q+r}{2} \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \quad \bullet \quad s = q + \underbrace{\frac{r-q}{2}}_{>0} \Rightarrow s > q$$

$$\bullet \quad r = s + \underbrace{\frac{r-q}{2}}_{>0} \Rightarrow r > s \qquad \blacksquare$$

2.20 Definition • Sei $q \in \mathbb{Q}$

(Absolut-) Betrag $\quad |q| := \begin{cases} q, & q \geq 0 \\ -q, & q < 0 \end{cases}$

• Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$.

$$\min(q_1, q_2) := \begin{cases} q_1, & q_1 \leq q_2 \\ q_2, & q_2 \leq q_1 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \max(q_1, q_2) = \begin{cases} q_1, & q_1 \geq q_2 \\ q_2, & q_2 \geq q_1 \end{cases}$$

Somit $|q| = \max(q, -q) \geq 0$.

$\boxed{2.21 \text{ Satz}}$ Für $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ gilt

(B1) $\forall q \in \mathbb{K}$ ist $|q| \geq 0$ und
$|q| = 0 \Leftrightarrow q = 0$

(B2) $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{K}: \quad |q_1 q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$

(B3) $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{K}: \quad |q_1 + q_2| \leq |q_1| + |q_2|$
(Dreiecks-Ungl.)

} $\mathbb{Q}$ ist <u>bewerteter</u> <u>Körper</u>

<u>Beweis:</u> • (B1) aus Def. von $|q|$ klar!

• (B2) Sei $q_j = s_j r_j$ $(j = 1,2)$ mit $r_j \geq 0$ und $s_j \in \{+1, -1\}$

$$\Rightarrow |q_1 q_2| = |s_1 s_2 r_1 r_2| = \underbrace{\underbrace{|s_1 s_2|}_{\in \{\pm 1\}}}_{1} \underbrace{r_1}_{|s_1 r_1|} \underbrace{r_2}_{|s_2 r_2|} = |q_1| \cdot |q_2| \quad \checkmark$$

• (B3) da $q_1 \leq |q_1| \wedge q_2 \leq |q_2|$

$$\Rightarrow q_1 + q_2 \leq |q_1| + |q_2| \qquad (1)$$

andererseits: $-q_1 \leq |q_1| \wedge -q_2 \leq |q_2|$

$$\Rightarrow -(q_1 + q_2) \leq |q_1| + |q_2| \qquad (2)$$

$$\overset{(1) \wedge (2)}{\Longrightarrow} \max\left(q_1 + q_2, -(q_1 + q_2)\right) \leq |q_1| + |q_2|$$

$\boxtimes$

$\mathbb{Q}$ ist aber leider nicht groß genug:

$\boxed{2.22 \text{ Satz}}$ $\nexists\, c \in \mathbb{Q}$ mit $c^2 = 2$

Beweis: Wir brauchen: Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade $(:\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0: n = 2k+1)$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad n^2 = \underbrace{\underbrace{(n-1)}_{\text{gerade}} \cdot n}_{\text{gerade}} + \underbrace{n}_{\text{ungerade}} \quad \text{ist ungerade}$$

$(n \in \mathbb{N}$ gerade $:\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = 2k)$

Annahme: $\exists c \in \mathbb{Q}: \quad c^2 = 2$; ohne Einschränkung (o.E.) sei $c > 0$

($c = 0$ nicht möglich; falls $c < 0$ wäre, gilt auch für $\tilde{c} := -c > 0$ dass $\tilde{c}^2 = 2$)

$\Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{N}$, p und q teilerfremd: $c = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow 2 = c^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$ gerade

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ p gerade, also $p = 2\tilde{p}$ mit $\tilde{p} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow q^2 = 2\tilde{p}^2$ gerade $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ q gerade

$\Rightarrow p, q$ nicht teilerfremd $\lightning$ $\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$