$\boxed{\text{1. Grundlagen}}$

$\boxed{\text{1.1. Aussagenlogik}}$

$\boxed{\text{1.1 Axiom}}$ (Mathematische) Aussage A ist Schilderung eines Sachverhalts, der entweder wahr ($A = w$) oder falsch ($A = f$) ist

('Bivalenzprinzip', 2-wertige Logik)

1.2. Beispiele

(definiert linke Seite durch rechte Aussage)

$A :\Leftrightarrow$ nach Di kommt Mi ; ($A = w$)

$B :\Leftrightarrow$ Alle Autos sind rot ; ($B = f$)

$C :\Leftrightarrow$ wenn ich im Lotto gewinne, dann spende ich 10.000 € ;
(entweder $= w$ oder $= f$)

$\boxed{\text{1.3 Definition}}$ (Verneinung)

Sei A eine Aussage. Gegenteil von A : $\neg A$ ("nicht A")
definiert durch Wahrheitstabelle:

A	$\neg A$
w	f
f	w

"es ist nicht richtig, dass A gilt".

1.4 Bemerkung : $A :\Leftrightarrow \neg A$ def. keine math. Aussage (Lügner-Antinomie von Eubulides, 4. Jh. v. Chr.).

Verknüpfung bildet aus 2 Aussagen eine neue:

1.5 Definition Seien A, B aussagen

- "Und"-Verknüpfung $A \wedge B$

$A \wedge B$	$B = w$	$B = f$
$A = w$	w	f
$A = f$	f	f

- "oder"-Verknüpfung $A \vee B$

$A \vee B$	$B = w$	$B = f$
$A = w$	w	w
$A = f$	w	f

- ausgeschlossenes Widerspruch: $A \wedge \neg A = f$
- "tertium non datur": $A \vee \neg A = w$
(ein Drittes gibt es nicht / ausgeschlossende Dritten)

- Implikation $A \Rightarrow B$ (auch: $B \Leftarrow A$)

"A ist hinreichend für B", "B ist notwendig für A"

"wenn A wahr, dann auch B wahr"

$A \Rightarrow B$	$B = w$	$B = f$
$A = w$	w	f
$A = f$	w	w

"ex falso quodlibet" (aus Falschen folgt Beliebiges)

- Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

"A ist hinreichend und notwendig für B"

$A \Leftrightarrow B$	$B = w$	$B = f$
$A = w$	w	f
$A = f$	f	w

"A ist genau dann wahr, wenn B wahr"

Mann nennt $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ (logische) Junktoren

„Hilfssatz"

1.6 Lemma Seien A, B Aussagen

(i) Symmetrie von $\wedge$ und $\vee$:

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A \quad , \quad A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

(ii) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

(iii) Kontraposition:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

(iv) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

Beweis: vergleiche Wahrheitstafeln; (i), (ii), (iv) klar

zu (iii):

$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A = f$, $\neg A = w$	$A = w$, $\neg A = f$
$B = f$, $\neg B = w$	w	f
$B = w$, $\neg B = f$	w	w

Rest analog: Übung! ∎

1.7 Beispiele

- In Bsp 1.2 gilt

$\neg A \Leftrightarrow$ nach Di kommt nicht Mi $(= f)$

$\neg B \Leftrightarrow$ es gibt Autos, die nicht rot sind $(= w)$

- Beweismethoden: Sei $A = w$; Ziel: zeige $B = w$
  - erkenne: $(A \Rightarrow B) = w$ (direkt)
  - erkenne $(\neg B \Rightarrow \neg A) = w$
  - erkenne $\neg B \wedge A = f$

$\left.\begin{matrix} (\neg B \Rightarrow \neg A) = w \\ \neg B \wedge A = f \end{matrix}\right\}$ Widerspruch