1.2 Mengen, Relationen, Funktionen

1.8. „Naives Axiom" von Cantor (1845-1918) Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen
(Reihenfolge irrelevant!)

1.9 Definition

(i) Element sein: Objekt x liegt in Menge M $:\Leftrightarrow$ $x \in M$
(oder $M \ni x$)

$$x \notin M :\Leftrightarrow \neg(x \in M)$$

(ii) Teilmenge: Seien M, M' Mengen

$$M' \subseteq M \quad :\Leftrightarrow \forall x \in M' : x \in M$$

(oder $M \supseteq M'$) „für alle" „gilt" bzw. „so dass"

(„für alle x aus M' gilt, dass x Element von M ist")

echte Teilmenge: $M' \subset M :\Leftrightarrow (M' \subseteq M \wedge \exists x \in M : x \notin M')$

„es existiert"

[auch gebräuchlich: $\subset$: Teilmenge
$\subsetneq$: echte Teilmenge]

(iii) Gleichheit von Mengen M, M':

$$M = M' \quad :\Leftrightarrow (M \subseteq M' \wedge M' \subseteq M)$$

d.h. jedes Element von M liegt auch in M' und umgekehrt, d.h. M und M bestehen aus denselben Elementen.

$$M \neq M' :\Leftrightarrow \neg(M = M')$$

(iv) 2 Elemente $x, x' \in M$ sind gleich, $x = x'$, falls sie ununterscheidbar sind. $x \neq x' :\Leftrightarrow \neg(x = x')$

Schreibweisen für Mengen anhand von

1.10 Beispiel

- $L :=$ (Menge der) lat. Buchst. $= \{a, b, \dots, z, A, \dots, Z\}$ „aufzählend"

  def. Gleichheit

- (Menge der) lat. Buchstaben im Wort „Mathematik" $= \{a, M, t, h, e, m, i, k\}$

  $= \{x \in L : A(x)\} \subset L$

  „mit der Eigenschaft, dass die nachfolgende Aussage wahr ist"

  $A(x) :\Longleftrightarrow$ Buchstabe x kommt in „Mathematik" vor

[auch üblich: „$|$" statt „$:$"]

1.11 Definition

- Leere Menge: $\emptyset :=$ Menge ohne Element.
- Seien M, N Mengen
- Schnitt: $M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$
- Vereinigung: $M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$
- Differenz: $M \setminus N := \{x \in M : x \notin N\} =: N^c$

  Komplement von N in M.

- <u>kartesisches Produkt</u>

$$M \times N := \{ (m,n) : m \in M \wedge n \in N \}$$

geordnetes Paar
(Reihenfolge!)

(also, falls $M \neq N$:
$M \times N \neq N \times M$)

- <u>Potenzmenge</u> von M: $\mathcal{P}(M) := \{ L \text{ ist Menge} : L \subseteq M \}$
(auch: 2^M)

1.12 Beispiele

(i) $\forall$ Mengen M gilt: $\emptyset \subseteq M$
da Aussage $\forall x \in \emptyset : x \in M$ stets wahr (Widerspruchsbw.)

(ii) $\forall$ Mengen M gilt: $\emptyset \neq \mathcal{P}(M) \overset{(i)}{\supseteq} \{\emptyset, M\}$

(iii) $\{a,b,c\} \times \{a,d\} = \{(a,a),(a,d),(b,a),(b,d),(c,a),(c,d)\}$

1.13 Lemma Rechenregeln für $\cup$ und $\cap$

Seien L, M, N Mengen

(i) <u>Kommutativität</u>: $M \cap N = N \cap M$; $M \cup N = N \cup M$

(ii) <u>Assoziativität</u>: $L \cap (M \cap N) = (L \cap M) \cap N =: L \cap M \cap N$
$L \cup (M \cup N) = (L \cup M) \cup N =: L \cup M \cup N$

(iii) Idempotenz: $M \cap M = M = M \cup M$

(iv) Distributivität: $L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N)$

$$L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$$

(v) de Morgan-Regeln: Seien $L, N \subseteq M$. Dann gilt

$$(L \cap N)^c = L^c \cup N^c$$
$$(L \cup N)^c = L^c \cap N^c$$

Beweis: Aus den entsprechenden Regeln für $\vee, \wedge, \neg$

Bsp. 1. de Morgan:

$$(L \cap N)^c = \{ x \in M : \underbrace{\neg (x \in L \cap N)}$$
$$\Updownarrow$$
$$\neg (x \in L \wedge x \in N)$$
$$(!) \Updownarrow$$
$$x \notin L \vee x \notin N$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in L^c \vee x \in N^c \}$$

$$= L^c \cup N^c.$$

Rest: Übung! ∎

1.14 Bemerkung: Probleme des naiven Def. einer Menge. Bsp. Russellsche Antinomie (ca. 1900)

Axiom 1.8 schließt nicht aus, dass es Menge M gibt mit $M \in M$.

- Sei M normal $:\Leftrightarrow M \notin M$
- Sei $\mathcal{M} := \{ M$ ist Menge $: M$ normal$\}$

Frage: ist $\mathcal{M}$ normal, d.h. gilt $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$?

- falls ja $\overset{\text{per Def. von } \mathcal{M}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$
- falls nein $\Longrightarrow$ $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$

Somit $\mathcal{M} \in \mathcal{M} \iff \mathcal{M} \notin \mathcal{M}$

Widerspruch ($\lightning$) zu Axiom 1.1.: Aussage entweder w oder f.

Ausweg: Man darf $\mathcal{M}$ nicht bilden! Ändern Axiom 1.8!

- Axiomatische Mengenlehre schränkt erlaubte Aussageformen in Mengendef. ein
  $\rightsquigarrow$ Vorlesung "Logik"
- Wir verwenden nur dort erlaubte Aussagenformen.

1.15 Definition Seien L, M Mengen, $l \in L$, $m \in M$

- Relation $\mathcal{R}$ auf $L \times M$: Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq L \times M$
- l und m erfüllen $\mathcal{R}$ (in Zeichen: $l\mathcal{R}m$) $:\iff (l, m) \in \mathcal{R}$
- Inverse relation: $\mathcal{R}^{-1} := \{(m, l) \in M \times L : (l, m) \in \mathcal{R}\}$

1.16 Beispiel: $L = M = \{a, b, c\}$

R Relation: "kommt früher im Alphabet als"

$$R = \{(a,b), (a,c), (b,c)\}$$

$\Rightarrow R^{-1} =$ "kommt später im Alphabet als"

1.17 Definition Sei M Menge und α eine Relation auf $M \times M$ (abkürzend: Relation auf M)

α heißt Ordnungsrelation auf M :$\Leftrightarrow$

reflexiv: $\forall m \in M: \ m \alpha m$

transitiv: $\forall m_1, m_2, m_3 \in M: \ (m_1 \alpha m_2 \wedge m_2 \alpha m_3) \Rightarrow m_1 \alpha m_3$

antisymm: $\forall m_1, m_2 \in M:$
$m_1 \alpha m_2 \wedge m_2 \alpha m_1 \Rightarrow m_1 = m_2$

Dann heißt (M, α) teilweise (an-)geordnete Menge

(M, α) heißt (vollständig oder total) (an-)geordnet wenn zudem gilt:

$$\forall m_1, m_2 \in M: \ (m_1 \alpha m_2) \vee (m_2 \alpha m_1)$$

(d.h. 2 bel. Elemente sind stets vergleichbar!)

1.18 Beispiel:

- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist teilweise geordnet; aber nicht vollst.
- $\subsetneq$ ist keine Ordnungsrel. auf $\mathcal{P}(M)$
- später: $(\mathbb{R}, \leq)$ geordnet
- Beisp. 1.15 def. keine Ordnungsrel., wohl aber „steht früher oder an gleicher Stelle im Alphabet als"

1.19 Definition Sei M Menge und $\sim$ eine Relation auf M.

- $\sim$ <u>Äquivalenzrelation</u> $:\Leftrightarrow$ $\sim$ ist $\begin{cases} \text{reflexiv} \\ \text{transitiv} \\ \text{symmetrisch: } \\ \forall m_1, m_2 \in M: \\ \quad m_1 \sim m_2 \Leftrightarrow m_2 \sim m_1 \end{cases}$
- Sei $m \in M$. <u>Äquivalenzklasse</u> von m (bzgl. $\sim$):
$$[m] := \{ m' \in M : m' \sim m \} \subseteq M$$
(es gilt stets $[m] \neq \emptyset$ wegen reflexiv!)
- m' <u>Repräsentant</u> von $[m]$ $:\Leftrightarrow$ $m' \in [m]$
- $M/_\sim := \{ [m] : m \in M \}$ <u>Quotientenmenge</u> von M

1.20 Beispiel:

- Gleichheit von Elementen "$=$" ist Äquiv. rel.
$$\text{"="} = \{ (m,m) : m \in M \} \subseteq M \times M$$
$$[m] = \{m\}, \quad M/_= = \{ \{m\} : m \in M \}$$
- $\sim :=$ "hat selbe Anzahl von Elementen wie" ist Äquiv. rel. auf $\mathcal{P}(M)$, $M := \{a,b,c,d\}$;
für $L \subseteq M$ ist $[L] = \{ L' \subseteq M : L' \text{ hat gleich viele Elemente wie } L \}$

1.21 Lemma Sei $\sim$ Äquiv. rel. auf M und $m_1, m_2 \in M$.
Dann gilt <u>entweder</u> $[m_1] = [m_2]$ <u>oder</u> $[m_1] \cap [m_2] = \emptyset$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$
$$m_1 \sim m_2 \qquad\qquad m_1 \not\sim m_2$$
(d.h $\neg (m_1 \sim m_2)$)

1.22 Definition Beliebige Vereinigungen und Schnitte

Sei $J \neq \emptyset$ eine Menge („Indexmenge") und $\forall j \in J$ sei M_j eine Menge.

$$\bigcup_{j\in J} M_j := \{m : \exists j \in J \text{ mit } m \in M_j\}$$

$$\bigcap_{j\in J} M_j := \{m : \forall j \in J : m \in M_j\}$$

Falls: $\forall j, j' \in J$ mit $j \neq j'$ gilt: $M_j \cap M_{j'} = \emptyset$ („paarweise disjunkt")

dann Notation: $\dot{\bigcup}_{j\in J} M_j$ („disjunkte Vereinigung")

1.23 Korollar (zu Lemma 1.21)

Sei $\sim$ Äquiv. rel. auf M. Dann gilt

$$M = \dot{\bigcup}_{[m]\in M/\sim} [m]$$ (disjunkte Zerlegung in Äquivalenzklassen)

1.24 Definition Sei R Relation auf $X \times Y$ (X, Y Mengen)

R ist Graph einer Funktion (oder: Abbildung) $:\Leftrightarrow \begin{cases} \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in R: \\ x_1 = x_2 \overset{(*)}{\Rightarrow} y_1 = y_2 \end{cases}$

Definitionsbereich der Funktion

$$\mathcal{D} := \{x \in X : \exists y \in Y \text{ mit } (x,y) \in R\}$$

$$= \{x \in X : \exists!\, y =: f(x) \in Y \text{ mit } (x,y) \in R\}$$

[„es ex. genau 1" (auch: $\exists_1$)]

wegen $(*)$

Wertebereich (oder: Bildbereich) der Fkt.: $f(\mathcal{D})$, wobei

für $D \subseteq \mathcal{D}$: $f(D) := \{ y \in Y : \exists x \in D$ mit $\underbrace{(x,y) \in R}_{\Leftrightarrow y = f(x)} \}$

„Bild von D unter f" nicht notw. eindeutig!

Übliche Schreib- u. Sichtweise: $f: \mathcal{D} \to Y$, $x \mapsto f(x)$ (statt $R =: R_f$)

Gleichheit von Funktionen: $f = g :\Leftrightarrow R_f = R_g$

1.25 Bemerkung

- f ordnet jedem $x \in \mathcal{D} =: \mathrm{dom}(f)$ (domain) genau 1 $y \in Y$ zu
- Schreibweise $f: X \to Y$: bedeutet auch $X = \mathrm{dom}(f)$
- Seien f, g Funktionen. Dann gilt
  $f = g \Leftrightarrow \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ und $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$

1.26 Definition Sei $f: X \to Y$

- f injektiv $:\Leftrightarrow \forall y \in f(X)\ \exists!\, x \in \mathrm{dom}(f)$ mit $y = f(x)$
- f surjektiv $:\Leftrightarrow f(X) = Y$
- f bijektiv $:\Leftrightarrow f$ injektiv $\wedge$ f surjektiv

1.27 Lemma Sei $f: X \to Y$ bijektiv. Dann gilt

(i) $(R_f)^{-1}$ ist Graph einer Funktion, der Umkehrfkt.

$$f^{-1}: Y \to X, \quad f(x) \mapsto x \quad \text{(ebenfalls bijektiv)}$$

(ii) $(f^{-1})^{-1} = f$

Beweis:

(i) $R_f = \{ (x, f(x)) \in X \times Y : x \in X \}$

$$(R_f)^{-1} \overset{\text{Def 1.15}}{=} \{ (\underbrace{f(x)}_{=:y}, x) \in Y \times X : x \in X \}$$

seien $(y_1, x_1), (y_2, x_2) \in (R_f)^{-1}$ mit $y_1 = y_2 =: y$, also

$$y = f(x_1) = f(x_2) \overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$$

$\Rightarrow (R_f)^{-1} =: R_{f^{-1}}$ ist Graph einer Fkt f^{-1}.

- $\operatorname{dom}(f^{-1}) = \{ y \in Y : \exists x \in X \text{ mit } \underbrace{(y, x) \in R_{f^{-1}}}_{\Leftrightarrow (x, y) \in R_f} \}$

$$= f(X) \overset{f \text{ surj.}}{=} Y$$

d.h. $\forall y \in Y \; \exists x \in X$ mit $y = f(x)$, wegen inj.

gilt sogar $\exists ! x \in X$ mit $y = f(x)$

$\Rightarrow f^{-1} : Y \to X$, $y = f(x) \mapsto x$ auch surj.

Da R_f Graph einer Fkt. $\Rightarrow f^{-1}$ inj. $\quad \Big\} \Rightarrow f^{-1}$ bijektiv

$$(x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$$

(ii) folgt aus

$$(R_{f^{-1}})^{-1} = (R_f^{-1})^{-1} = R_f \qquad \blacksquare$$

1.28 Beispiel: Die Relation auf X

$R := \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$ ist Graph einer Fkt.,

der Identität auf X : $\quad id := id_X : \begin{array}{l} X \to X \\ x \mapsto x \end{array}$ (bij.)

Es gilt $id_X^{-1} = id_X$

1.29 Definition Komposition von Funktionen

Seien $f: X \to Y$, $g: dom(g) \to Z$ Fkt'en, wobei $dom(g) \subseteq Y$

Dann ist $\quad dom(g \circ f) := \{x \in X : f(x) \in dom(g)\}$ und

$$g \circ f : \begin{array}{l} dom(g \circ f) \to Z \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$$

1.30 Lemma Sei $f: X \to Y$ bijektiv. Dann gilt

(i) $f^{-1} \circ f = id_X$

(ii) $f \circ f^{-1} = id_Y$

Beweis: (i) da $f(X) = Y = dom(f^{-1})$

$\Rightarrow dom(f^{-1} \circ f) = X$

Sei $x \in X$ beliebig. Dann

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{Y}) = x$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

(ii) Analog zur (i)

$\boxtimes$

1.31 Definition Urbild

Seien M, X, Y Mengen und $f: X \to Y$ eine Fkt.

$$f^{-1}(M) := \{x \in X : \exists y \in M \text{ mit } f(x) = y\}$$

1.32 Bemerkung

(i) f injektiv nicht vorausgesetzt!

(ii) falls $M \cap f(X) = \emptyset$, dann $f^{-1}(M) = \emptyset$

(iii) falls f injektiv ($\Rightarrow f: X \to f(X)$ bijektiv!)

gilt

$$\underbrace{f^{-1}(M)}_{\substack{\text{Urbild von } M \\ \text{unter } f \\ (\text{gem. Def. 1.31})}} = \underbrace{f^{-1}(M \cap f(X))}_{\substack{\text{Bild von } M \cap f(X) \\ \text{unter } f^{-1} \text{ (Umkehrabb.)} \\ (\text{gem. Def 1.24})}}$$

Warnung: Notation „f^{-1}" mehrdeutig!