1. Grundlagen

1.1. Aussagenlogik

1.1 Axiom (Mathematische) Aussage A ist Schilderung eines Sachverhalts, der entweder wahr ($A = w$) oder falsch ($A = f$) ist

('Bivalenzprinzip', 2-wertige Logik)

1.2. Beispiele

(definiert linke Seite durch rechte Aussage)

$A :\Longleftrightarrow$ nach Di kommt Mi ; ($A = w$)

$B :\Longleftrightarrow$ Alle Autos sind rot ; ($B = f$)

$C :\Longleftrightarrow$ wenn ich im Lotto gewinne, dann spende ich 10.000 € ; (entweder $= w$ oder $= f$)

1.3 Definition (Verneinung)

Sei A eine Aussage. Gegenteil von A: $\neg A$ ("nicht A") definiert durch Wahrheitstabelle:

A	$\neg A$
w	f
f	w

"es ist nicht richtig, dass A gilt".

1.4 Bemerkung: $A :\Longleftrightarrow \neg A$ def. keine math. Aussage (Lügner-Antinomie von Eubulides, 4. Jh. v. Chr.).

Verknüpfung bildet aus 2 Aussagen eine neue:

1.5 Definition Seien A, B Aussagen

- "Und"- Verknüpfung $A \wedge B$

$A \wedge B$	$B = w$	$B = f$
$A = w$	w	f
$A = f$	f	f

- "oder"- Verknüpfung $A \vee B$

$A \vee B$	$B = w$	$B = f$
$A = w$	w	w
$A = f$	w	f

- ausgeschlossener Widerspruch: $A \wedge \neg A = f$
- "tertium non datur": (ein Drittes gibt es nicht / ausgeschlossene Dritte) $A \vee \neg A = w$

- Implikation $A \Rightarrow B$ (auch: $B \Leftarrow A$)

"A ist hinreichend für B", "B ist notwendig für A"

"wenn A wahr, dann auch B wahr"

$A \Rightarrow B$	$B = w$	$B = f$
$A = w$	w	f
$A = f$	w	w

"ex falso quodlibet"
← (aus Falschem folgt Beliebiges)

- Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

"A ist hinreichend und notwendig für B"

"A ist genau dann wahr, wenn B wahr"

$A \Leftrightarrow B$	$B = w$	$B = f$
$A = w$	w	f
$A = f$	f	w

Mann nennt $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ (logische) Junktoren

„Hilfssatz“

1.6 Lemma Seien A, B aussagen

(i) Symmetrie von $\wedge$ und $\vee$:

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A \quad , \quad A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

(ii) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

(iii) Kontraposition:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

(iv) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

Beweis: vergleiche Wahrheitstafeln; (i), (ii), (iv) klar

zu (iii):

$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A = f$ $\neg A = w$	$A = w$ $\neg A = f$
$B = f$, $\neg B = w$	w	f
$B = w$, $\neg B = f$	w	w

Rest analog: Übung! ■

1.7 Beispiele • In Bsp 1.2 gilt

$\neg A \Leftrightarrow$ nach Di kommt nicht Mi $(= f)$

$\neg B \Leftrightarrow$ es gibt Autos, die nicht rot sind $(= w)$

- Beweismethoden: Sei $A = w$; Ziel: zeige $B = w$
  - erkenne: $(A \Rightarrow B) = w$ (direkt)
  - erkenne $(\neg B \Rightarrow \neg A) = w$
  - erkenne $\neg B \wedge A = f$

$$\left.\begin{array}{l} (\neg B \Rightarrow \neg A) = w \\ \neg B \wedge A = f \end{array}\right\} \text{Widerspruch}$$

1.2 Mengen, Relationen, Funktionen

(1845-1918)

1.8. „Naives Axiom" von Cantor Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen

(Reihefolge irrelevant!)

1.9 Definition

(i) Element sein: Objekt x liegt in Menge M $\Leftrightarrow : x \in M$
(oder $M \ni x$)

$$x \notin M : \Leftrightarrow \neg (x \in M)$$

(ii) Teilmenge: Seien M, M' Mengen

$$M' \subseteq M \quad : \Leftrightarrow \quad \forall x \in M' : x \in M$$

(oder $M \supseteq M'$) ↑ „für alle" „gilt" bzw. „so dass"

(„für alle x aus M' gilt, dass x Element von M ist")

echte Teilmenge: $M' \subset M : \Leftrightarrow (M' \subseteq M \wedge \exists x \in M : x \notin M')$

„es existiert"

[auch gebräuchlich: $\subset$: Teilmenge
$\subsetneq$: echte Teilmenge]

(iii) Gleichheit von Mengen M, M':

$$M = M' \quad : \Leftrightarrow \quad (M \subseteq M' \wedge M' \subseteq M)$$

d.h. jedes Element von M liegt auch in M' und umgekehrt, d.h. M und M bestehen aus denselben Elementen.

$$M \neq M' : \Leftrightarrow \neg (M = M')$$

Ende ①

(iv) 2 Elemente $x, x' \in M$ sind gleich, $x = x'$, falls sie ununterscheidbar sind. $x \neq x' : \Leftrightarrow \neg (x = x')$

Schreibweisen für Mengen anhand von

1.10 Beispiel

- $L :=$ (Menge der) lat. Buchst. $= \{a, b, \dots, z, A, \dots, Z\}$ „aufzählend"

  def. Gleichheit

- (Menge der) lat. Buchstaben im Wort „Mathematik" $= \{a, M, t, h, e, m, i, k\}$

  $= \{x \in L : A(x)\} \subset L$

  „mit der Eigenschaft, dass die nachfolgende Aussage wahr ist"

  $A(x) :\Longleftrightarrow$ Buchstabe x kommt in „Mathematik" vor

[auch üblich: „$|$" statt „$:$"]

1.11 Definition

- Leere Menge: $\emptyset :=$ Menge ohne Element.
- Seien M, N Mengen
- Schnitt: $M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$
- Vereinigung: $M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$
- Differenz: $M \setminus N := \{x \in M : x \notin N\} =: N^c$

  Komplement von N in M.

- kartesisches Produkt

$$M \times N := \{ (m,n) : m \in M \wedge n \in N \}$$

geordnetes Paar
(Reihenfolge!)

(also, falls $M \neq N$:
$M \times N \neq N \times M$)

- Potenzmenge von M: $\mathcal{P}(M) := \{ L \text{ ist Menge} : L \subseteq M \}$
(auch: 2^M)

1.12 Beispiele

(i) $\forall$ Mengen M gilt: $\emptyset \subseteq M$
da Aussage $\forall x \in \emptyset : x \in M$ stets wahr (Widerspruchsbw.)

(ii) $\forall$ Mengen M gilt: $\emptyset \neq \mathcal{P}(M) \overset{(i)}{\supseteq} \{\emptyset, M\}$

(iii) $\{a,b,c\} \times \{a,d\} = \{(a,a),(a,d),(b,a),(b,d),(c,a),(c,d)\}$

1.13 Lemma

Rechenregeln für $\cup$ und $\cap$

Seien L, M, N Mengen

(i) Kommutativität: $M \cap N = N \cap M$; $M \cup N = N \cup M$

(ii) Assoziativität: $L \cap (M \cap N) = (L \cap M) \cap N =: L \cap M \cap N$
$L \cup (M \cup N) = (L \cup M) \cup N =: L \cup M \cup N$

(iii) Idempotenz: $M \cap M = M = M \cup M$

(iv) **Distributivität**: $L\cap(M\cup N) = (L\cap M)\cup(L\cap N)$

$$L\cup(M\cap N) = (L\cup M)\cap(L\cup N)$$

(v) **de Morgan-Regeln**: Seien $L,N\subseteq M$. Dann gilt

$$(L\cap N)^c = L^c\cup N^c$$

$$(L\cup N)^c = L^c\cap N^c$$

Beweis: Aus den entsprechenden Regeln für $\vee,\wedge,\neg$

Bsp. 1. de Morgan:

$$(L\cap N)^c = \{x\in M : \underbrace{\neg(x\in L\cap N)}\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\neg(x\in L\wedge x\in N)$$

$$(!)\ \Updownarrow$$

$$x\notin L \vee x\notin N$$

$$\Updownarrow$$

$$x\in L^c\vee x\in N^c$$

$$= L^c\cup N^c.$$

Rest: Übung! ■

1.14 Bemerkung: Probleme des naiven Def. einer Menge. Bsp. Russellsche Antinomie (ca. 1900)

Axiom 1.8 schließt *nicht* aus, dass es Menge M gibt mit $M\in M$.

- Sei M *normal* $:\Leftrightarrow M\notin M$
- Sei $\mathcal{M} := \{M \text{ ist Menge} : M \text{ normal}\}$

Frage: ist $\mathcal{M}$ normal, d.h. gilt $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$?

- falls ja $\overset{\text{per Def. von } \mathcal{M}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$
- falls nein $\Longrightarrow$ $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$

Somit $\mathcal{M} \in \mathcal{M} \iff \mathcal{M} \notin \mathcal{M}$

Widerspruch (↯) zu Axiom 1.1.: Aussage entweder w oder f.

Ausweg: Man darf $\mathcal{M}$ nicht bilden! Ändern Axiom 1.8!

- Axiomatische Mengenlehre schränkt erlaubte Aussageformen in Mengendef. ein
  $\rightsquigarrow$ Vorlesung "Logik"
- Wir verwenden nur dort erlaubte Aussagenformen.

1.15 Definition Seien L, M Mengen, $l \in L$, $m \in M$

- Relation $\mathcal{R}$ auf $L \times M$: Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq L \times M$
- l und m erfüllen $\mathcal{R}$ (in Zeichen: $l\mathcal{R}m$) $:\iff (l,m) \in \mathcal{R}$
- Inverse relation: $\mathcal{R}^{-1} := \{(m,l) \in M \times L : (l,m) \in \mathcal{R}\}$

1.16 Beispiel: $L = M = \{a, b, c\}$

R Relation: "kommt früher im Alphabet als"

$$R = \{(a,b), (a,c), (b,c)\}$$

$\Rightarrow$ R^{-1} = "kommt später im Alphabet als"

1.17 Definition Sei M Menge und α eine Relation auf $M \times M$ (abkürzend: Relation auf M)

α heißt Ordnungsrelation auf M :$\Longleftrightarrow$

reflexiv: $\forall m \in M: \; m \alpha m$

transitiv: $\forall m_1, m_2, m_3 \in M: \; (m_1 \alpha m_2 \wedge m_2 \alpha m_3) \Rightarrow m_1 \alpha m_3$

antisymm: $\forall m_1, m_2 \in M:$
$m_1 \alpha m_2 \wedge m_2 \alpha m_1 \Rightarrow m_1 = m_2$

Dann heißt (M, α) teilweise (an-)geordnete Menge

(M, α) heißt (vollständig oder total) (an-)geordnet wenn zudem gilt:

$$\forall m_1, m_2 \in M: \; (m_1 \alpha m_2) \vee (m_2 \alpha m_1)$$

(d.h. 2 bel. Elemente sind stets vergleichbar!)

1.18 Beispiel:

- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist teilweise geordnet; aber nicht vollst.
- $\subsetneq$ ist keine Ordnungsrel. auf $\mathcal{P}(M)$
- später: $(\mathbb{R}, \leq)$ geordnet
- Beisp. 1.15 def. keine Ordnungsrel., wohl aber
  „steht früher oder an gleicher Stelle im Alphabet als"

1.19 Definition Sei M Menge und $\sim$ eine Relation auf M.

- $\sim$ Äquivalenzrelation $:\Leftrightarrow$ $\sim$ ist $\begin{cases} \text{reflexiv} \\ \text{transitiv} \\ \text{symmetrisch: } \\ \forall m_1, m_2 \in M: \\ \quad m_1 \sim m_2 \Leftrightarrow m_2 \sim m_1 \end{cases}$
- Sei $m \in M$. Äquivalenzklasse von m (bzgl. $\sim$):
$$[m] := \{ m' \in M : m' \sim m \} \subseteq M$$
(es gilt stets $[m] \neq \emptyset$ wegen reflexiv!)
- m' Repräsentant von $[m]$ $:\Leftrightarrow$ $m' \in [m]$
- $M/_\sim := \{ [m] : m \in M \}$ Quotientenmenge von M

1.20 Beispiel:

- Gleichheit von Elementen "$=$" ist Äquiv. rel.
$$\text{"="} = \{ (m,m) : m \in M \} \subseteq M \times M$$
$$[m] = \{m\}, \quad M/_= = \{ \{m\} : m \in M \}$$
- $\sim :=$ "hat selbe Anzahl von Elementen wie" ist Äquiv. rel. auf $\mathcal{P}(M)$, $M := \{a,b,c,d\}$; für $L \subseteq M$ ist $[L] = \{ L' \subseteq M : L' \text{ hat gleich viele Elemente wie } L \}$

1.21 Lemma Sei $\sim$ Äquiv. rel. auf M und $m_1, m_2 \in M$. Dann gilt entweder $[m_1] = [m_2]$ oder $[m_1] \cap [m_2] = \emptyset$

$$\begin{array}{ccc} [m_1] = [m_2] & & [m_1] \cap [m_2] = \emptyset \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ m_1 \sim m_2 & & m_1 \not\sim m_2 \\ & & (\text{d.h. } \neg (m_1 \sim m_2)) \end{array}$$

1.22 Definition — Beliebige Vereinigungen und Schnitte

Sei $J \neq \emptyset$ eine Menge („Indexmenge") und $\forall j \in J$ sei M_j eine Menge.

$$\bigcup_{j \in J} M_j := \{ m : \exists j \in J \text{ mit } m \in M_j \}$$

$$\bigcap_{j \in J} M_j := \{ m : \forall j \in J : m \in M_j \}$$

Falls: $\forall j, j' \in J$ mit $j \neq j'$ gilt: $M_j \cap M_{j'} = \emptyset$ („paarweise disjunkt")

dann Notation: $\dot{\bigcup\limits_{j \in J}} M_j$ („disjunkte Vereinigung")

1.23 Korollar (zu Lemma 1.21)

Sei $\sim$ Äquiv. rel. auf M. Dann gilt

$$M = \dot{\bigcup_{[m] \in M/\sim}} [m] \qquad \left(\begin{array}{l} \text{disjunkte Zerlegung} \\ \text{in Äquivalenzklassen} \end{array} \right)$$

1.24 Definition Sei R Relation auf $X \times Y$ (X, Y Mengen)

R ist Graph einer Funktion (oder: Abbildung) $:\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R : \\ x_1 = x_2 \underset{\circledast}{\Longrightarrow} y_1 = y_2 \end{array} \right.$

Definitionsbereich der Funktion

$$\mathcal{D} := \{ x \in X : \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in R \}$$

$$= \{ x \in X : \exists!\, y =: f(x) \in Y \text{ mit } (x, y) \in R \}$$

[↑ „es ex. genau 1" (auch: $\exists_1$)]

↑

wegen $\circledast$

Wertebereich (oder: Bildbereich) der Fkt.: $f(\mathcal{D})$, wobei

für $D \subseteq \mathcal{D}$: $$f(D) := \{ y \in Y : \exists x \in D \text{ mit } \underbrace{(x,y) \in R}_{\Leftrightarrow y = f(x)} \}$$

„Bild von D unter f" nicht notw. eindeutig!

Übliche Schreib- u. Sichtweise: $$f : \mathcal{D} \to Y, \quad x \mapsto f(x)$$ (statt $R =: R_f$)

Gleichheit von Funktionen: $f = g :\Leftrightarrow R_f = R_g$

1.25 Bemerkung

- f ordnet jedem $x \in \mathcal{D} =: \overset{\text{domain}}{\mathrm{dom}(f)}$ genau 1 $y \in Y$ zu
- Schreibweise $f: X \to Y$: bedeutet auch $X = \mathrm{dom}(f)$
- Seien f, g Funktionen. Dann gilt
  $f = g \Leftrightarrow \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ und $f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathrm{dom}(f)$

1.26 Definition

Sei $f: X \to Y$

- f injektiv $:\Leftrightarrow \forall y \in f(X)\ \exists!\, x \in \mathrm{dom}(f)$ mit $y = f(x)$
- f surjektiv $:\Leftrightarrow f(X) = Y$
- f bijektiv $:\Leftrightarrow f$ injektiv $\wedge$ f surjektiv

1.27 Lemma

Sei $f: X \to Y$ bijektiv. Dann gilt

(i) $(R_f)^{-1}$ ist Graph einer Funktion, der Umkehrfkt.

$$f^{-1} : Y \to X, \quad f(x) \mapsto x$$ (ebenfalls bijektiv)

(ii) $(f^{-1})^{-1} = f$

Beweis:

(i) $R_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$

$$(R_f)^{-1} \overset{\text{Def 1.15}}{=} \{(\underbrace{f(x)}_{=:y}, x) \in Y \times X : x \in X\}$$

seien $(y_1, x_1), (y_2, x_2) \in (R_f)^{-1}$ mit $y_1 = y_2 =: y$, also

$$y = f(x_1) = f(x_2) \overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$$

$\Rightarrow (R_f)^{-1} =: R_{f^{-1}}$ ist Graph einer Fkt f^{-1}.

- $\mathrm{dom}(f^{-1}) = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ mit } \underbrace{(y, x) \in R_{f^{-1}}}_{\Leftrightarrow (x, y) \in R_f}\}$

$$= f(X) \overset{f \text{ surj.}}{=} Y$$

d.h. $\forall y \in Y \; \exists x \in X$ mit $y = f(x)$, wegen inj. gilt sogar $\exists! x \in X$ mit $y = f(x)$

$\Rightarrow f^{-1} : Y \to X$, $y = f(x) \mapsto x$ auch surj.

Da R_f Graph einer Fkt. $\Rightarrow f^{-1}$ inj.

$(x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$

$\Rightarrow f^{-1}$ bijektiv

(ii) folgt aus

$$(R_{f^{-1}})^{-1} = (R_f^{-1})^{-1} = R_f \qquad \blacksquare$$

1.28 Beispiel: Die Relation auf X

$R := \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$ ist Graph einer Fkt.,

der Identität auf X: $\quad \mathrm{id} := \mathrm{id}_X : \begin{array}{l} X \to X \\ x \mapsto x \end{array}$ (bij.)

Es gilt $\mathrm{id}_X^{-1} = \mathrm{id}_X$

1.29 Definition Komposition von Funktionen

Seien $f: X \to Y$, $g: \mathrm{dom}(g) \to Z$ Fkt'en, wobei $\mathrm{dom}(g) \subseteq Y$

Dann ist $\quad \mathrm{dom}(g \circ f) := \{x \in X : f(x) \in \mathrm{dom}(g)\}$ und

$$g \circ f : \begin{array}{l} \mathrm{dom}(g \circ f) \to Z \\ x \mapsto g(f(x)) \end{array}$$

1.30 Lemma Sei $f: X \to Y$ bijektiv. Dann gilt

(i) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$

(ii) $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$

Beweis: (i) da $f(X) = Y = \mathrm{dom}(f^{-1})$

$\Rightarrow \mathrm{dom}(f^{-1} \circ f) = X$

Sei $x \in X$ beliebig. Dann

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{Y}) = x$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

(ii) Analog zur (i)

$\blacksquare$

1.31 Definition Urbild

Seien M, X, Y Mengen und $f: X \to Y$ eine Fkt.

$$f^{-1}(M) := \{x \in X : \exists y \in M \text{ mit } f(x) = y\}$$

1.32 Bemerkung

(i) f injektiv nicht vorausgesetzt!

(ii) falls $M \cap f(X) = \emptyset$, dann $f^{-1}(M) = \emptyset$

(iii) falls f injektiv ($\Rightarrow f: X \to f(X)$ bijektiv!)

gilt

$$\underbrace{f^{-1}(M)}_{\substack{\text{Urbild von } M \\ \text{unter } f \\ (\text{gem. Def. 1.31})}} = \underbrace{f^{-1}(M \cap f(X))}_{\substack{\text{Bild von } M \cap f(X) \\ \text{unter } f^{-1} \text{ (Umkehrabb.)} \\ (\text{gem. Def 1.24})}}$$

Warnung: Notation „f^{-1}" mehrdeutig!

2. Aufbau des Zahlensystems

Wir postulieren die natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ und leiten davaus $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. samt alle Rechenregeln ab.

2.1. Natürliche Zahlen

Menge $\mathbb{N}$, für die gelte

2.1 Axiomsystem von Peano

(P1) $\mathbb{N} \neq \emptyset$ (also $\exists$ mind. ein Element in $\mathbb{N}$. Bezeichnung: 1)

$\exists$ Funktion (Nachfolgerabb.) $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

(P2) $1 \notin \nu(\mathbb{N})$ „1 ist kein Nachfolger"

(P3) ν injektiv „Eindeutigkeit des Vorgängers"

(P4) $\forall M \subseteq \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 \in M \wedge \nu(M) \subseteq M) \Rightarrow \underline{M = \mathbb{N}}$$

(Bem. $\nu(M) \subseteq M \iff \forall n \in M : \nu(n) \in M$)

„Prinzip der Vollständigen Induktion"

Bezeichnungsweisen: $\nu(1) =: 2$, $\nu(2) =: 3$, ...

(Nach (P4) werden so alle $n \in \mathbb{N}$ mit einem Zahlensymbol erfasst).

2.2 Bemerkung: (P1) - (P4) sind

- vollständig (im Sinne von: alle bekannten Rechenregeln ableitbar)
- unabhängig (keines der Axiome aus den anderen ableitbar)
- widerspruchsfrei (Gentzen, 1936)

2.3 Definition $\forall\, k, n \in \mathbb{N}$ sei

"+": $n+1 := \nu(n)$ (1)
$n + \nu(k) := \nu(n+k)$ (2)

"·": $n \cdot 1 := n$
$n \cdot \nu(k) = n \cdot k + n$

wird meist weggelassen!

2.4 Bemerkung

- rekursive Def. erklärt wegen (P4) $n+m$ $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$:

$$n+2 = n+\nu(1) \overset{Def}{=} \nu(n+1) \overset{Def}{=} \nu(\nu(n))$$
$$n+3 = n+\nu(2) = \nu(n+2) = \nu(\nu(\nu(n)))$$
$$\vdots$$

- analog für $n \cdot m$

2.5 Lemma Rechenregeln $\forall\, k, m, n \in \mathbb{N}$

	"+"	"·"
kommutativ	$n+k = k+n$	$nk = kn$
assoziativ	$(k+m)+n = k+(m+n)$	$(km)n = k(mn)$
distributiv		$(k+m)n = kn + mn$

[insbes.: $(\mathbb{N},+)$ und $(\mathbb{N},\cdot)$ sind abelsche Halbgruppen, vgl. Lin. Alg.]

Beweis: "+" ist assoz. ⇝ Übung!

Hier: "+" ist komm. (dabei wird assoz. verwendet)

1. Schritt: Zeige $\forall n \in \mathbb{N}: \; n+1 = 1+n$

Bew. per vollst. Induktion: Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : n+1 = 1+n\}$

(i) $1 \in M$, klar! $(1+1 = 1+1)$ „Induk.anfang"

(ii) Sei $n \in M$; zur zeigen (z.z.): $\underbrace{n+1}_{\nu(n)} \in M$: „Induk.schritt"

„Ind. annahme" ⟶ $n \in M$

$$\nu(n)+1 \overset{2.3(1)}{=} \nu(\underbrace{\nu(n)}_{n+1}) \underset{\uparrow \atop n\in M}{=} \nu(1+n) \overset{2.3(2)}{=} 1+\nu(n)$$

d.h., $n+1 \in M$

$(i) \wedge (ii) \overset{(P4)}{\Longrightarrow} M = \mathbb{N}$.

2. Schritt: Zeige, $\forall k, n \in \mathbb{N}: \; n+k = k+n$

Sei $n \in \mathbb{N}$ fix, Beweis per Ind. nach k:

Sei $K := \{k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n+k = k+n\}$

(i) $1 \in K$ wegen 1. Schritt

(ii) Sei $k \in K$; z.z.: $\nu(k) = k+1 \in K$:

$\forall n \in \mathbb{N}$:
$$n + \nu(k) \overset{2.3(2)}{=} \nu(\underbrace{n+k}_{\overset{\|}{k+n} \text{ da } k\in K}) \overset{2.3(2)}{=} k + \underbrace{\nu(n)}_{\overset{\|}{n+1} = 1+n \text{ (1. Schritt)}}$$

$$= k + (1+n) \underset{\uparrow \atop \text{"+" assoziativ}}{=} (k+1)+n \overset{2.3(1)}{=} \nu(k)+n,$$

also $\nu(k) \in K$

$(i) \wedge (ii) \overset{(P4)}{\Longrightarrow} K = \mathbb{N}$. Für "$\cdot$" alles analog ▨

Die Rechenregeln dürfen (sollen) ab jetzt "hemmungslos" verwendet werden!

2.6 Definition $\forall m, n \in \mathbb{N}$ definieren

- $n < m \;:\Leftrightarrow\; (\exists k \in \mathbb{N} : m = n + k)$
- $n \leq m \;:\Leftrightarrow\; (n < m \;\vee\; n = m)$

$\leq, <$ sind Relationen auf $\mathbb{N}$

Inverse Relationen: $n > m \;:\Leftrightarrow\; m < n$

$n \geq m \;:\Leftrightarrow\; m \leq n$

2.7 Satz $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ist <u>genau</u> 1 der 3 Aussagen

$$m < n \;, \quad m = n \;, \quad n < m$$

wahr.

Beweis beruht auf 3 Lemmata

2.8 Lemma Jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ hat einen Vorgänger

$(\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \exists m \in \mathbb{N}$ mit $\nu(m) = n)$

<u>Beweis</u>: per Ind. Sei $M := \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } \nu(m) = n\}$

- $1 \in M$ klar („Ind. anf.")
- Sei $n \in M$ („Ind. annahme").

  Dann ist $\nu(n) \in M$, da Nachfolger von n
- $\xRightarrow{(PU)} M = \mathbb{N}$ ∎

2.9 Lemma $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : 1 < n$

<u>Beweis</u> Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \xRightarrow{\text{Lem. 2.8}}$

$$\exists k \in \mathbb{N} : n = \nu(k) = k + 1$$

$$= 1 + k \quad (\text{bei Lem. } 2.5)$$

$$\Rightarrow 1 < n \quad (\text{bei Def. } 2.6).$$

∎

2.10 Lemma $\forall k, n \in \mathbb{N} : \; n + k \neq n$

Beweis. Ind. nach n:

(i) $1 + k = \nu(k) \neq 1 \;\; \forall k$, da $1 \notin \nu(\mathbb{N})$ (P2)

(ii) gelte $n + k \neq n \;\; \forall k \in \mathbb{N}$; („Ind. annahme")

zeige: $\nu(n) + k \neq \nu(n) \;\; \forall k \in \mathbb{N}$ (*) per Widerspruch:

Annahme: $\exists k \in \mathbb{N} : \nu(n) + k = \nu(n)$ $(\neg (*))$

$$\Rightarrow \quad \nu(n) \overset{2.5}{=} k + \nu(n) \overset{2.3(2)}{=} \nu(k+n)$$

$$\overset{(P3)}{\Rightarrow} \quad n = k + n \overset{2.5}{=} n + k \;\; \lightning$$ (Widerspruch) zu Ind.annahme.

– also ist $\neg(*)$ falsch, so (*) wahr.

$(i) \wedge (ii) \overset{(P4)}{\Rightarrow}$ Behauptung („Beh.") ■

Beweis von Satz 2.7:

Sei $n \in \mathbb{N}$ fix, setze $\mathbb{N}_- := \{ m \in \mathbb{N} : m < n \}$, $\mathbb{N}_+ := \{ m \in \mathbb{N} : n < m \}$

und $M := \mathbb{N}_- \cup \{n\} \cup \mathbb{N}_+$

1. Schritt: zeige $M = \mathbb{N}$ ($\Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}$ ist $m < n \vee m = n \vee n < m$ wahr)

Ind.anf.: $1 \in M$, denn, falls $n = 1$ klar, und falls $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, gilt $1 \in \mathbb{N}_-$ wegen Lemma 2.9.

Ind.schritt: sei $m \in M$; z.z.: $\nu(m) \in M$

1. Fall: $m = n$ $\Rightarrow \nu(m) = n + 1 \underset{\text{Def. von } <}{\in} \mathbb{N}_+ \subseteq M$

2. Fall: $m \in \mathbb{N}_+$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m = n+k$ (Def. <)

$\Rightarrow \nu(m) = \nu(n+k) \overset{2.3(2)}{=} n + \nu(k) \overset{\text{Def. von} <}{\Rightarrow} n < \nu(m)$

$\Rightarrow \nu(m) \in \mathbb{N}_+ \subseteq M$.

3. Fall: $m \in \mathbb{N}_-$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = m+k$

falls $k = 1 \Rightarrow n = \nu(m) \in M$ ✓

falls $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \overset{2.8}{\Rightarrow} k = \tilde{k} + 1$ für $\tilde{k} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n = m + \tilde{k} + 1 \overset{2.5}{=} \underbrace{m+1}_{\nu(m)} + \tilde{k}$

$\overset{\text{Def. von} <}{\Rightarrow} \nu(m) < n \Rightarrow \nu(m) \in \mathbb{N}_- \subseteq M$

$\Rightarrow$ 1. Schritt bewiesen.

2. Schritt: $M = \mathbb{N}_- \,\dot{\cup}\, \{n\} \,\dot{\cup}\, \mathbb{N}_+$ (paarw. disjunkte Mengen)

1. Teil: z.z. $n \notin \mathbb{N}_-$

Sei $m \in \mathbb{N}_- \Rightarrow m < n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = m + k$

$\Rightarrow m \neq n$ wegen Lemma 2.10.

2. Teil: z.z. $n \notin \mathbb{N}_+$: analog zu 1. Teil

3. Teil: $\mathbb{N}_+ \cap \mathbb{N}_- = \emptyset$:

Sei $m_- \in \mathbb{N}_- \Rightarrow n = m_- + k_-$ für ein $k_- \in \mathbb{N}$

$m_+ \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow m_+ = n + k_+$ — " — $k_+ \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m_+ = (m_- + k_-) + k_+$

$= m_- + \underbrace{(k_- + k_+)}_{\in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow m_+ \neq m_-$ nach Lema 2.10

☒

2-11 Lemma „Kürzen“: $\forall k, n, m \in \mathbb{N}$ gilt

- $n = m \Leftrightarrow (n+k = m+k) \Leftrightarrow (nk = mk)$
- $n < m \Leftrightarrow (n+k < m+k) \Leftrightarrow nk < mk$

Beweis: Übung mit vollst. Ind. nach k $\boxtimes$

2.2. Ganze Zahlen

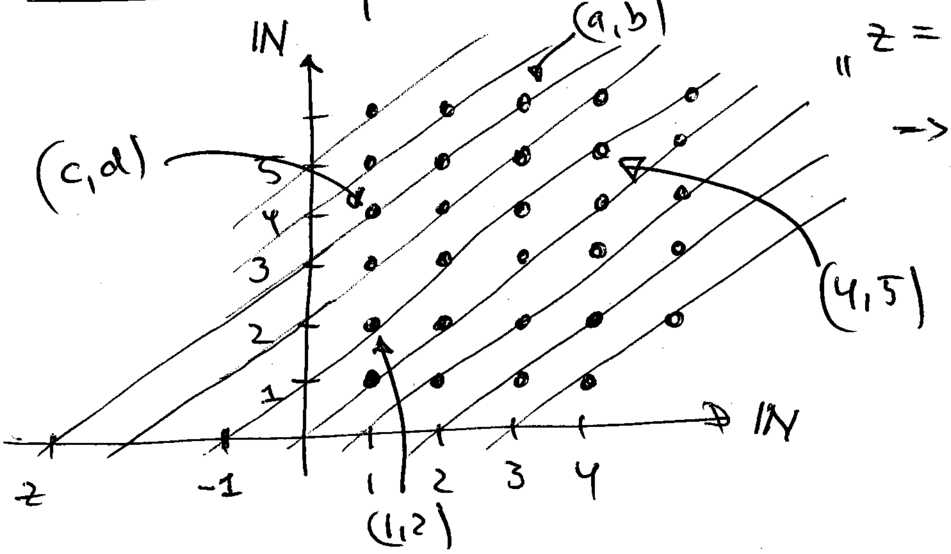
Ziel: Konstruktion der ganzen Zahlen aus $\mathbb{N}$

Durchführung: nur Ideen, Resultate; keine Beweise (→ Üb.!)

grundlegende Idee: jede ganze Zahl ist Differenz zweier natürlicher Zahlen: „$\underset{\overset{\Uparrow}{\mathbb{Z}}}{z} = \underset{\overset{\Uparrow}{\mathbb{N}}}{a} - \underset{\overset{\Uparrow}{\mathbb{N}}}{b}$"

Probleme:
- „$-$" (noch) nicht def.
- nicht eindeutige Darst.: „$-1 = 1-2 = 4-5$"

Lösung: Äquiv.klassen in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$



„$z = a-b$", „$z = c-d$"

$\Rightarrow \quad a+d = b+c$

$\boxed{\text{2.12. Def. \& Satz}}$ (i) Für $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ def.

$$(a,b) \sim (c,d) \;:\Leftrightarrow\; a+d = b+c$$

eine Äquiv.relation auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit Äquiv.klassen

$$[(a,b)] := \{(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : a+d = b+c\}$$

Menge der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} := \{[(a,b)] : a,b\in\mathbb{N}\}$$

(ii) Für $[(a_1,b_1)], [(a_2,b_2)] \in \mathbb{Z}$ sind die Rechenoperationen

Addition: $[(a_1,b_1)] \oplus [(a_2,b_2)] := [(a_1+a_2, b_1+b_2)] \in \mathbb{Z}$

Multiplikation: $[(a_1,b_1)] \odot [(a_2,b_2)] := [(a_1a_2+b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)] \in \mathbb{Z}$

wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten

(iii) $\oplus$ und $\odot$ sind kommutativ, assoziativ und distributiv (vgl. Lemma 2.5)

(iv) Zudem gilt:

$[(a,a)] \in \mathbb{Z}$ $(a \in \mathbb{N})$ ist neutrales Element von $\oplus$

d.h. $[(a_1,b_1)] \oplus [(a,a)] = [(a_1,b_1)] \quad \forall [(a_1,b_1)] \in \mathbb{Z}$

$\forall [(a,b)] \in \mathbb{Z}$ gilt: $[(b,a)]$ ist inverses Element bzg $\oplus$

d.h. $[(a,b)] \oplus [(b,a)] = [(1,1)]$.

Dies legt nahe:

2.13 Definition Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\textcircled{n} := [(1+n,1)] \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_+ := \{\textcircled{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\textcircled{0} := [(1,1)] \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{-n} := [(1,1+n)] \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_- := \{\textcircled{-n} : n \in \mathbb{N}\}$$

2.14 Satz (i) Die Abb. $\begin{matrix} \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+ \\ n \mapsto \textcircled{n} \end{matrix}$ ist eine Bijektion

und $\forall [(a,b)] \in \mathbb{Z}$ gilt genau 1 der 3 Aussagen

$$[(a,b)] \begin{cases} \in \mathbb{Z}_+ \\ = \textcircled{0} \\ \in \mathbb{Z}_- \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Rechtfertigung der Notation

$$\textcircled{z} := [(a,b)], \quad \textcircled{-z} := [(b,a)]$$

(ii) Verträglichkeit von $\bigcirc$ mit $+$ und $\cdot$:

$\forall n, m \in \mathbb{N}$:

- $\textcircled{n+m} = \textcircled{n} \oplus \textcircled{m}$
- $\textcircled{n \cdot m} = \textcircled{n} \odot \textcircled{m}$

(iii) Setzt man $\textcircled{z_1} \ominus \textcircled{z_2} := \textcircled{z_1} \oplus \textcircled{-z_2}$ für $\textcircled{z_1}, \textcircled{z_2} \in \mathbb{Z}$ so gelten alle aus der Schule bekannten Rechenregeln für $\oplus, \ominus, \odot$ auf $\mathbb{Z}$.

(iv) Via $\textcircled{z_1} \textcircled{\le} \textcircled{z_2} :\Leftrightarrow \exists \textcircled{n} \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\textcircled{0}\} : \textcircled{z_2} = \textcircled{z_1} + \textcircled{n}$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$ erklärt und

$(\mathbb{Z}, \textcircled{\le})$ ist total geordnet.

Verträglichkeit: $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ist $\textcircled{n} \textcircled{\le} \textcircled{m} \Leftrightarrow n \le m$

2.15 Bemerkung • Von nun an werden alle $\bigcirc$ weggelassen!

- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist abelsche Halbgruppe.
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist abelsche Gruppe.

(vergl. Lin. Alg.!).

2.3 Rationale Zahlen

Nur die Strategie wird vorgestellt - wie in Kap. 2.2!

Idee: jede rat. Zahl ist Bruch „$\frac{a}{b}$“ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.

Probleme:
- Division noch nicht def.
- nicht eindeutige Darstellung „$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$“ $\Leftrightarrow 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$

2.16 Satz (i) Für $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, def.

$$(a,b) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} (c,d) :\Leftrightarrow ad = bc$$

eine Äquiv. rel. auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ mit Äquiv. klassen

$$[(a,b)] := \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (c,d) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} (a,b)\}$$

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} := \{[(a,b)] : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$

(ii) Addition $[(a_1, b_1)] \boxplus [(a_2, b_2)] := [(a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2)]$ und

Multiplikation $[(a_1, b_1)] \boxdot [(a_2, b_2)] := [(a_1 a_2, b_1 b_2)]$

sind wohldefiniert.

(iii) $\boxplus$ und $\boxdot$ sind kommutativ, assoziativ und distributiv

(iv) $[(0,1)] \in \mathbb{Q}$ ist neutrales Element von $\boxplus$,

$[(-a,b)] \in \mathbb{Q}$ ist inverses Element von

$[(a,b)] \in \mathbb{Q}$ bzgl. $\boxplus$

(v) $[(1,1)]$ ist neutrales Element von $\mathbb{Q}$ bzgl. $\boxed{\cdot}$ und $\forall\, [(a,b)] \in \mathbb{Q}\setminus\{[(0,1)]\}$ ist $[(b,a)] \in \mathbb{Q}\setminus\{[(0,1)]\}$ inverses Element bzgl. $\boxed{\cdot}$.

Zusammenfassung (i) - (v) : $\mathbb{Q}$ ist Körper (vgl. Lin. Alg.)

(vi) $(\mathbb{Q}, \boxed{\leq})$ ist angeordneter Körper, wobei

$$[(a_1,b_1)] \boxed{\leq} [(a_2,b_2)] :\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}_0 \ (:= \mathbb{N}\cup\{0\}),\ n \in \mathbb{N}:$$

$$[(a_2,b_2)] = [(a_1,b_1)] \boxed{+} [(m,n)]$$

Die Ordnung ist verträglich mit der auf $\mathbb{Z}$

(Def. von $\boxed{<}$, $\boxed{>}$, $\boxed{\geq}$ wie in Def. 2.6)

2.17 Definition

- Für $[(a_1,b_1)], [(a_2,b_2)] \in \mathbb{Q}$:

$$[(a_1,b_1)] \boxed{-} [(a_2,b_2)] := [(a_1,b_1)] \boxed{+} [(-a_2,b_2)] \in \mathbb{Q}$$

- Für $[(a_1,b_1)] \in \mathbb{Q}$, $[(a_2,b_2)] \in \mathbb{Q}\setminus\{[(0,1)]\}$:

$$\frac{[(a_1,b_1)]}{[(a_2,b_2)]} := [(a_1,b_1)] \boxed{\cdot} [(b_2,a_2)] \in \mathbb{Q}$$

- für $z \in \mathbb{Z}$ sei $z := [(z,1)] \in \mathbb{Q}$

2.18 Satz Unter Weglassung aller „$\square$“ (ab sofort!) gilt

$$\frac{a}{b} = [(a,b)] \quad \forall a \in \mathbb{Z},\ \forall b \in \mathbb{Z}^*,$$ sowie

alle bekannten Rechenregeln für

$$+, -, \cdot, /, \leq, <, >, \geq \ !$$

2.19 Lemma

(i) Die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ ist Archimedisch, d.h.

$$\forall q, r \in \mathbb{Q},\ q, r > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } q < nr$$

(ii) Dichte: $\forall q, r \in \mathbb{Q}$ mit $q < r$ $\exists s \in \mathbb{Q} : q < s < r$

Beweis:

(i) Schreibe $q = \frac{a}{g}$, $r = \frac{b}{g}$ mit $a, b, g \in \mathbb{N}$ (gem. Nenner)

$\Rightarrow$ Beh. ($\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : a < nb$) wahr: wähle $n = a+1$

(ii) Klar. wähle $s := \frac{q+r}{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ • $s = q + \underbrace{\frac{r-q}{2}}_{>0} \Rightarrow s > q$

• $r = s + \underbrace{\frac{r-q}{2}}_{>0} \Rightarrow r > s$ ■

2.20 Definition

• Sei $q \in \mathbb{Q}$

(Absolut-) Betrag $|q| := \begin{cases} q, & q \geq 0 \\ -q, & q < 0 \end{cases}$

• Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$.

$\min(q_1, q_2) := \begin{cases} q_1, & q_1 \leq q_2 \\ q_2, & q_2 \leq q_1 \end{cases}$ | $\max(q_1, q_2) = \begin{cases} q_1, & q_1 \geq q_2 \\ q_2, & q_2 \geq q_1 \end{cases}$

Somit $|q| = \max(q, -q) \geq 0$.

$\boxed{\text{2.21 Satz}}$ Für $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ gilt

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(B1)} & \forall q \in \mathbb{K} \text{ ist } |q| \geq 0 \text{ und} \\ & \quad |q| = 0 \iff q = 0 \\ \text{(B2)} & \forall q_1, q_2 \in \mathbb{K}: \quad |q_1 q_2| = |q_1| \cdot |q_2| \\ \text{(B3)} & \forall q_1, q_2 \in \mathbb{K}: \quad |q_1 + q_2| \leq |q_1| + |q_2| \\ & \quad \text{(Dreiecks-Ungl.)} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \mathbb{Q} \text{ ist} \\ \underline{\text{bewerteter}} \\ \underline{\text{Körper}} \end{array}$$

Beweis: • (B1) aus Def. von $|q|$ klar!

• (B2) Sei $q_j = s_j r_j$ $(j = 1,2)$ mit $r_j \geq 0$ und $s_j \in \{+1, -1\}$

$$\Rightarrow \quad |q_1 q_2| = |s_1 s_2 r_1 r_2| = \underbrace{\underbrace{|s_1 s_2|}_{\in\{\pm 1\}}}_{1} \underbrace{r_1}_{|s_1 r_1|} \underbrace{r_2}_{|s_2 r_2|} = |q_1| \cdot |q_2| \quad \checkmark$$

• (B3) da $q_1 \leq |q_1| \wedge q_2 \leq |q_2|$

$$\Rightarrow \quad q_1 + q_2 \leq |q_1| + |q_2| \qquad (1)$$

andererseits: $-q_1 \leq |q_1| \wedge -q_2 \leq |q_2|$

$$\Rightarrow \quad -(q_1 + q_2) \leq |q_1| + |q_2| \qquad (2)$$

$$\overset{(1) \wedge (2)}{\Longrightarrow} \quad \max\left(q_1 + q_2, -(q_1 + q_2)\right) \leq |q_1| + |q_2|$$

∎

$\mathbb{Q}$ ist aber leider nicht groß genug:

2.22 Satz $\nexists c \in \mathbb{Q}$ mit $c^2 = 2$

Beweis: Wir brauchen: Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade $(:\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k+1)$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad n^2 = \underbrace{\underbrace{(n-1)}_{\text{gerade}} \cdot n}_{\text{gerade}} + \underbrace{n}_{\text{ungerade}} \quad \text{ist ungerade}$$

$(n \in \mathbb{N}$ gerade $:\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k)$

Annahme: $\exists c \in \mathbb{Q}: \quad c^2 = 2$; ohne Einschränkung (o.E.) sei $c > 0$

($c = 0$ nicht möglich; falls $c < 0$ wäre, gilt auch für $\tilde{c} := -c > 0$ dass $\tilde{c}^2 = 2$)

$\Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}$, p und q teilerfremd: $c = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow 2 = c^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$ gerade

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ p gerade, also $p = 2\tilde{p}$ mit $\tilde{p} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow q^2 = 2\tilde{p}^2$ gerade $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ q gerade

$\Rightarrow p, q$ nicht teilerfremd $\lightning$ $\Rightarrow$ Beh. ▨

2.4 Endliche Summen

In diesem Abschnitt, sei $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{Q}$ ein Körper (z.B. $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$; später auch! $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)

2.23 Definition $\forall k \in \mathbb{N}$, sei $a_k \in \mathbb{K}$.

Dann heißt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$ (endliche) Summe

analog: $\forall M \subseteq \mathbb{N}$, M endlich: $\sum_{k \in M} a_k$ Summe der a_k's mit $k \in M$

falls $M = \emptyset$: $\sum_{k \in M} a_k := 0 \quad (\in \mathbb{K})$

2.24 Beispiele

(i) $$\sum_{k=1}^{3} k = 1+2+3 = \sum_{j=1}^{3} j = \sum_{j=0}^{2} (j+1) = \sum_{k=2}^{4} (k-1)$$

Name des Summationsindex ist belanglos!

(ii) $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Bew. Per Ind.

- $n=1$: $1 = 1$ ✓
- $n \to n+1$: $$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k$$ $$= (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$$ per Ind.-ann. $$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$ ✓

(iii) $$\sum_{k=1,\, k \text{ ungerade}}^{2n} k = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Bew. Ind: $n=1$: klar

$n \to n+1$: $$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = 2n+1 + \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$ $$= (2n+1) + n^2 = (n+1)^2$$

per Ind.-ann. $\Rightarrow$ Beh. per Ind.

(iv) geometrische Summe: $\forall q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Beweis: per Induktion oder aus

$$(1-q) \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} q^{k+1}}_{= \sum_{k=1}^{n+1} q^k \text{ (Index verschieben)}} = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \quad \blacksquare$$

2.25 Definition (i) $\forall j \in \mathbb{N}$, sei $a_j \in \mathbb{K}$. Dann heißt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{j=1}^{n} a_j := a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \quad \text{(endliche) } \underline{\text{Produkt}}$$

Speziell für $a \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}_0$: $a^0 := 1$, $a^n := \prod_{j=1}^{n} a$, $n \in \mathbb{N}$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die Fakultät definiert als

$$0! := 1, \qquad n! := \prod_{j=1}^{n} j \quad (= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$$

(iii) Für $q \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{Z}$ sei der Binomialkoeffizent definiert als

$$\binom{q}{k} := \begin{cases} \prod_{j=1}^{k} \frac{q+1-j}{j}, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

und speziell

für $q = n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{q}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

2.26 Binomischer Satz $\forall x,y \in \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Spezialfälle:

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Beweis per Induktion: $n=0$, $n=1$ klar, s.o.

$n \to n+1$: $$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n x + (x+y)^n y$$

- $$(x+y)^n x \underset{\text{Ind. ann.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} \quad (\text{Index „verschieben“ !})$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} \quad \left(\binom{n}{-1} = 0 \right)$$

- $$(x+y)^n y = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \quad (\text{Ind. ann. !})$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \quad \left(\binom{n}{k} = 0 \text{ für } 1 \le n < k,\ n,k \in \mathbb{N} \right)$$

$$\Rightarrow (x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right]}_{= \binom{n+1}{k} \ (\text{Übung!})} x^k y^{n+1-k} \quad \blacksquare$$

$\boxed{2{,}27 \text{ Korollar}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\underset{\nearrow \; x=y=1}{2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} \quad , \quad \underset{\nearrow \; x=-1,\ y=1}{0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}}$$

2.5 Folgen, Grenzwert, Reihen

Im folgenden ist $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ (aber auch, später, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

2.28 Definition

Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\subseteq \mathbb{K})$ $:\Longleftrightarrow$ Abbildung $\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{K} \\ n \mapsto a_n \end{array}$

(auch: $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$)

Analog mit „verschobener Indexmenge": $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(a_n)_{n\geq 10}$

- falls keine Verwechslung der Indexmenge: $(a_n)_n$

2.29 Beispiele

(i) konstante Folge: $(a, a, a, \ldots)$ mit $a \in \mathbb{K}$

(ii) alternierende Folge $((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, \ldots|$

(iii) geometrische Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a \in \mathbb{K}$

(iv) Fibonacci-Folge (rekursiv def.): $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

wobei $a_0 := 0$, $a_1 := 1$, $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$

2.30 Definition

(i) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{K}$ $:\Longleftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\forall \varepsilon \in \mathbb{K}, \varepsilon > 0}^{\text{kurz: } \forall \varepsilon > 0} \; \exists N \in \mathbb{N}: \\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon \end{array} \right.$$

Schreibweise: $\lim\limits_{(n\to\infty)} a_n = a$, $a_n \xrightarrow{(n\to\infty)} a$

Sprechweise: a ist limes oder Grenzwert von $(a_n)_n$

(NB: $N = N(\varepsilon)$ hängt von ε ab!)

(ii) $(a_n)_n$ ist Nullfolge $:\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(iii) $(a_n)_n$ divergent (in $\mathbb{K}$) $:\Leftrightarrow \nexists\, a\in\mathbb{K}: \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

(auch: nicht konvergent)

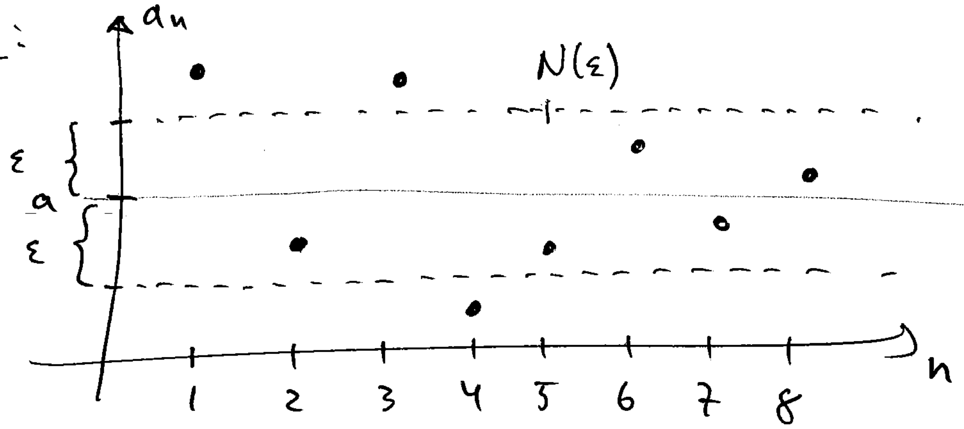
(iv) Spezialfall von (iii):

$(a_n)_n$ divergent nach $\underset{(-)}{+}\infty$ $:\Leftrightarrow \forall s\in\mathbb{N}\ \exists N\in\mathbb{N}:$
$\forall n\geq N$ gilt $a_n > s$
$(a_n < -s)$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \underset{(-)}{+}\infty$

(NB: $N = N(s)$ hängt von s ab!)

Skizze zu (i):



2.31 Beispiele In Bsp. 2.29 gilt:

(i) kgt. gegen a : $N = 1$ mögliche Wahl $\forall \varepsilon > 0$

(iii) divergent : $\varepsilon \leq 1$ erlaubt keine Wahl von N
(was auch immer a)

Beweis: Ann. $\left((-1)^{n+1}\right)_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

$\Rightarrow$ für $\varepsilon = 1\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: |a_n - a| < \varepsilon = 1$

andererseits, $2 = |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1}-a)+(a-a_n)|$

$\overset{2.21\,(B3)}{\leq} |a_{n+1}-a| + |a-a_n| \overset{(n,n+1\geq N)}{<} 1+1 = 2$ ↯ ☒

(iii), (iv) Übung!

Desweiteren:

(v) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge, da für $\varepsilon > 0$ (bel., fest)

$\Rightarrow$ (Lemma 2.19 (i)) $\exists N \in \mathbb{N} : 1 < N\varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq N : \quad 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ ✓

2.32 Satz | Eindeutigkeit des Limes

Sei $(a_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ Folge, seien $a, b \in \mathbb{K}$ und sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Dann ist $a = b$.

Beweis: Ann.: $a \neq b \Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{2}|a-b| > 0$

n. V. $\exists N_a, N_b \in \mathbb{N}$ mit
(1) $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_a$
(2) $|a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_b$

Sei $n \geq N := \max(N_a, N_b)$, dann

$$|a-b| = |(a-a_n)+(a_n-b)| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a-a_n| + |b-a_n| \underset{(1)+(2)}{<} 2\varepsilon = |a-b| \;\lightning$$

$\blacksquare$

2.33 Definition

$$\left.\begin{array}{l}\text{Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} \\ \underline{\text{beschränkt}}\end{array}\right\} :\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{K} \ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq s$$

analog: beschränkt von oben : $a_n \leq s$

" " unten : $a_n \geq -s$

2.34 Satz Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Folge. Dann gilt:

$$(a_n)_n \text{ kgt.} \Rightarrow (a_n)_n \text{ beschränkt.}$$

2.35 Bemerkung Umkehrung von Satz 2.34 i.a. falsch!

Bsp.: $((-1)^{n+1})_n$ beschränkt $(s=1)$, aber divergent (Bsp. 2.31 (ii))

Beweis von Satz 2.34

Sei $\lim a_n = a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |a_n - a| < 1$

$$\Rightarrow |\underbrace{a_n}_{a_n - a + a}| < |a| + 1 \quad \forall n \geq N$$

Setze $s := \max(|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a|+1)$

$$\Rightarrow |a_n| \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \blacksquare$$

Hilfreich beim Berechnen von Limiten:

2.36 Satz Summe u. Produkt krg.'er Folgen

Seien $(a_n)_n, (b_n)_n \subset \mathbb{K}$ kgt'e Folgen mit Limiten a und b.

Dann gilt:

(i) $(a_n + b_n)_n$ ist kgt. und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n) + (\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = a + b$

(ii) $(a_n b_n)_n$ ist kgt. und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = ab$

Beweis: (i) Übung. Hier nur (ii)

Satz 2.34 $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ beschränkt.

$$\Rightarrow \underset{(s\neq 0)}{\exists s \in \mathbb{K}}: |a_n| \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und $|b| \leq s$

Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ bel.

$(a_n)_n, (b_n)_n$ kgt

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \tilde{\varepsilon} \text{ und } |b_n - b| < \tilde{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \leq \underbrace{|a_n|}_{\leq S} \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{< \tilde{\varepsilon}} + \underbrace{|b|}_{\leq S} \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{< \tilde{\varepsilon}} \quad \forall n \geq N$$

Also: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \quad |a_n b_n - ab| < 2S\tilde{\varepsilon} \quad (*)$

Beweiskosmetik: Sei nun $\varepsilon > 0$ bel., wähle $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2S} > 0$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \quad |a_n b_n - ab| < \varepsilon$$

(dies hätte man auch von Anfang an machen können!) ▨

2.37 Satz | Quotient kgt.'er Folgen

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ kgt.'e Folgen mit Limiten a und $b \neq 0$. Dann $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0$ gilt:

(i) $b_n \neq 0$

(ii) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq N_0}$ kgt. mit $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n} = \frac{a}{b}$

Beweis

(i) $b_n \xrightarrow{n \to \infty} b \neq 0 \quad \overset{\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0}{\Longrightarrow} \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : \quad |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$

$$\Rightarrow \forall n \geq N_0 : \quad |b| = |b - b_n + b_n|$$

$$\leq |b - b_n| + |b_n| \quad (\Delta\text{-Ungl.})$$

$$< \frac{|b|}{2} + |b_n|$$

$$\Rightarrow \quad |b_n| > \frac{|b|}{2} > 0 \quad \forall n \geq N_0 \qquad (*)$$

$$\overset{2.21(B1)}{\Longrightarrow} \quad b_n \neq 0 \quad \forall n \geq N_0$$

(ii) es genügt zu zeigen:

$$\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq N_0} \text{ kgt. mit } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

(denn dann folgt die Beh. mit Satz 2.36 (ii))

Also: Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow \exists N \geq \overset{\swarrow \text{aus (i)}}{N_0} : \forall n \geq N \quad |b_n - b| < \varepsilon$

$$\overset{\forall n \geq N_0}{\Rightarrow} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| = \underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{< \frac{2}{|b|} \text{ wegen } (*)} \cdot \frac{1}{|b|} |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \varepsilon$$

(auch ohne Kosmetik!)

$\Longrightarrow$ Beh. ▨

2.38 Beispiele (i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n = \frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2} = \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} \qquad (!)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \underset{\text{Bsp. 2.31(v)}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \quad \Rightarrow$

(a) $\frac{13}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ wg. Satz 2.36 (ii) (& 2.31(i))

(b) $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0$ "

$\Rightarrow \frac{2}{n^2} \to 0$ "

(c) $3 + \frac{13}{n} \to 3$ wg. (a) $\wedge$ Satz 2.36 (i)

(d) $1 - \frac{2}{n^2} \to 1$ wg. (b) $\wedge$ Satz 2.36 (i) (& 2.31(i))

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ wg. (c), (d), Satz 2.37.

(ii) $a_n := n$, $b_n := 1$, $c_n := a_n + b_n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$

$\Rightarrow$ "$\pm\infty$" ist <u>nur</u> formales Symbol def. durch 2.30 (iv), insbes. $\notin \mathbb{K}$ und es liegt keine <u>Konvergenz</u> vor!

Analogon von Satz 2.37 für $b=0$:

2.39 Satz Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Nullfolge und $a_n > 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$ (bzw. $a_n < 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty \qquad (\text{bzw. } -\infty)$$

Beweis: Fall $a_n > 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$ (Fall $a_n < 0$ analog):

Sei $s\in\mathbb{N}$ bel. $\xRightarrow{(a_n)_n \text{ Nullfolge}}$ $\exists N\in\mathbb{N} : \forall n \geq N : 0 < a_n < \frac{1}{s}$

$$\iff \frac{1}{a_n} > s \quad ▨$$

2.40 Satz Verträglichkeit von lim und Ordnung

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ kgt.'e Folgen mit $a_n \leq b_n \ \forall n\in\mathbb{N}$

Dann gilt $$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

Beweis: Wir zeigen „nur": Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ kgt. mit $c_n \geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n \geq 0$

(Beh. folgt dann mit Satz 2.36(i) und $c_n := b_n - a_n$)

Ann.: $\lim_{n\to\infty} c_n = c < 0 \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n\geq N : |\underbrace{c_n}_{\geq 0} - \underbrace{c}_{<0}| < \frac{|c|}{2}$

$$\Rightarrow \quad c_n - c < \frac{-c}{2}$$

$$\Rightarrow \quad c_n < \frac{c}{2} < 0 \quad ↯ \quad ▨$$

2.41 Korollar Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ kgt.'e Folge und sei

$A, B \in \mathbb{K}$, so dass $A \leq a_n \leq B \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Dann gilt $$A \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq B$$

2.42 Warnung Falls sogar $a_n < b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, so folgt doch nur $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ im allgemeinen.

Bsp.: $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Also $b_n > a_n \ \forall n$

und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\boxed{\textbf{2.43 Definition}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \in \mathbb{K}$

- Partialsumme: $S_N := \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$, $N \in \mathbb{N}$
- Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$: Folge $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$
- Summe der Reihe: falls $(S_N)_N$ kgt., setzte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n := \lim\limits_{N\to\infty} S_N$

$\Big\}$ Vorsicht !! Selbes Symbol für 2 versch. Dinge

Jargon: Reihe kgt.

(analog: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ für $k \in \mathbb{Z}$)

2.44 Bemerkung Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Folge,

so ist $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$a_N = a_1 + \sum_{n=2}^{N} (a_n - a_{n-1})$$

„Teleskopsumme"

(Bew.: Üb.!)

2.45 Beispiel Zeige Kgz. der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$ Partialbruchzerlegung

; sei $a_n := -\frac{1}{n+1}$

Somit $-\frac{1}{N+1} = -\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{N}\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)$ und

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad N \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} = \left(\lim_{N\to\infty} -\frac{1}{N+1}\right) + 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bsp. 2.31 (v).}}}{=} 1$$

$\boxed{\text{2.46 Satz}}$ Geometrische Reihe. Sei $q \in \mathbb{R}$

$$\text{Die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ ist } \begin{cases} \text{konvergent} \Leftrightarrow |q| < 1 \\ \text{divergent} \Leftrightarrow |q| \geq 1 \end{cases}$$

Für $|q|<1$ gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} q^n = \frac{1}{1-q}$

Beweis $S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n \quad (N \in \mathbb{N})$

1. Fall $q = 1 \Rightarrow S_N = N+1 \xrightarrow{N\to\infty} +\infty$ (diverg. nach $+\infty$)

2. Fall $q = -1 \Rightarrow S_N = \begin{cases} 1, & N \text{ gerade} \\ 0, & N \text{ ungerade} \end{cases}$

$\Rightarrow$ divergent.

3. Fall $|q| > 1$ oder $|q| < 1$ $\Rightarrow S_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ (gültig $\forall q \neq 1$ 2.24 (iv))

Es gilt $q^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 0$ für $|q| < 1$, und ist divergent für $|q| > 1$. Von 2.36 & 2.37, $\frac{1-q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{1-q}$

(2.29(iii) & Üb!).

für $|q| < 1$ ∎

2.47 Definition Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Folge

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge (oder Fundamentalfolge) $:\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$

(„alle Glieder rücken schließlich zusammen")

notwendig für Konvergenz ...

2.48 Satz Sei $(a_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ kgt.'e Folge

$\Longrightarrow$ $(a_n)_n$ ist Cauchy-Folge

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\overset{\text{Kgz.}}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall n, m \geq N : \; |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$ ∎

Die Umkehrung von Satz 2.48 gilt nur in den allerbesten Welten ...

2.49 Definition Sei $\mathbb{K}$ ein bewerteter Körper

$\mathbb{K}$ vollständig $:\Longleftrightarrow$ Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert

2.50 Satz $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig !

Beweis: Heron-Verfahren (= babylonisches Wurzelziehen)

Sei $0 < c \in \mathbb{Q}$. Def. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ durch

$$a_1 := 1$$
$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

wohldef. da $\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \bullet\ a_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}\right\}$ Bew. per Induktion

1. Beh.: $a_n^2 \geq c \quad \forall n \geq 2$

da $a_{n+1}^2 = \left[\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)\right]^2 \underset{\nearrow}{\geq} a_n \cdot \frac{c}{a_n} = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Üb.: $\left[\frac{1}{2}(q+r)\right]^2 \geq qr$

2. Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = c$ und $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Def. „Fehler": $f_n := a_n^2 - c \overset{\swarrow \text{1. Beh.}}{\geq} 0 \quad \forall n \geq 2$

$$\Rightarrow f_{n+1} + c = a_{n+1}^2 = \left[\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2c + \frac{c^2}{a_n^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(f_n + c + 2c + \frac{c^2}{f_n + c}\right)$$

Aber $\dfrac{c^2}{f_n + c} = \dfrac{c^2 + f_n c}{f_n + c} - \underbrace{\dfrac{f_n c}{f_n + c}}_{\geq 0} \leq c$

damit

$$f_{n+1} + c \leq c + \frac{1}{4} f_n \quad \forall n \geq 2$$

$\Rightarrow \quad 0 \le f_{n+1} \le \frac{1}{4} f_n \quad \forall n \ge 2$

$\Rightarrow \quad \bullet \quad 0 \le f_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} f_2 \qquad \forall n \ge 2$

$\uparrow$ unabh. von n

Nullfolge

$\Rightarrow (f_n)_n$ Nullfolge nach Satz 2.40 $\Rightarrow$ Beh.

$\bullet \quad f_n - f_{n+1} \ge 0 \Rightarrow 0 \le a_n^2 - a_{n+1}^2 = (a_n - a_{n+1})\underbrace{(a_n + a_{n+1})}_{>0}$

$\Rightarrow a_n - a_{n+1} \ge 0.$

3. Beh. $(a_n)_n$ ist Cauchy.

Bew 2. Beh. & Satz 2.48 $\Rightarrow$ $(a_n^2)_n$ ist Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \ge N:$

$$|a_n^2 - a_m^2| < \varepsilon$$

i.e. $\quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{a_n + a_m} \quad (*)$

Wähle $\ell \in \mathbb{N}$ so groß, dass $c \ge \frac{1}{\ell^2} \xRightarrow{\text{1. Beh}} a_n \ge \frac{1}{\ell} \quad \forall n \ge 2$

$(*) \Rightarrow \quad |a_n - a_m| < \frac{\ell}{2} \varepsilon \quad (\forall n, m \ge N).$ ✓

4. Beh: $(a_n)_n$ divergent in $\mathbb{Q}$ für $c = 2$

Ann.: $\exists a \in \mathbb{Q} : a_n \xrightarrow{n \to \infty} a$

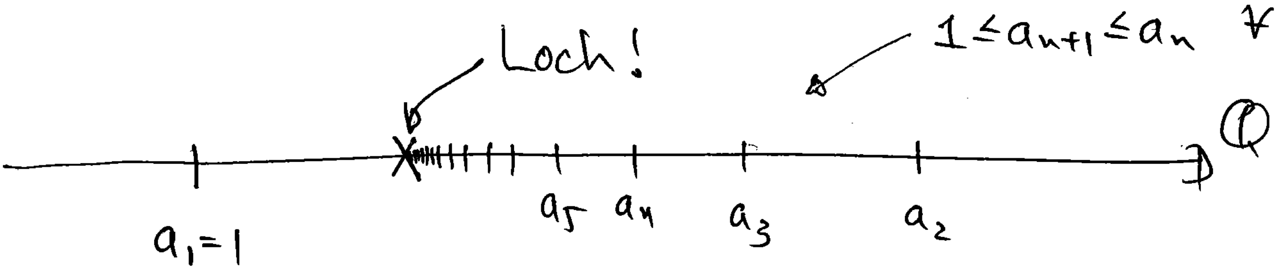
$\xRightarrow{\text{Satz 2.36 (ii)}} \quad a^2 = \lim_{n \to \infty} a_n^2 \underset{\uparrow \text{ 2. Beh. (\& 2.32)}}{=} c = 2$

Somit ↯ zu Satz 2.22

3. und 4. Beh $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ nicht vollständig.

Moral für $c = 2$:

aus 1. & 2. Beh.: $1 \le a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \ge 2$



2.6 Reelle Zahlen

Ziel: Menge $\mathbb{Q}$ hat „Löcher". Vervollständige $\mathbb{Q}$ durch Hinzunahme der Löcher zu einer „kontinuierlichen Zahlengerade ohne Löcher".

Frage: Mit welchem math. Objekt kann man das Loch eindeutig beschreiben?

Antwort: Cauchy-Folge (denn Loch ist dort, wo sich die Folgenglieder verdichten)

Problem: $\exists$ versch. Cauchy-Folgen, die sich am selben Loch verdichten. Ausweg...

2.51 Definition (i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ Cauchy-Folgen

Via
$$(a_n)_n \sim (b_n)_n :\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0 \in \mathbb{Q}$$
ist eine Äquivalenzrelation auf
$$CF(\mathbb{Q}) := \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} : (a_n)_n \text{ ist Cauchy-Folge} \}$$
erklärt (Checken!)

(ii) Menge der reellen Zahlen
$$\mathbb{R} := CF(\mathbb{Q})/_{\sim} \qquad \text{(Quotientmenge)}$$

„$\mathbb{R}$ ist verrollständigung von $\mathbb{Q}$"

2.52 Bemerkung (i) Vervollständigung ist sehr wichtiges Konzept in der modernen Analysis.

(ii) Da $\forall (a_n)_n \in CF(\mathbb{Q})$ und $\forall q \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = q \iff (a_n)_n \in [(q,q,q,\dots)]$$

(Beweis: Übung!), ist es üblich via

$$i: \begin{array}{l} \mathbb{Q} \longrightarrow i(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} \\ q \longmapsto [(q,q,q,\dots)] \end{array} \quad (\underline{\text{Einbettungsabb.}})$$

$\mathbb{Q}$ selbst als Teilmenge von $\mathbb{R}$ anzusehen, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, und q statt $[(q,q,q,\dots)]$ zu schreiben.

2.53 Definition

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit Repräsentanten $\overset{\in x}{(a_n)_n}, \overset{\in y}{(b_n)_n} \in CF(\mathbb{Q})$

(i) $$x + y := [(a_n + b_n)_n] \in \mathbb{R}$$
$$x \cdot y := [(a_n b_n)_n] \in \mathbb{R}$$

(ii) $$x \leq y :\iff \exists \text{ Nullfolge } (y_n)_n \subseteq \mathbb{Q} : a_n \leq b_n + \underbrace{y_n}_{\text{o.E.} \geq 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x < y :\iff (x \leq y \wedge x \neq y)$$
$$\iff \exists N \in \mathbb{N}\ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\ \forall n \geq N \quad a_n < q_1 < q_2 < b_n$$

Checken! ↗
(analog $\geq, >$)

2.54 Lemma Obiges ist wohldef., d.h. unabh. von der Wahl der Repräsentanten, und

$$(a_n + b_n)_n,\ (a_n b_n)_n \in CF(\mathbb{Q}).$$

Beweis: (i) "+"

- Sei $c_n := a_n + b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ und, n. V. ($(a_n)_n \wedge (b_n)_n$ Cauchy): $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall m,n \geq N: |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow |c_n - c_m| = |a_n - a_m + b_n - b_m| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|a_n - a_m|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b_m|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$< \varepsilon \Rightarrow (c_n)_n \text{ Cauchy.}$$

- Seien $(\tilde{a}_n)_n \in x$, $(\hat{b}_n)_n \in y$ andere Repräsentanten d.h. $(\tilde{a}_n - a_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ und $(\tilde{\hat{b}}_n - b_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$$\text{Setze } \tilde{c}_n := \tilde{a}_n + \tilde{\hat{b}}_n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (\underbrace{\tilde{c}_n - c_n}_{(\hat{a}_n - a_n) + (\hat{b}_n - b_n)}) \overset{\text{Satz 2.36 (i)}}{=}$$

$$= \lim_{n \to \infty} (\hat{a}_n - a_n) + \lim_{n \to \infty} (\hat{b}_n - b_n) = 0 + 0 = 0 \quad ✓$$

"$\cdot$" ähnlich. (ii) siehe Übung! ■

$\boxed{\text{2.55 Satz}}$ (i) $\mathbb{R}$ ist ein Körper mit $1 = [(1,1,1,\dots)]$ und $0 = [(0,0,0,\dots)]$ (vgl. 2.52 (ii))

(ii) $(\mathbb{R}, \leq)$ ist total geordnet und $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt genau 1 der 3 Aussagen: $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$.

(iii) Die Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist archimedisch (vgl. Lemma 2.19 (i))

(iv) $\mathbb{R}$ ist bewerteter Körper mit Absolutbetrag

$$|\cdot| : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \end{array}$$

(d.h. es gilt (B1) - (B3) aus Satz 2.21)

Alle Operationen auf $\mathbb{R}$ sind verträglich mit denen auf $\mathbb{Q}$.

Beweis Strategie: führe auf entsprechende Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ zurück!

exemplarisch für (i) & (ii): "+" kommutativ:

$$\underbrace{x}_{[(a_n)_n]} + \underbrace{y}_{[(b_n)_n]} = [(\underbrace{a_n + b_n}_{b_n + a_n})_n] = [(b_n)_n] + [(a_n)_n] = y + x \quad ✓$$

da + in $\mathbb{Q}$ komm.

(iii) z.z. $\forall \varepsilon, R \in \mathbb{R}, \ \varepsilon, R > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : R < \varepsilon n$

Sei $\varepsilon = [(\delta_n)_n]$, $R = [(q_k)_k]$

- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{Q}, \delta > 0 \ \exists K \in \mathbb{N} \ \forall k \geq K : \delta_k > \delta \ (\geq \frac{\delta}{2} > 0)$
- $(q_k)_k \in CF(\mathbb{Q}) \underset{\text{Übung!}}{\Rightarrow} (q_k)_k$ beschränkt, also $\exists q \in \mathbb{Q} : |q_k| < q \ \forall k$ (insbes. $q > 0$)

$\overset{\mathbb{Q} \text{ archim.}}{\Longrightarrow} \quad \exists n \in \mathbb{N} : q < n\delta$

$\Rightarrow \quad q_k < q < n\delta < n\delta_k \ \forall k \geq K \quad \Leftrightarrow \quad R < n\varepsilon \quad ✓$

(iv) Hilfsbehauptung: $\forall (a_n)_n \in CF(\mathbb{Q})$ ist $(|a_n|)_n \in CF(\mathbb{Q})$ und

$$\underbrace{|\underbrace{[(a_n)_n]}_{x \in \mathbb{R}}|}_{\text{Betrag in } \mathbb{R}} = [(\underbrace{|a_n|}_{\text{Betrag in } \mathbb{Q}})_n] \qquad (*)$$

denn: • $||a_n| - |a_m|| \underset{\text{untere } \Delta\text{'s-Ungl. (Üb. 1, Blatt 4)}}{\leq} |a_n - a_m| \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

- 1. Fall: $x \geq 0$ zu zeigen: $(a_n)_n \sim (|a_n|)_n$

da $x \geq 0$ $\exists$ Nullfolge $(\overset{\text{o.E.} > 0}{\eta_n})_n \subseteq \mathbb{Q} : 0 \leq a_n + \eta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq |a_n| - a_n = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \\ -2a_n, & a_n < 0 \end{cases} \leq 2\eta_n$$

$\overset{\text{Satz 2.40}}{\Longrightarrow} \quad (|a_n| - a_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ ist Nullfolge. ✓

- 2. Fall: $x < 0$: analog

nun zu (B1) - (B3): (B1): • $|x| \geq 0$ klar per. Def.

• $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ "$\Leftarrow$" klar per. Def.

"$\Rightarrow$" $0 = \underset{[(a_n)_n]}{|x|} \overset{(*)}{=} [(|a_n|)_n] \Rightarrow (|a_n|)_n \sim (0,0,0,\dots)$

$$\Updownarrow$$

$(\underbrace{||a_n|-0|}_{|a_n-0|})_n$ ist Nullfolge

$\Rightarrow (a_n)_n \sim (0,0,0,\dots)$, d.h. $x = 0$ ✓

(B2) $|xy| = |\underbrace{[(a_n)_n]\cdot[(b_n)_n]}_{[(a_nb_n)_n]}| \overset{(*)}{=} [(\underbrace{|a_nb_n|}_{|a_n||b_n|})_n] = [(|a_n|)_n]\cdot[(|b_n|)_n]$

(B2) in $\mathbb{Q}$

$\overset{(*)}{=} |[(a_n)_n]|\cdot|[(b_n)_n]| = |x|\cdot|y|$

(B3) $|x+y| = |\underbrace{[(a_n)_n]+[(b_n)_n]}_{[(a_n+b_n)_n]}| \overset{(*)}{=} [(\underbrace{|a_n+b_n|}_{\leq |a_n|+|b_n|})_n]$ (B3) in $\mathbb{Q}$

Def. von $\leq$ in $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $\leq [(|a_n|)_n] + [(|b_n|)_n] \overset{(*)}{=} |[(a_n)_n]| + |[(b_n)_n]|$

$= |x|+|y|$.

Verträglichkeit der Operationen auf $\mathbb{R}$ für Elemente aus $\mathbb{Q}$: nachprüfen mittels $q = [(q,q,q,\dots)] \in \mathbb{R}$ (Übung!) ■

2.56 Definition (i) $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ Folge $:\Leftrightarrow$ Abb.: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto x_n$

(ii) $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x :\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \underline{\mathbb{R}}, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: |x_n - x| < \varepsilon$$

$<$ in $\mathbb{R}$

2.57 Bemerkung!! Kap. 2.5 (& Kap 2.4!) über Folgen & Reihen verwendet nicht, dass $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, nur dass $\mathbb{K}$ bewerteter, archimedisch geordneter Körper

$\Rightarrow$ alles dort gilt auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (!!)

2.58 Satz Sei $(q_n)_n \in CF(\mathbb{Q})$ und $x := [(q_n)_n] \in \mathbb{R}$

Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} [(q_n, q_n, q_n, \dots)] = x$ (Kgz. in $\mathbb{R}$)

hierzu mit Notation 2.52(ii): $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$.

Bew. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \overset{\mathbb{R}\text{ archim.}}{\Longrightarrow} \exists k \in \mathbb{N} : 1 < \varepsilon k$

per Def. Cauchy-Folge (in $\mathbb{Q}$): $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n,m \geq N : |q_n - q_m| \underset{\uparrow}{<} \frac{1}{k}$

(verwendet $1/k \in \mathbb{Q}$!)

für $n \in \mathbb{N}$ sei $y_n := x - [(q_n, q_n, \dots)]$ $(= x - q_n)$

$$= [(q_m)_m] - [(q_n)_m] = [(q_m - q_n)_m]$$

(*) im Bew. von Satz 2.55(iv) $\Longrightarrow$ $|y_n| = [(|q_m - q_n|)_m] \overset{\forall n \geq N}{\Longrightarrow} |y_n| \leq \frac{1}{k} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \quad (\text{in } \mathbb{R}) \qquad \blacksquare$$

Moral: alle Cauchy-Folgen aus $\mathbb{Q}$ konvergieren in $\mathbb{R}$
(„Löcher in $\mathbb{Q}$ gestopft")

2.59 Definition Sei $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq -n_0$ sei $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

b-adischer Bruch: Reihe $\pm \sum\limits_{n=-n_0}^{\infty} a_n \frac{1}{b^n}$

b=10: Decimalbruch
b=2: dyadischer Bruch

2.60 Satz Sei $(S_N)_{N \geq -n_0} \subseteq \mathbb{Q}$ Folge der Partialsummen des b-adischen Bruches aus Def. 2.59. Dann gilt: $(S_N)_{N \geq -n_0} \in CF(\mathbb{Q})$, somit $x := [(S_N)_{N \geq -n_0}] \in \mathbb{R}$ und nach Satz 2.58 auch $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = x$ (Kgz. in $\underline{\mathbb{R}}$).

Beweis: $S_N = \pm \sum_{n=-n_0}^{N} a_n \frac{1}{b^n} \in \mathbb{Q}$ für $N \geq -n_0$

Δ-Ungl. & $\left|\frac{a_n}{b}\right| \leq 1$

Sei $M, N \in \mathbb{N}$, $M \leq N \Rightarrow$

$$|S_N - S_M| = \left| \pm \sum_{n=M+1}^{N} a_n \frac{1}{b^n} \right| \leq \sum_{n=M+1}^{N} \frac{1}{b^{n-1}} \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{b^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{b^M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^M} \frac{1}{1-\frac{1}{b}} \leq \frac{2}{b^M} \quad (\text{da } b \in \mathbb{N}\setminus\{1\})$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \tilde{N} \in \mathbb{N} : \frac{2}{b^{\tilde{N}}} < \varepsilon \Rightarrow |S_N - S_M| < \varepsilon \;\; \forall N, M \geq \tilde{N}$ ■

$\boxed{\text{2-61 Satz}}$ Sei $b \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann $\exists$ b-adischer Bruch, so dass $x = \pm \sum_{n=-n_0}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$ (Kgz. in $\mathbb{R}$)

Moral: Jedes $x \in \mathbb{R}$ lässt sich beliebig gut durch rationale Zahlen approximieren

- $\mathbb{R}$ ist z. B. Menge aller Dezimalbrüche ($b = 10$):

$$\pm \sum_{n=-n_0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \pm\, a_{-n_0} \ldots a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots$$

Beweis von Satz 2-61: Sei $x \in \mathbb{R}$, o. E. $x > 0$

$\mathbb{R}$ archimedisch geordnet (Satz 2-55 (ii)) und $b > 1$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : \; x < b^{m+1}$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ kleinste nat. Zahl, für die das wahr.

Beh. $\forall N \in \mathbb{Z}, N \geq -n_0, \forall n \in \{-n_0, -n_0+1, \ldots, N\}$

$\exists a_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und $\exists \xi_N \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \xi_N < b^{-N}$:

$$x = \sum_{n=-n_0}^{N} \frac{a_n}{b^n} + \xi_N$$

Aus beh. $\Rightarrow$ Satz, da $\lim_{N\to\infty} \xi_N = 0$, also

verbleibt:

<u>Bew. der Beh.:</u> per Ind. nach N

Ind. anf.: $N = -n_0$: nach Def. von n_0 gilt

$$0 \le x b^{-n_0} < b$$

$\Rightarrow \exists!\, a_{-n_0} \in \{0,1,\dots,b-1\}: \quad x b^{-n_0} = a_{-n_0} + \delta$

wobei $0 \le \delta < 1$

setze $\xi_{-n_0} := b^{n_0}\delta$, also $0 \le \xi_{-n_0} < b^{n_0} \quad (= b^{-N})$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a_{-n_0}}{b^{-n_0}} + \xi_{-n_0} \quad \checkmark$$

Ind.schritt: $N \to N+1$: Sei $x = \sum_{n=-n_0}^{N} \frac{a_n}{b^n} + \xi_N$

mit $0 \le \xi_N < b^{-N} \Rightarrow 0 \le \xi_N b^{N+1} < b$

$\Rightarrow \exists!\, a_{N+1} \in \{0,1,\dots,b-1\}: \quad \xi_N b^{N+1} = a_{N+1} + \tilde{\delta}$

wobei $0 \le \tilde{\delta} < 1$

Setze $\xi_{N+1} := \tilde{\delta} b^{-(N+1)} \Rightarrow 0 \le \xi_{N+1} < b^{-(N+1)}$

und
$$x = \sum_{n=-n_0}^{N} \frac{a_n}{b^n} + \underbrace{\xi_N}_{= \frac{a_{N+1}}{b^{N+1}} + \xi_{N+1}} = \sum_{n=-n_0}^{N+1} \frac{a_n}{b^n} + \xi_{N+1} \quad \checkmark$$

▨

$\boxed{\text{2.62 Satz}}$ (Cauchy)

$\mathbb{R}$ ist voll<u>ständig</u>, d.h. jede Cauchy-Folge $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert (in $\mathbb{R}$).

- Rechtfertigt $\mathbb{R}$ als „Vervollständigung" von $\mathbb{Q}$ zu nennen (Def. 2.51(ii))
- einziger Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$

Beweis von Satz 2.62. Sei $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ Cauchy bel. fest.

1. Akt: Konstruktion von $(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ als Kandidat für Grenzwert x

$x_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\ (\tau_k^{(n)})_k \in CF(\mathbb{Q})$ mit $x_n = [(\tau_k^{(n)})_k]$

$$\overset{\text{Satz 2.58}}{\Rightarrow} \quad \lim_{k\to\infty} \tau_k^{(n)} = x_n \ \forall n \qquad (0)$$

o.E. gelte $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall k_1,k_2 \in \mathbb{N} \quad |\tau_{k_1}^{(n)} - \tau_{k_2}^{(n)}| < \frac{1}{n}$ (1)

(geht immer für k_1, k_2 groß genug, da $(\tau_k^{(n)})_k$ Cauchy; streiche Anfangsglieder weg $\Rightarrow$ gültig $\forall k_1, k_2$)

setze $q_n := \tau_n^{(n)}\ \forall n\in\mathbb{N}$: Diagonalfolge $(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$

2. Akt: $(q_n)_n \in CF(\mathbb{Q})$.

Sei $\varepsilon\in\mathbb{Q}, \varepsilon>0$. $(x_n)_n$ Cauchy $\Rightarrow \exists\ \tilde{N} \in \mathbb{N}\ \forall m,n\geq\tilde{N}: |x_m-x_n|<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}: \forall m,n > N := \max(\tilde{N}, 1/\varepsilon)$ gilt

$$|q_m-q_n| = |\tau_m^{(m)} - \tau_k^{(m)} + \tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)} + \tau_k^{(n)} - \tau_n^{(n)}|$$

$$\overset{(1)}{<} \frac{1}{m} + |\tau_k^{(m)}-\tau_k^{(n)}| + \frac{1}{n}$$

$$< 2\varepsilon + |\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)}| \qquad (2)$$

Da $\quad x_m - x_n = [(\tau_k^{(m)} - \tau_k^{(n)})_k] \quad$ und

$$|x_m-x_n| = [(|\tau_k^{(m)}-\tau_k^{(n)}|)_k] < \varepsilon \quad (\forall m,n\geq\tilde{N})$$

folgt: $\exists K\in\mathbb{N}\ \forall k\geq K: \quad |\tau_k^{(m)}-\tau_k^{(n)}|<\varepsilon \quad (\ " \ )$

Wähle $k\geq K$ in (2), dann:

$$\forall m,n\geq N: \quad |q_m-q_n| < 3\varepsilon \qquad \checkmark$$

3. Akt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ in $\mathbb{R}$

wobei $x := [(q_n)_n] \in \mathbb{R}$ (3)

Aus (0) $\wedge$ (1) mit $k_1 = n$ und $k_2 \to +\infty$: $|q_n - x_n| \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} |q_n - x_n| = 0$ (in $\mathbb{R}$) (4)

(3) $\underset{\text{Satz 2-58}}{\Rightarrow}$ $\lim\limits_{n\to\infty} |q_n - x| = 0$ (in $\mathbb{R}$) (5)

(NB: $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |q_n - x| = 0$)

Aber:

$$0 \leq |x_n - x| \leq |x_n - q_n| + |q_n - x|$$

$\overset{(5),(4)}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ■

Ab jetzt:
- wird **nicht** mehr benötigt, dass $\mathbb{R} \ni x = [(q_n)_n]$ (!!)
- „$\varepsilon > 0$" abkürzend für $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

2.63 Definition Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Fkt.

f (monoton) $\left\{\begin{array}{l}\text{wachsend [auch: isoton]}\\ \text{fallend [auch: antiton]}\end{array}\right\}$ $:\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2$ $f(x_1) \underset{\geq}{\leq} f(x_2)$

f streng/strikt (monoton) wachsend [auch: strikt isoton] / fallend [auch: strikt antiton]

$:\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2:\\ f(x_1) \underset{>}{<} f(x_2)\end{array}\right.$

[$D = \mathbb{N} \rightsquigarrow$ (reelle) Folgen]

$\boxed{\text{2-64 Satz}}$ Sei $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ isoton. Dann gilt

$$(x_n)_n \text{ kgt.} \iff (x_n)_n \text{ von oben beschränkt}$$

Analog: für antiton und von unten beschränkt!

Schreibweise: $x_n \nearrow x$ bzw. $x_n \searrow x$

Beweis: "$\Rightarrow$" Satz 2-34

"$\Leftarrow$" Sei $x_n \le S \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Δ)

Ann: $(x_n)_n$ divergent

(Satz 2.62) $\Rightarrow$ keine Cauchy-Folge, d.h.

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists m, n \ge N : |x_m - x_n| \ge \varepsilon$ (*)

o.E. sei $m > n \Rightarrow x_m - x_n \ge \varepsilon$

$\mathbb{R}$ archim. $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N}: S - x_1 < K\varepsilon$ (**)

nun wähle $N_1 := 1$ in (*) $\Rightarrow \exists m_1 > n_1 \in \mathbb{N} : x_{m_1} - x_{n_1} \ge \varepsilon$

" $N_2 := \max(m_1, n_1) \Rightarrow \exists m_2 > n_2 \ge N_2 : x_{m_2} - x_{n_2} \ge \varepsilon$

⋮

" $N_K := \max(m_{K-1}, n_{K-1}) \Rightarrow \exists m_K > n_K \ge N_K : x_{m_K} - x_{n_K} \ge \varepsilon$ (***)

$$\Rightarrow \quad x_{m_K} - x_{n_1} = \sum_{k=1}^{K} \underbrace{(x_{m_k} - x_{n_k})}_{\ge \varepsilon \ (***)} + \sum_{k=2}^{K} \underbrace{(x_{n_k} - x_{m_{k-1}})}_{\ge 0} \quad \text{isoton } (n_k \ge m_{k-1})$$

$$\ge K \cdot \varepsilon \overset{(**)}{>} S - x_1$$

$$\Rightarrow \quad x_{m_K} > S + \underbrace{x_{n_1} - x_1}_{\ge 0 \text{ (isoton)}} \ge S \quad \lightning \quad (\text{zur } (\Delta))$$

■

2.65 Definition Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ Folge

(i) Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ strikt isotone Folge. ($\Rightarrow n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$)

Dann heißt $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} := (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ Teilfolge von $(x_n)_n$

(ii) $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt (oder -wert) von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

$:\Leftrightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

2.66 Beispiel alternierende Folge $x_n = (-1)^n$

$n_k = 2k \Rightarrow$ Teilfolge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (\underbrace{(-1)^{2k}}_{1})_{k\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow 1$ ist Häufungspunkt von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Analog ($n_k = 2k-1$) ist -1 Häufungspkt von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

2.67 Satz von Bolzano-Weierstraß (Version für $\mathbb{R}$)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte Folge. Dann gilt:

$(x_n)_n$ besitzt konvergente (da monotone) Teilfolge.

Mit anderen Worten: jede beschränkte Folge besitzt mind. einen Häufungspunkt.

Beweis: $m \in \mathbb{N}$ Gipfelstelle von $(x_n)_n :\Leftrightarrow x_m > x_n \ \forall n > m$

1. Fall: $(x_n)_n$ hat ∞-viele Gipfelstellen

$m_1 < m_2 < m_3 < \dots$

$\Rightarrow x_{m_1} > x_{m_2} > x_{m_3} > \dots$, d.h. $(x_{m_k})_k$ ist antitone Teilfolge.

2. Fall: $(x_n)_n$ hat keine oder nur endlich viele Gipfelstellen

Sei $n_1 >$ größte Gipfelstelle (also n_1 ist keine Gipfelstelle!)

$\Rightarrow \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \geq x_{n_1}$ (gäbe es kein solches n_2, wäre n_1 Gipfelstelle)

n_2 keine Gipfelstelle $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : x_{n_3} \geq x_{n_2}$

$\vdots$

d.h. $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist isotone Teilfolge ∎

2-68 Definition Intervalle für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sei

eigentlich
$$\left\{\begin{array}{l} [a,b] := \{x\in\mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad [a,b[:= \{x\in\mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ ]a,b] := \{x\in\mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad]a,b[:= \{x\in\mathbb{R} : a < x < b\} \end{array}\right.$$

uneigentlich.
$$\left\{\begin{array}{l} [a,\infty[:= \{x\in\mathbb{R} : x \geq a\}, \quad]-\infty,a] := \{x\in\mathbb{R} : x \leq a\} \\ ]a,\infty[:= \{x\in\mathbb{R} : x > a\}, \quad]-\infty,a[:= \{x\in\mathbb{R} : x < a\} \end{array}\right.$$

2-69 Satz Intervallschachtelungsprinzip

$\forall k\in\mathbb{N}$ seien $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k < b_k$ und $J_k := [a_k, b_k]$

Es gelte
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ J_{k+1} \subseteq J_k \quad \forall k\in\mathbb{N} \\ \bullet\ \lim\limits_{k\to\infty} \underbrace{|J_k|}_{:= b_k - a_k} = 0 \end{array}\right\} \text{Intervallschachtelung}$$

Dann $\exists!\, x\in\mathbb{R}$ mit $x \in J_k \ \forall k\in\mathbb{N}$. Für dieses x gilt: $a_k \nearrow x$ und $b_k \searrow x$.

Beweis $\forall l, k \in \mathbb{N}$ gilt: $a_k \le b_l$ (*) [sonst wäre $J_k \cap J_l = \emptyset$!]

Da • $(a_k)_k$ isoton und (*)

$\overset{\text{Satz 2.64}}{\Rightarrow}$ $\exists a \in \mathbb{R} : \lim_{k\to\infty} a_k = a$

• $(b_k)_k$ antiton und (*)

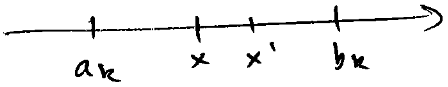
$\Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} : \lim_{k\to\infty} b_k = b$

Satz 2.36

$\Rightarrow$ $a - b = \lim_{k\to\infty} (a_k - b_k) = 0$, $x := a = b$

$$\left.\begin{array}{lll} l \to \infty \text{ in (*)} \Rightarrow & a_k \le x & \forall k \\ k \to \infty \text{ in (*)} \Rightarrow & x \le b_l & \forall l \end{array}\right\} \; x \in J_k \;\; \forall k$$

Eindeutigkeit: es gelte $x, x' \in J_k \; \forall k \Rightarrow$
$|x - x'| \le b_k - a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow x = x'$ ☒



Zum Schluss 2 Anwendungen der Konvergenzsätze:

$\boxed{\text{2.70 Satz}}$ Wurzel

Sei $x \in \mathbb{R}_> :=]0, \infty[$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann
$\exists! \, r \in \mathbb{R}_>$, so dass $r^k = x$.

Schreibweise: $r =: \sqrt[k]{x} =: x^{1/k}$ k'te Wurzel aus x

Beweis: (Verallg. des babylon. Wurzelziehens aus Satz 2.50)

Def. Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_>$ mittels $r_1 := 1$ (Wert $\in \mathbb{R}_>$ spielt keine Rolle!)

$$r_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1) r_n + \frac{x}{r_n^{k-1}} \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Zeige (i) $(r_n)_n$ kgt.

- $r_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Bew. mit Induktion!)

  $\Rightarrow (r_n)_n$ nach unten beschränkt

- antiton, da $\forall n \in \mathbb{N}$

$$r_{n+1} = r_n \left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{x}{r_n^k} - 1\right)\right) =: r_n A_n$$

Bernoulli-Ungl. (Auf. 1(ii) Ü. Blatt 4) für A_n^k $\Rightarrow \quad r_{n+1}^k \geq r_n^k \left(1 + k \cdot \frac{1}{k}\left(\frac{x}{r_n^k} - 1\right)\right) = x$

$\Rightarrow \quad \forall n \geq 2: \quad 0 \leq A_n \leq 1 \qquad \left(\text{da } \frac{x}{r_{n+1}^k} \leq 1\right)$

$\Rightarrow \quad (r_n)_{n \geq 2}$ antiton $\overset{\text{Satz 2.64}}{\Rightarrow}$ Kgz.

(ii) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} r_n\right)^k = x$

$r \geq 0$ wegen $r_n > 0 \ \forall n$

Sei $\quad r := \lim\limits_{n \to \infty} r_n \in \mathbb{R}_{\geq} := [0, \infty[$

Rekursion $\Rightarrow$

$$\begin{array}{lcccl} & r_{n+1} & r_n^{k-1} & = & \frac{1}{k}\left((k-1)\, r_n^k + x\right) \\ & \downarrow & \downarrow & & \quad\downarrow \qquad (\text{Satz } 2.36) \\ \overset{n \to \infty}{\Rightarrow} & r & r^{k-1} & = & \frac{1}{k}\left((k-1)\, r^k + x\right) \end{array}$$

$\Rightarrow \quad r^k = x \quad \Rightarrow \quad r \in \mathbb{R}_> \quad (\text{sonst } x = 0)$

(iii) Eindeutigkeit:

für $r < r' \Rightarrow r^k < (r')^k$ ∎

2.71 Definition Rationale Potenzen

Sei $x \in \mathbb{R}_>$, $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$x^q := \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m \in \mathbb{R}_> \quad (\text{insbes.: } x^0 = 1)$$

außerdem $0^q := \begin{cases} 0, & q \in \mathbb{Q}_> \\ 1, & q = 0 \end{cases}$ (nicht def. für neg. Expon)

2.72 Satz (i) obiges ist wohldef., d.h. unabh. von Darstellung $q = \frac{m}{n} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}_>$, $\forall q, r \in \mathbb{Q}$:

$$(xy)^q = x^q y^q, \quad x^q x^r = x^{q+r}, \quad (x^q)^r = x^{q \cdot r}$$

Beweis: Übung.

2.73 Definition Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

- ε-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$: $U_\varepsilon(a) := \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, \subseteq \mathbb{R}$
- $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungspkt von A $:\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ enthält $U_\varepsilon(a)$ ∞-viele Punkte von A
- A von oben beschränkt $:\Longleftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}: x \leq s \quad \forall x \in A$

  A von unten " : " $x \geq s$ "

s heißt obere (bzw untere) Schranke von A

A beschränkt $:\Longleftrightarrow$ A von oben und unten beschränkt.

2.74 Bemerkungen & Beispiele

(i) genau jedes $a \in [0,1]$ ist Häufungspkt. von $]0;1[$ (auch von $[0,1]$)

(ii) jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspkt. von $\mathbb{Q}$
(z. B. b-adische Bruchapprox. !)

(iii) 0 ist Häufungspkt. von $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(iv) A beschränkt $\iff \exists s \in \mathbb{R} : \forall x \in A : |x| \leq s$

(v) Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt $\iff \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt

2.75 Definition Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $S, I \in \mathbb{R}$

- S Supremum von A (kleinste obere Schranke) $:\iff$
  - S obere Schranke von A
  - $\forall$ obere Schranken S' von A gilt : $S \leq S'$

- I Infimum von A (größte unten Schranke) $:\iff$
  - I untere Schranke von A
  - $\forall$ untere Schranken I' von A gilt : $I' \leq I$

Schreibweise: $S = \sup A$, $I = \inf A$

- S Maximum von A, $S = \max A$ $:\iff S = \sup A \wedge \underline{\underline{S \in A}}$

- I Minimum von A, $I = \min A$ $:\iff I = \inf A \wedge \underline{I \in A}$

$\boxed{\text{2.76 Satz}}$ Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Mit den Vereinbarungen

- $\sup A := -\infty$, $\inf A := +\infty$, falls $\underline{A = \emptyset}$
- $\sup A := +\infty$, falls $A\ (\neq \emptyset)$ nicht von oben beschränkt
- $\inf A := -\infty$, falls $A\ (\neq \emptyset)$ nicht von unten "

gilt: A besitzt genau ein Supremum und Infimum in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Außer in den o.g. Fällen gilt: $\sup A, \inf A \in \mathbb{R}$

Beweis: für sup und $A \neq \emptyset$ von oben beschränkt (inf analog), sei $s_1 \in \mathbb{R}$ obere Schranke von A und $x_1 \in A$. (o.E. $x_1 < s_1$)

1. Akt: $\exists$ Intervalle $[x_1, s_1] \supseteq [x_2, s_2] \supseteq [x_3, s_3] \supseteq \dots\dots$

so dass $\forall n \in \mathbb{N}$:

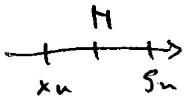
(a) $x_n \in A$

(b) s_n ist obere Schranke von A

(c) $s_n - x_n \leq 2^{-(n-1)}(s_1 - x_1)$

per Induktion: $n = 1$ klar

$n \to n+1$: Setze $M := \frac{1}{2}(x_n + s_n)$



1. Fall: $A \cap \,]M, s_n] = \emptyset \Rightarrow M$ ist obere Schranke und $x_{n+1} := x_n$, $s_{n+1} := M$ erfüllen (a) - (c)

2. Fall: $A \cap \,]M, s_n] \neq \emptyset \Rightarrow$ wähle $x_{n+1} \in A \cap \,]M, s_n]$ $s_{n+1} := s_n \Rightarrow$ (a) - (c) erfüllt ✓

Somit $(s_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ antiton & von unten beschr.

$\overset{\text{Satz 2.64}}{\Longrightarrow}$ $s := \lim\limits_{n \to \infty} s_n \in \mathbb{R}$ existiert

2. Akt: S ist Supremum von A

- Sei $x \in A$ bel. fest $\Rightarrow x \leq s_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x \leq \lim_{n\to\infty} s_n = S$$

$\Rightarrow$ S obere Schranke von A.

- Sei S' obere Schranke von A. Ann.: $S' < S$
$\Leftrightarrow 0 < S - S'$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$:

$$\underset{s_n - x_n}{\underset{\vee\!\shortmid}{2^{-(n-1)}(s_1 - x_1)}} < \underset{s_n - S'}{\underset{\wedge\!\shortmid}{S - S'}} \Leftarrow (s_n)_n \text{ antiton}$$

$\Rightarrow$ $S' < x_n$ ↯ da $x_n \in A$ und S' obere Schranke

also $S \leq S'$

$\Rightarrow$ S supremum (notw. eindeutig!) ☒

2.77 Beispiel: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

- $\sup\,[a,b] = \sup\,[a,b[\; = b$
  $\inf\,[a,b] = \inf\,]a,b] = a$
- $a = \min\,[a,b]$, $b = \max\,[a,b]$
  $[a,b[$ hat kein Max., $]a,b]$ kein Min.

- $\sup\left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1$

2.78 Definition Sei $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$; $y_n^{\overset{+}{(-)}} := \underset{(\inf)}{\sup}\{x_k \in \mathbb{R} : k \geq n\}$

[NB: $(y_n^{\overset{+}{(-)}})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ist antiton (isoton)!]

Limes superior von $(x_n)_n$: $\limsup\limits_{n \to \infty} x_n := \overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, x_n := \lim\limits_{n \to \infty} y_n^+$

Limes inferior von $(x_n)_n$: $\liminf\limits_{n \to \infty} x_n := \underline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, x_n := \lim\limits_{n \to \infty} y_n^-$

falls $\lim\limits_{n \to \infty} y_n^{\overset{+}{(-)}}$ existiert; sonst, d.h. falls

- $(y_n^{\overset{+}{(-)}})_n = (\overset{+}{(-)}\infty, \overset{+}{(-)}\infty, \dots)$, setze $\lim\limits_{n \to \infty}{}^{\sup}_{\inf}\, x_n := \overset{+}{(-)}\infty$
- $(y_n^{\overset{+}{(-)}})_n$ hat best. Divergenz nach $\mp \infty$, setze $\lim\limits_{n \to \infty}{}^{\sup}_{\inf}\, x_n := \overset{-}{(+)}\infty$

Fazit: $\lim\limits_{n \to \infty}{}^{\sup}_{\inf}\, x_n$ existiert stets in $\overline{\mathbb{R}}$!

2.79 Satz Sei $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt. Setze

$$H := \{h \in \mathbb{R} : h \text{ ist Häufungspkt. von } (x_n)_n\}$$

(somit $H \neq \emptyset$, $H \subseteq \mathbb{R}$, da $(x_n)_n$ beschränkt). Dann gilt

$$\limsup_{n \to \infty} x_n = \max H \quad (\text{größter Häufungspkt.})$$

$$\liminf_{n \to \infty} x_n = \min H \quad (\text{kleinster} \quad \text{"} \quad)$$

Beweis: (nur für lim sup; lim inf analog)

1. Akt: H besitzt max.

Sei $S := \sup H < \infty$ (da $(x_n)_n$ beschr.) und $\varepsilon > 0$ bel.

$\Rightarrow \exists h \in H : S - \varepsilon < h \leq S$ (denn andernfalls wäre $S - \varepsilon$ obere Schranke ↯) $\boxed{!!}$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(h) \subseteq U_\varepsilon(S)$; h Häufungspkt von $(x_n)_n$

$\Rightarrow \exists \infty$-viele $n \in \mathbb{N}$: $x_n \in U_\delta(h) \subseteq U_\varepsilon(S)$;

insbes. für $\varepsilon := \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$, $\exists n_j \in \mathbb{N}$:

$$|x_{n_j} - s| < \frac{1}{j} \quad \text{und} \quad n_{j+1} > n_j \quad \forall j$$

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = s \rightarrow \quad s \in H \quad \text{und} \quad s = \max H \checkmark$$

2-Akt: $\quad \sigma := \limsup x_n = s$

- da $s \in H \Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$: $x_{n_j} \xrightarrow{j\to\infty} s$

$$\Rightarrow y_n^+ \geq \sup\{x_{n_j} \in \mathbb{R} : j \in \mathbb{N} \text{ mit } n_j \geq n\} \overset{(!)}{\geq} s \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\sigma \geq s}$$

- Ann.: $\sigma > s \quad \Rightarrow \exists \delta > 0 : \sigma > s + \delta$

$$\Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_0 : y_n^+ > s + \delta$$

$$\Rightarrow \exists \text{ Teilfolge } (l_k)_k \subseteq \mathbb{N}, \; l_k \geq N_0 \;\forall k \in \mathbb{N} \text{ mit}$$

$$x_{l_k} > s + \delta .$$

Wegen $(x_n)_n$ beschränkt $\overset{\text{Balzano-W}}{\Rightarrow}$ $(x_{l_k})_k$ hat Häufungspkt. $\hat{h} \geq s + \delta \Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{l_{k_m}})_m$ mit $\lim_{m\to\infty} x_{l_{k_m}} = \hat{h} \Rightarrow \hat{h}$ ist Häufungspkt. von $(x_n)_n$ $\lightning$ da $\hat{h} \geq s + \delta > s = \sup H$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma \leq s}} \qquad \blacksquare$$

2.80 Beispiel

$$\limsup_{n\to\infty} n^{(-1)^n} = +\infty ,$$

$$\liminf_{n\to\infty} n^{(-1)^n} = 0$$

2.7. Komplexe Zahlen

Motivation: math. Rahmen für Lösungen der Glg. $x^2+1=0$

2.81 Definition $\mathbb{C} := \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit den 2 Verknüpfungen

$$(x_1,y_1)\ \underline{\overset{+}{\triangle}}\ (x_2,y_2) := (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$$(x_1,y_1)\ \underline{\overset{\cdot}{\triangle}}\ (x_2,y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$$

2.82 Satz $(\mathbb{C},\ \underline{\overset{+}{\triangle}},\ \underline{\overset{\cdot}{\triangle}})$ ist ein Körper.

Beweis: Kommutativität, Assoziativität u. Distributivität von $\underline{\overset{+}{\triangle}}$ und $\underline{\overset{\cdot}{\triangle}}$ folgen sofort aus entsprechenden Eigenschaften von $\mathbb{R}$ (Assoz. von $\underline{\overset{\cdot}{\triangle}}$ braucht kurze Rechnung $\rightsquigarrow$ Übung!).

	$\underline{\overset{+}{\triangle}}$	$\underline{\overset{\cdot}{\triangle}}$
neutrales Elem.	$(0,0)$	$(1,0)$
inverses Element zu $z:=(x,y)$	$-z:=(-x,-y)$	$\frac{1}{z} := z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ [für $z \neq (0,0)$]

▨

2.83 Bemerkung:

$$J:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad x\mapsto (x,0) \quad \text{ist Körperhomomorphismus}$$

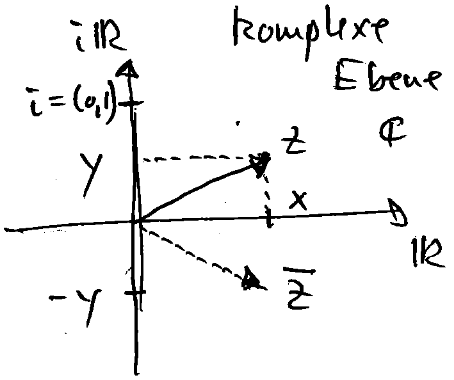
d.h. $(\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\},\ \underline{\overset{+}{\triangle}},\ \underline{\overset{\cdot}{\triangle}})$ erfüllt alle Eigenschaften von $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ identifiziere $\mathbb{R}$ mit $J(\mathbb{R})$, Notation $x := (x,0)\ \forall x \in \mathbb{R}$, so dass $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Somit gilt unter Weglassung von Δ:

2.84 Lemma Sei $z := (x,y) \in \mathbb{C}$ und $i := (0,1) \in \mathbb{C}$.

(a) $i^2 = -1$, (b) $i^{-1} = -i$, (c) $z = x + iy$



Beweis: (a), (b) klar (nachrechnen)

(c) $z = (x,0) \overset{\triangle}{+} (0,1) \overset{\triangle}{\cdot} (y,0)$

(nachrechnen)

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & + & i & \cdot & y \end{array} \qquad \blacksquare$$

2.85 Definition Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist

$\overline{z} := x - iy$ komplexe Konjugation (von z)
(entspricht Spiegelung an x-Achse!)

$\mathrm{Re}\, z := x$ Realteil

$\mathrm{Im}\, z := y$ Imaginärteil

Klar ist (nachrechnen!)

2.86 Lemma Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten

(a) $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(b) $z = \mathrm{Re}\, z + i\,\mathrm{Im}\, z$, $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

(c) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2 \wedge \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2)$

(d) Falls $z \neq 0$: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$

(NB: $z \cdot \overline{z} = (\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2 > 0$ ((c) & $z \neq 0$))

[$\rightsquigarrow$ Standardtrick, um $\frac{1}{z}$ in Re u. Im zu zerlegen!]

$\boxed{\text{2.87. Def. u. Satz}}$ Die Betragsabb.

$$|\cdot| : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto |z| := \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} = (z \cdot \bar{z})^{1/2} \end{array}$$

erfüllt

$$\left.\begin{array}{ll} (B1) & |z| \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \ \text{ und } |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \\ (B2) & |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \\ (B3) & |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \end{array}\right\} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Jargon: $\mathbb{C}$ ist bewerteter Körper (vgl. Satz 2.21)

Beweis: (B1) klar wegen Lemma 2.86 (c)

(B2) $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$

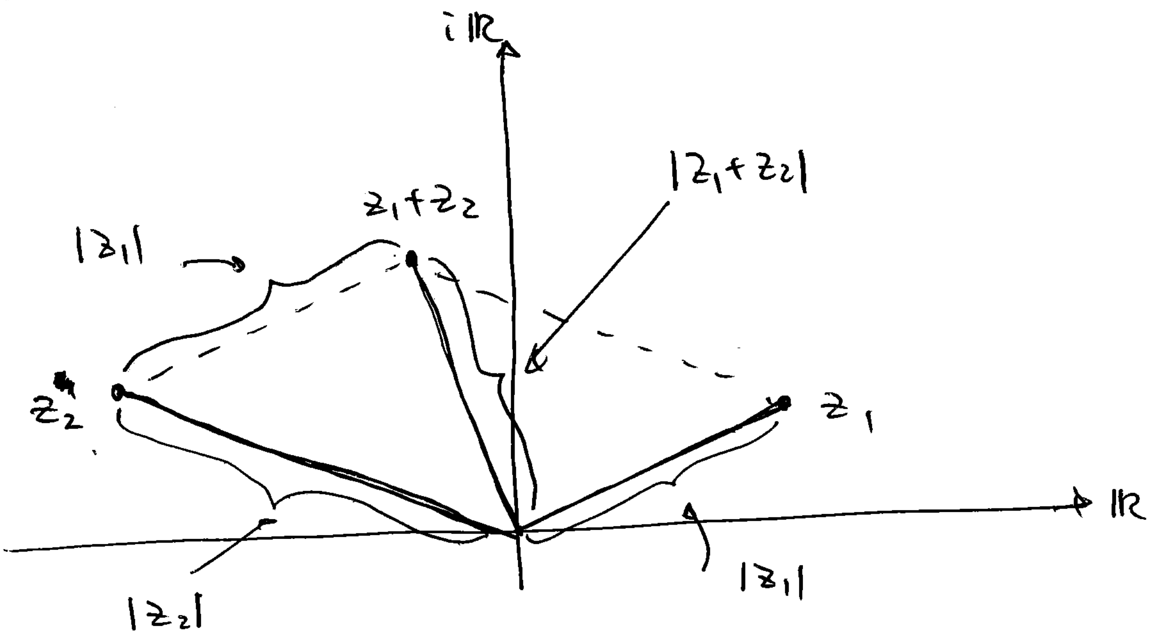
(B3) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$

Aber $\bar{z}_1 z_2 = \overline{z_1 \bar{z}_2}$, so $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2 \mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$

Bem. dass $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ (und $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$) per def.

Damit
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \ \blacksquare \end{aligned}$$

zu (B3): Dreieck in Parallelogramm in komplexer Ebene:

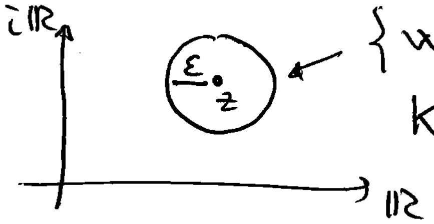


Übertragung der Konvergenzbegriffe aus Kap. 2-5 u. 2-6

2.88 Definition Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ Folge und $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad :\iff \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \ |z_n - z| < \varepsilon$$

$(z_n)_n$ kgt. (in $\mathbb{C}$) gegen z



$\{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \varepsilon\}$ Kreisscheibe um z mit Radius ε

2.89 Warnung!! Es gibt keine naturliche Ordnung auf $\mathbb{C}$ (Bew.: unten)! (d.h., „$z_1 \leq z_2$" sinnloss!)

($|z_1| \leq |z_2|$ kann sinn machen)

Deswegen können:

- bestimmte Divergenz nach $\pm\infty$
- Beschränktheit von oben / unten
- Verträglichkeit von limes & Ordnung
- isotone / antitone Folgen
- Intervallschachtelungsprinzip
- obere / untere Schranken; Supremum / Infimum, Min / Max
- lim inf, lim sup

nicht (!) verallgemeinert werden von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$!

Bew. (es gibt auf $\mathbb{C}$ kein naturliche Ordnung):

Naturliche Ordnung $\prec$ auf $\mathbb{C}$ sollte erfüllen:

(i) Verträglichkeit mit Ordnung auf $\mathbb{R}$:

$$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} : \quad r_1 < r_2 \iff r_1 \prec r_2$$

(ii) Trichotomie: $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt genau 1 der 3 Aussagen

$$z \prec 0 \quad , \quad z = 0 \quad , \quad 0 \prec z$$

(iii) Abgeschlossen bzg. + und $\cdot$:

$$0 \prec z_1 , 0 \prec z_2 \Rightarrow 0 \prec z_1 + z_2 \wedge 0 \prec z_1 z_2 \quad (*)$$

Da $i^2 = -1 \overset{(i)}{\Rightarrow} i^2 \prec 0$. Da $i \neq 0 \overset{(ii)}{\Rightarrow}$

$$i \prec 0 \quad \text{oder} \quad 0 \prec i$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow \lightning \text{ zu } (*) \; \& \; i^2 = -1$$

$$0 \prec -i$$

$$(-i)^2 = -1 \longrightarrow \Downarrow \lightning \text{ zu } (*)$$

Fazit: $\nexists$ natürliche Ordnung auf $\mathbb{C}$!

2.90 Satz Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ Folge. Dann gilt

$(z_n)_n$ kgt. in $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Re}\, z_n)_n$ und $(\mathrm{Im}\, z_n)_n$ kgt. in $\mathbb{R}$

Im Fall der Kgz. gilt:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n\right) + i \left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, z_n\right)$$

Bew. Sei $z_n = x_n + i y_n$ mit $x_n := \mathrm{Re}\, z_n$, $y_n := \mathrm{Im}\, z_n$

"$\Rightarrow$": $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z = x + iy \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : \underbrace{|z_n - z|^2}_{|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2} < \varepsilon^2$

"$\Leftarrow$": $x_n \to x \wedge y_n \to y \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = \max(N_x, N_y) \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : \left(|x_n - x| < \varepsilon \wedge |y_n - y| < \varepsilon\right)$

$\Rightarrow |z_n - z| < \sqrt{2} \cdot \varepsilon$ ☒

2.91 Korollar Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ Folge. Dann gilt

$$z_n \xrightarrow{n\to\infty} z \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \overline{z}$$

2.92 Bemerkung

Def. von Cauchy-Folgen und kgt'en Reihen wie gehabt (nur mit $|\cdot|$ aus Def. 2.87). Wegen Satz 2.90 und 2.93 (unten) überträgt sich alles weitere – mit Ausnahme des in Warnung 2.89 genannten !! – auf Folgen $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$

2.93 Satz $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ ist Cauchy-Folge (in $\mathbb{C}$)

$\iff$ $(\operatorname{Re} z_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ und $(\operatorname{Im} z_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ sind Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$

Bew: Übung! Analog zu Satz 2.90.

2.94 Korollar $\mathbb{C}$ ist vollständig.

Bew.: Übung! Verwende Satz von Cauchy für $\mathbb{R}$ (Satz 2.62)

Die reelle Version von Bolzano-Weierstraß beruht auf monotonen Folgen – dennoch:

2.95 Satz von Bolzano-Weierstraß (Version für $\mathbb{C}$)

Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt. Dann hat $(z_n)_n$ mind. einen Häufungspunkt

Bew.: Übung! Verwende Sätze 2.90 & 2.67.

2.8 Mächtigkeit von Mengen

2.96 Definition Seien M, M' Mengen

- M und M' gleichmächtig $:\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $M \to M'$
- M endlich $:\Leftrightarrow M = \emptyset$ oder $(\exists\, n \in \mathbb{N}$ und Bijekt. $\{1, .., n\} \to M)$

  Schreibweise: $n =: |M| =: \#(M)$ Anzahl der Elemente von M $(= 0$ für $M = \emptyset)$
- M abzählbar $:\Leftrightarrow M = \emptyset$ oder $\exists$ Surjektion $\mathbb{N} \to M$

  M abzählbar unendlich $:\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $\mathbb{N} \to M$
- M überabzählbar $:\Leftrightarrow M$ nicht abzählbar

2.97 Satz Sei M endliche Menge. Dann ist

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} \qquad (\to \text{Notation: } \mathcal{P}(M) = 2^M)$$

Beweis:

$$|\mathcal{P}(M)| = \sum_{k=0}^{|M|} \underbrace{|\{M' \subseteq M : |M'| = k\}|}_{\substack{\#\text{ Möglichkeiten } k \text{ Elemente}\\ \text{aus } |M| \text{ Elementen auszu-}\\ \text{wählen } \underset{(!)}{=} \binom{|M|}{k}}} = \sum_{k=0}^{|M|} \binom{|M|}{k} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kor. 2.27}}}{2^{|M|}}$$

☒

2.98 Beispiele

- M endlich $\Rightarrow$ M abzählbar
- $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich, ebenso $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$
- $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ sind gleichmächtig; $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ auch.

2.99 Satz Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar:

$$\left(\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}},\ M_i \text{ abzählbar } \forall i\in\mathbb{N}\right) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \text{ abzählbar}$$

Beweis: Cantorsches Diagonalverfahren:

$$\begin{tikzcd}
M_1: & x_{11} \arrow[d] & x_{12} \arrow[r] & x_{13} \arrow[dl] & x_{14} \arrow[r] & x_{15} \arrow[dl] & \cdots \\
M_2: & x_{21} \arrow[ur] & x_{22} \arrow[dl] & x_{23} \arrow[ur] & x_{24} \arrow[dl] & \cdots & \\
M_3: & x_{31} \arrow[d] & x_{32} \arrow[ur] & x_{33} \arrow[dl] & x_{34} & \cdots & \\
M_4: & x_{41} \arrow[ur] & x_{42} \arrow[dl] & x_{43} & x_{44} & \cdots & \\
\vdots & x_{51} & & & & &
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

2.100 Korollar $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beweis: $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $A_n := \left\{\frac{k}{n} : k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\mathbb{Z}$ abzählbar, also auch $A_n\ \forall n \overset{2.99}{\Longrightarrow}$ Beh. $\blacksquare$

2.101 Satz Endliche kartesische Produkte abzählbarer Mengen sind abzählbar: $\forall N\in\mathbb{N}: \{M_i\}_{i=1}^{N}$, M_i abzählbar $\forall i=1,\dots,N$

$\Rightarrow M_1\times\dots\times M_N$ abzählbar.

Bew.: Übung!

Warnung: Abzählbar unendliche kart. Produkte dagegen nicht, siehe Satz 2.104 (falls ≥ 2 Elemente!)

2.102 Satz Sei M eine Menge. Dann $\nexists$ Surjektion

$$M \to \mathcal{P}(M).$$

Beweis: 1. Fall: $M=\emptyset$ $\Rightarrow \mathcal{P}(M)=\{\emptyset\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}|M|=0\\ |\mathcal{P}(M)|=1\end{array}\right\} \Rightarrow$ Beh.

2. Fall: $M\neq\emptyset$: Annahme: $\exists$ Surjektion $\sigma: M\to\mathcal{P}(M)$

Setze $A:=\{m\in M: m\notin\sigma(\overset{m}{\cancel{M}})\}$, d.h. $\forall m\in M$ gilt: $m\in A \Leftrightarrow m\notin\sigma(\overset{m}{\cancel{M}})$

σ surjektiv $\Rightarrow \exists x\in M: \sigma(x)=A \overset{m=x}{\Rightarrow} x\in A \Leftrightarrow x\notin A$ ↯ ■

2.103 Korollar $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

2.104 Satz $\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \underset{\mathbb{N}}{\times}\{0,1\} := \{(a_1,a_2,a_3,\dots): a_n\in\{0,1\}\ \forall n\in\mathbb{N}\}$
$= \{\varphi:\mathbb{N}\to\{0,1\}\}$

ist überabzählbar

Bew. Sei $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$, d.h. $A\subseteq\mathbb{N}$, betrachte Indikatorfkt. von A

$$1_A\in\{0,1\}^{\mathbb{N}},\ \text{d.h.: } 1_A: \begin{array}{l}\mathbb{N}\to\{0,1\}\\ x\mapsto 1_A(x):=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}\end{array}$$

$$\Rightarrow \mu: \begin{array}{l}\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}\\ A\mapsto 1_A\end{array}$$ ist injektiv $(A_1\neq A_2\Rightarrow 1_{A_1}\neq 1_{A_2})$

$$\Rightarrow \mu^{-1}: \begin{array}{l}\mu(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\to\mathcal{P}(\mathbb{N})\\ 1_A\mapsto A\end{array}$$ ist (wohldef. &) surjektiv (*)

Ann.: $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ abzählbar $\Rightarrow \mu(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\subseteq\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ abzählbar

$\Rightarrow \exists\sigma:\mathbb{N}\to\mu(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ surj. $\overset{(*)}{\Rightarrow} \mu^{-1}\circ\sigma:\mathbb{N}\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ surj.

d.h. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar ↯ Satz 2.102 ■

2.105 Korollar $\mathbb{R}$, und somit auch die irrationalen Zahlen $(:=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, sind überabzählbar.

Beweis: b-adische Darstellung (mit $b\geq 3$)

und Satz 2.104 ■

3. Stetige Funktionen

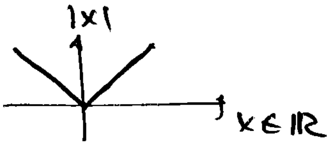
3.1. Funktionen von und nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Generalvereinb.: $\mathbb{K}, \mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{K}$,

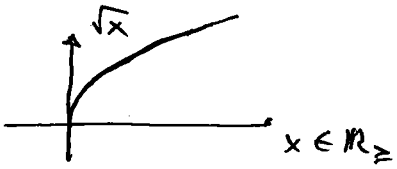
$f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ eine Fkt. (also $\mathcal{D} = \mathrm{dom}(f)$)

3.1. Beispiele (allg. für Fkt.'en – nicht notw. stetig).

- konst. Fkt. $f : \begin{array}{l} \mathbb{K} \to \mathbb{K}' \\ x \mapsto c \end{array}$ wobei $c \in \mathbb{K}'$



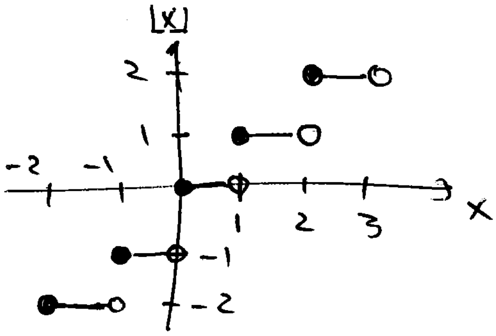
- Betrag: $|\cdot| : \begin{array}{l} \mathbb{K} \to \mathbb{R}_{\geq} \\ x \mapsto |x| \end{array}$



- Wurzel: $\sqrt{\cdot} : \begin{array}{l} \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$

- ganzzahliger Anteil $\lfloor\cdot\rfloor : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor \end{array}$

  wobei
  - $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$
  - $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$



- Polynom n'ten Grades, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$p : \begin{array}{l} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto p(x) \end{array}, \qquad p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \; a_k \in \mathbb{K} \; \forall k, \; a_n \neq 0$$

- Rationale Fkt.: Seien $p, q : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ Polynome,

$\mathcal{D} := \mathbb{K} \setminus \{x \in \mathbb{K} : q(x) = 0\}$,

$$r : \begin{array}{l} \mathcal{D} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \dfrac{p(x)}{q(x)} \end{array}$$

- Dirichlet-Kamm $$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

3.2 Definition Operationen mit $\mathbb{K}'$-wertigen Funktionen

Seien $f, g : D \to \mathbb{K}'$

- $$f+g : \begin{array}{l} D \to \mathbb{K}' \\ x \mapsto f(x)+g(x) =: (f+g)(x) \end{array}$$

  analog: "−", "·"

- $$\frac{f}{g} : \begin{array}{l} D \setminus \{x \in \mathbb{K} : g(x) = 0\} \to \mathbb{K}' \\ x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} =: \left(\frac{f}{g}\right)(x) \end{array}$$

„punktweise Operationen"

[speziell: $\forall \alpha \in \mathbb{K}' : (\alpha f)(x) := \alpha f(x) \quad \forall x \in D$]

- für $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$ (!):

$$f \substack{<\\=\\>} g :\Longleftrightarrow \left(D_f = D_g \wedge f(x) \substack{<\\=\\>} g(x) \ \forall x \in D_f \right)$$

- Erinnerung: Komposition in Def. 1.29.

3.2. Limes eines Funktion

3.3. Definition Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$, sei a Häufungspkt. von $\mathcal{D}$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert $:\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists y \in \mathbb{K}' : \forall (x_n)_n \subseteq \mathcal{D}\setminus\{a\} \text{ mit} \\ x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \text{ gilt: } \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y \end{array} \right.$

NB
- $\exists (x_n)_n \subseteq \mathcal{D}\setminus\{a\}$ mit $x_n \to a$, da a Häuf. pkt.
- y ist unabh. von der gew. Folge!

Notation: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = y$

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und falls a Häufungspkt. von $\mathcal{D} \cap \,]-\infty, a]$, sei

$\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)$ existiert $:\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists y \in \mathbb{K}' : \forall (x_n)_n \subseteq \mathcal{D} \cap \,]-\infty, a[\\ \text{mit } x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \quad \text{gilt:} \\ \qquad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y \end{array} \right.$

(linkseitiger Limes)

analog: rechtsseitiger Limes : $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)$

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathcal{D}$ von oben unbeschränkt sei

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert $:\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists y \in \mathbb{K}' \;\; \forall (x_n)_n \subseteq \mathcal{D} \text{ mit} \\ x_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \text{ gilt: } \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y \end{array} \right.$

Notation: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y$

analog: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = y$

- Falls $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$ und es gilt in einem der obigen Fälle dass: $\lim\limits_{n \to a} f(x_n) = +\infty$ für <u>alle</u> dort zugelassenen Folgen $(x_n)_n$, <u>dann</u> definieren wir: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert <u>nicht</u>; jedoch:

(bestimmte) Divergenz von f nach $+\infty$ für $x \to a$

<u>Notation</u>: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

analog für $-\infty$, oder für $x \nearrow a$, $x \searrow a$, $x \to \pm\infty$.

- Falls $a \in \mathcal{D}$ <u>kein</u> Häufungspkt. von $\mathcal{D}$ ($\Longleftrightarrow$: a ist isolierter Pkt. von $\mathcal{D}$), setze

$$\lim_{x\to a} f(x) := f(a)$$

3.4 Beispiel

$$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x); \quad \lim_{x\searrow 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\nearrow 0} f(x) = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert <u>nicht</u>.

3.5 Definition (Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}}$)

- $\infty + r := r + \infty := \infty \quad \forall r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
  $-\infty + r := r - \infty := -\infty \quad \forall r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
- $$\overset{+}{(-)}\infty \cdot r := r \cdot \left(\overset{+}{(-)}\infty\right) := \begin{cases} \overset{+}{(-)}\infty, & r \in \mathbb{R}_{>} \cup \{\infty\} \\ \overset{-}{(+)}\infty, & r \in \mathbb{R}_{<} \cup \{-\infty\} \end{cases}$$
- $$\frac{r}{\overset{+}{(-)}\infty} := r \cdot \frac{1}{\overset{+}{(-)}\infty} := \frac{1}{\overset{+}{(-)}\infty} \cdot r := 0 \quad \forall r \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$$

! $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\overset{+}{(-)}\infty \cdot 0$, $0 \cdot \left(\overset{+}{(-)}\infty\right)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$!

sind <u>nicht</u> definiert

3.6. Satz Seien $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$, a Häufungspkt. von $\mathcal{D}$

und $\underbrace{\lim_{x\to a} f(x)}_{=:\varphi\ (\in \mathbb{K}')}$ existiert, $\underbrace{\lim_{x\to a} g(x)}_{=:\gamma\ (\in \mathbb{K}')}$ existiert. Dann gilt:

(i) $\lim_{x\to a} (f+g)(x)$ existiert (und $= \varphi + \gamma$)

(ii) $\lim_{x\to a} (fg)(x)$ existiert (und $= \varphi\gamma$)

(iii) falls $\gamma \neq 0 \Rightarrow a$ ist Häufungspkt. von
$\tilde{\mathcal{D}} := \{ x \in \mathcal{D} : g(x) \neq 0 \}$ und
$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ existiert (und $= \frac{\varphi}{\gamma}$)

Zusatz: (Z1) falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: analog für $x \uparrow a$, $x \downarrow a$, $x \to \pm\infty$

(Z2) falls $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$:

- (i) [& (Z1)] bleibt gültig für $\varphi, \gamma \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, oder
  $\varphi, \gamma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
- (ii) [& (Z1)] " " " $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}$, $\gamma \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$
- (iii) [& (Z1)] " " " $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder
  $\varphi \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

Beweis: (i) Sei $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow[\text{Satz 2.36 (i)}]{n\to\infty} \varphi + \gamma$

(ii) analog zu (i) (verw. 2.36 (ii))

(iii) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \gamma \neq 0 \Rightarrow$ für $(x_n)_n \subseteq \mathcal{D}\setminus\{a\}$, $x_n \to a$

gilt: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \underline{|g(x_n) - \gamma| < \frac{|\gamma|}{2}}$

$\Rightarrow g(x_n) \neq 0$

$\Rightarrow$ a ist Häufungspkt. von $\hat{\mathcal{D}}$!

Sei nun $(x_n)_n \subseteq \hat{\mathcal{D}}\setminus\{a\}$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow[\text{Satz 2.37}]{n\to\infty} \frac{\varphi}{\gamma}.$$

Zusätze analog, z.B. (Z2) für (i): Sei $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $x_n \neq a$

Sei $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \gamma \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\forall S \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$: $f(x_n) > S - U$

$\exists U \in \mathbb{R} : g(x_n) > U\ \forall n \in \mathbb{N}$ (hier geht ein, dass $\gamma \neq -\infty$!)

$\Downarrow$ $\Swarrow$

$$\forall n \geq N : (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) > S$$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \infty$

Da $(x_n)_n \subseteq \mathcal{D}\setminus\{a\}$ bel. (mit $x_n \to a$)

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} (f+g)(x) = \infty \quad \blacksquare$$

3.3. Stetigkeit

3.7 Definition Sei $f: D \to \mathbb{K}'$ und $a \in D$

(i) f folgenstetig in a $:\Leftrightarrow \begin{cases} \forall (x_n)_n \subseteq D \text{ mit } x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \text{ gilt} \\ f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a) \end{cases}$

(ii) f stetig in a $:\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in D \\ \text{mit } |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \end{cases}$

Moral: „Wenn x nur nahe genug bei a, dann ist auch $f(x)$ nahe bei $f(a)$."

3.8 Satz Sei $f: D \to \mathbb{K}'$ und $a \in D$. Dann gilt:

f stetig in a $\Leftrightarrow$ f folgenstetig in a

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei $(x_n)_n \subseteq D$ mit $x_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$

n.V. $\exists \delta > 0 \; \forall x \in D$ mit $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Da $x_n \to a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x_n - a| < \delta$

und somit $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$

d.h. $f(x_n) \to f(a)$ ✓

„$\Leftarrow$" per Widerspruch.

Ann. f nicht stetig in a

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x \in D$ mit

$|x-a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

$(\delta = \frac{1}{n})$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n \in D$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)_n \subseteq D$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ und $(f(x_n))_n$ kgt. nicht gegen $f(a)$

$\lightning$ f folgenstetig in a $\blacksquare$

3.9 Bemerkung

Wegen Satz 3.8 fortan keine Unterscheidung zwischen folgenstetig und stetig (wir nennen beides nun stetig). Grund für Unterscheidung in Def. 3.7:

Falls $\mathbb{K}'$ allgemeiner als $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (z.B topologischer Raum ohne 1. Abzählbarkeitsaxiom, siehe nächstes Semester), so gilt nur „Stetig $\Rightarrow$ folgenstetig", aber nicht die Umkehrung.

3-10 Satz Sei $f : D \to \mathbb{K}'$ und $a \in D$. Dann gilt

$$f \text{ stetig in } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(bedeutet: $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert und $= f(a)$).

Beweis: 1. Fall: a isolierter Punkt von $\mathcal{D}$

- rechte Seite gilt stets wegen Def. 3.5
- linke Seite gilt auch stets, da (siehe Übung)

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: \ x_n = a$$

$$\Rightarrow \ f(x_n) = f(a) \ \ \forall n \geq N \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$$

2. Fall: a Häufungspkt von $\mathcal{D}$

„$\Rightarrow$" klar, da nach Def 3.7 (i) links mehr Folgen erlaubt als rechts.

„$\Leftarrow$" Ann. f nicht stetig $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in \mathcal{D}$

$$\text{mit } |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ und } \underbrace{|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon}_{\Rightarrow \ x_n \neq a}$$

also: $\exists (x_n)_n \subseteq \mathcal{D}\setminus\{a\}$ mit $x_n \to a$ und

$(f(x_n))_n$ kgt. nicht gegen $f(a)$

↯ zu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ ▨

Der Beweis hat gezeigt:

$\boxed{\text{3.11 Korollar}}$ Sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathcal{D}$ ein isolierter Pkt. Dann ist f stetig in a.

3.12. Definition

Sei $f: D \to \mathbb{K}'$ und $A \subseteq D$

- f stetig auf A $:\Leftrightarrow$ $\forall a \in A$: f stetig in a
- f stetig $:\Leftrightarrow$ f stetig auf D

3.13 Beispiele

(i) konst. Fkt. ist stetig

(ii) $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}: \begin{array}{l} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto x \end{array}$ stetig

(iii) Jede Fkt. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{K}'$ ist stetig

3.14 Satz

(„Summen, Produkte, Quotienten stetiger Fkt.'en sind stetig!")

Seien $f, g: D \to \mathbb{K}'$, stetig in $a \in D$. Dann gilt:

(i) $f+g$ stetig in a

(ii) fg stetig in a

(iii) falls $g(a) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\frac{f}{g}: \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{K}'$ stetig in a

Beweis: Folgt aus Satz 3.6 und 3.10 ☒

3.15 Korollar

Jede rationale Fkt. ist stetig

Beweis: Beispiele 3.13 und Satz 3.14 ☒

3.16 Satz Verkettung stetiger Fkt.'en ist stetig

Seien $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{K}'$, $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{K}''$ $(\mathbb{K}'' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$
mit $f(\mathcal{D}_f) \subseteq \mathcal{D}_g \subseteq \mathbb{K}'$ sowie

- f stetig in $a \in \mathcal{D}_f$
- g stetig in $f(a)$ $(\in \mathcal{D}_g)$

Dann ist $g \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{K}''$ stetig in a.

Beweis: Sei $(x_n)_n \subseteq \mathcal{D}_f$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$

f stetig in a $\Rightarrow$ $\underbrace{f(x_n)}_{=: y_n} \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{f(a)}_{=: y}$

Da $(y_n)_n \subseteq \mathcal{D}_g$ mit $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ $(\in \mathcal{D}_g)$ und g stetig in y

$\Rightarrow$ $g(y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(y)$,

also $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(g\circ f)(x_n)}_{g(\underbrace{f(x_n)}_{y_n})} = g(y) = g(f(a)) = (g\circ f)(a)$

Da Folge $(x_n)_n$ bel. mit $x_n \to a$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x) = (g\circ f)(a)$

↑ exist. insbesonders ! ■

3.17 Beispiele

Sei f stetig, dann ist $|f|$ stetig,

aus Satz 3.16, da $|f| = |\cdot| \circ f$ und

(siehe Übung) $|\cdot|$ ist stetig.

3.4 Eigenschaften stetiger Funktionen

3.18 Satz Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ stetig in $a \in \mathcal{D}$

(i) Falls $f(a) \neq 0$, dann $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}$ mit $|x-a| < \delta$ gilt: $f(x) \neq 0$

(ii) Falls $\underline{\mathbb{K}' = \mathbb{R}}$ und $f(a) > 0$, dann $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}$ mit $|x-a| < \delta$ gilt: $f(x) > 0$ [analog für "< 0"]

Beweis Sei $\varepsilon := \frac{|f(a)|}{2} \overset{\text{n.V.}}{>} 0 \overset{f \text{ stetig in } a}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0 :$

$\forall x \in \mathcal{D}$ mit $|x-a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \frac{|f(a)|}{2}$ $(*)$

(i) $\overset{(*)}{\Longrightarrow} f(x) \neq 0$ [sonst $|f(a)| < \frac{|f(a)|}{2}$ ↯]

(ii) Ann.: $f(x) \leq 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} f(a) - f(x) < \frac{f(a)}{2} \Rightarrow \frac{f(a)}{2} < f(x) \leq 0$

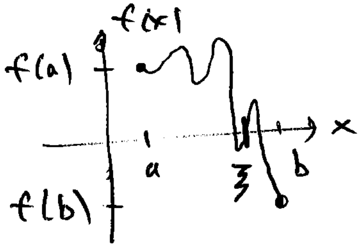
↯ da $f(a) > 0$

3.19 Satz (Nullstellensatz von Bolzano)

Nur für (!)
$\mathbb{K} = \mathbb{K}' = \mathbb{R}$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ [oder andersrum]

Dann $\exists \xi \in]a,b[: f(\xi) = 0$



Beweis: Setze $A := \{x \in [a,b] : f(x) \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}$

- $A \neq \emptyset$ (da $a \in A$)
- A von oben beschränkt (da b ob. Schranke)

$\Rightarrow \xi := \sup A \in [a,b]$

$\Rightarrow \exists$ Folge $(x_n)_n \subseteq A : x_n \xrightarrow{n \to \infty} \xi$ (Übung!)

$$f \text{ stetig} \Rightarrow f(\xi) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow \xi \in \underset{f(b)<0}{[a,b[}$$

$$\underline{\text{Ann}}: f(\xi) > 0 \overset{\text{Satz 3.18(ii)}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 : \forall x \in \,]\xi-\delta, \xi+\delta[\, \cap [a,b] \text{ gilt } f(x) > 0$$

$$\Rightarrow \exists x_0 > \xi : f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \in A \; ↯ \text{ da } \xi = \sup A$$

$$\Rightarrow f(\xi) = 0. \qquad \blacksquare$$

3.20 Korollar (Zwischenwertsatz) | Nur für $\mathbb{K} = \mathbb{K}' = \mathbb{R}$ (!)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis: o.E. sei $f(a) > f(b)$ ["$=$" langweilig; "$<$" analog]

Sei $y \in \,]f(b), f(a)[$ ein bel. Zwischenwert

$$\text{Setze } g : \begin{array}{l} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) := f(x) - y \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cdot \; g \text{ stetig} \\ \cdot \; g(a) > 0 \\ \cdot \; g(b) < 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{\text{Satz 3-19}}{\Rightarrow} \exists \xi \in \,]a,b[\, : 0 = g(\xi) = f(\xi) - y \qquad \blacksquare$$

3.21 Satz Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (eigentlich oder uneigentlich, d.h. auch $\pm\infty$ als Grenzen erlaubt) und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$f(I) \subseteq \mathbb{R} \text{ ist (uneigentliches) Intervall.}$$

Beweis:

1. Fall: $f = a$ Konstant $\Rightarrow f(I) = [a,a]$ (deg. Interv.) ✓

2. Fall: f nicht konstant

Sei $A := \inf f(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$B := \sup f(I) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow$ • $f(I) \subseteq [A, B]$ (1) ⊛ (⊛ Falls $A = -\infty$ oder $B = \infty$, muss Interv. an der jeweiligen Stelle offen sein!)

$f \neq$ konst. $\Rightarrow A < B$

$\Rightarrow$ wähle $y \in]A, B[$ bel.

$\overset{\text{Def. von sup/inf}}{\Rightarrow} \quad \exists a, b \in I: \quad f(a) < y < f(b)$

$\overset{\text{Zwischenwertsatz}}{\Rightarrow} \quad \exists x \in]a, b[: \quad f(x) = y$

$\overset{y \text{ bel.}}{\Rightarrow} \quad]A, B[\subseteq f(I)$ (2)

$\overset{(1) \& (2)}{\Rightarrow} \quad f(I) \in \{]A,B[, [A,B[,]A,B], [A,B] \}$ ⊛

▨

$\boxed{\text{3.22 Satz}}$ (Stetigkeit der Umkehrfkt.)

Sei I (evtl. uneigentliches) Intervall mit $|I| > 0$, d.h. nicht ausgeartet. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ strikt monoton. Dann $\exists\, f^{-1} : f(I) \to I$ und ist stetig.

Beweis: o. E. f strikt isoton [sonst betrachte $-f$]

$\Rightarrow f$ injektiv $\Rightarrow$ f^{-1} existiert und ist strikt isoton.

Ann: $\exists\, y \in f(I)$: f^{-1} nicht stetig in y

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0\ \exists\, (y_n)_n \subseteq f(I)$: $|y_n - y| < \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

(vgl. Bew. Satz 3.8) (also insbes. $y_n \neq y$)

Setze $x := f^{-1}(y) \in I$, $x_n := f^{-1}(y_n) \in I \quad \forall n$

- falls $y < y_n \Rightarrow x < x + \varepsilon \overset{(*)}{\leq} x_n \Rightarrow f(x) < f(x+\varepsilon) \leq f(x_n)$
- falls $y_n < y \Rightarrow x_n \overset{(*)}{\leq} x - \varepsilon < x \Rightarrow f(x_n) \leq f(x-\varepsilon) < f(x)$

$x \pm \varepsilon \in I$ (hier Intervall benutzt!)

↯ zu $|y_n - y| < \frac{1}{n}$ falls n hinreichend groß ▨

3.23 Bemerkung:

- f muss nicht stetig sein! (aber $f(I)$ dann vielleicht kein Int.)
- stärkere Voraussetzung: „f strikt monoton" darf durch „f stetig und injektiv" ersetzt werden (hinreichend für strikt monoton) (siehe Üb).

3.24 Definition

$K \subseteq \mathbb{K}$ (folgen-) kompakt $:\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{jede Folge } (x_n)_n \subset K \\ \text{besitzt eine kgt.e Teilfolge} \\ (x_{n_k})_k \text{ mit } \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \underline{\underline{\in}} K \end{array} \right.$

3.25 Beispiele

- $K = [a,b]$ kompakt in $\mathbb{R}$ für $a, b \in \mathbb{R}$
- Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0 \Rightarrow K = \overline{B}_r(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \}$ kompakt in $\mathbb{C}$

denn: K beschränkt $\overset{\text{Bolz.-W}}{\Longrightarrow}$ $(x_n)_n \overset{\subset K}{}$ hat kgt'e TF $(x_{n_k})_k \subseteq K$

wegen "$\leq$" ($\mathbb{C}$) bzw "$[\ ,\ ]$" ($\mathbb{R}$) gilt

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \underline{\underline{\in}} K$ („abgeschlossen"].

3.26 Satz

Sei $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h.

$$\exists x_\pm \in K : \quad f(x_\pm) = \genfrac{}{}{0pt}{}{\max}{\min} \{ f(x) : x \in K \}$$

Beweis: nur für max; min analog.

Sei $S := \sup \{ f(x) : x \in K \} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ("$= \infty$" $\Leftrightarrow$ f nicht von oben beschr.)

$\Rightarrow \exists$ Folge $(x_n)_n \subseteq K$ mit $f(x_n) \to S$ (*)

$\overset{K \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_k \subseteq K$ mit $x_+ := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$

f stetig $\Rightarrow f(x_+) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{(*)}{=} S$

$\Rightarrow$ $S < \infty$ und Max wird angenommen

☒

3.27 Definition Sei $f: D \to \mathbb{K}'$ und $A \subseteq D$

- f <u>gleichmäßig stetig auf A</u> $:\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in A \text{ mit} \\ |x - x'| < \delta \text{ gilt: } |f(x) - f(x')| < \varepsilon \end{array} \right.$

  (<u>NB</u> δ hängt <u>nicht</u> von $x, x' \in A$ ab, ist gleich<u>mäßig</u> in x, x'.)

- f <u>Lipschitz-stetig auf A</u> $:\Longleftrightarrow$ $\exists C \in]0, \infty[: \forall x, x' \in A ; x \neq x'$:

  $$|f(x) - f(x')| < C|x - x'|$$

3.28 Lemma $\left.\begin{array}{c}\text{Lipschitz-stetig} \\ \text{auf } A\end{array}\right\} \underset{(a)}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c}\text{gleichmäßig} \\ \text{stetig auf } A\end{array}\right\} \underset{(b)}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c}\text{stetig} \\ \text{auf } A\end{array}\right.$

<u>Beweis</u> (a) wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$; (b) klar! ■

3.29 Satz Sei $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt und $f: K \to \mathbb{K}'$ stetig

Dann ist f gleich<u>mäßig</u> stetig auf K.

<u>Beweis</u>: Per Widerspruch.

$\delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n, x_n' \in K$ mit $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$ (1) und

(2) $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon$.

K kpt („kompakt") $\Rightarrow (x_n)_n$ hat kgt.'e Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit $\xi := \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} \underline{\in K}$.

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \lim_{k \to \infty} x'_{n_k} = \xi$$

$$\begin{array}{lccl} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \forall k: & |f(x_{n_k}) & - \; f(x'_{n_k})| & \geq \varepsilon \\ & \downarrow & k \to \infty \quad \downarrow & (\Leftarrow f \text{ stetig in } \xi \underline{\in K}) \\ & f(\xi) & f(\xi) & \\ \Longrightarrow & 0 & \geq \varepsilon & ↯ \end{array}$$

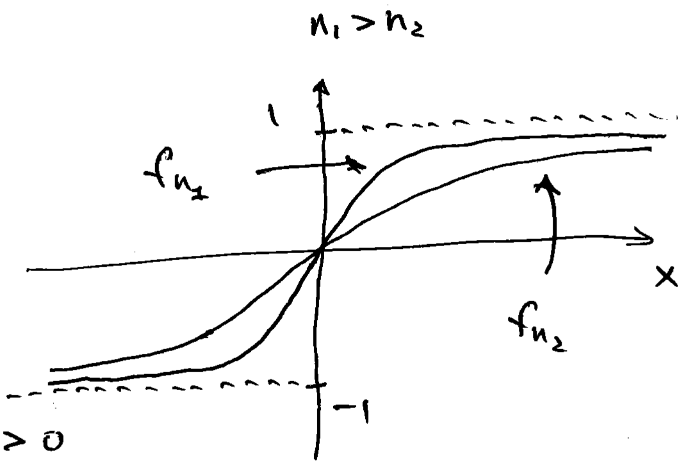
■

3.5. Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Fragestellung wird illustriert durch

3.30 Beispiel

$\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{\frac{1}{n} + |x|} \end{array}$



klar (!): f_n stetig $\forall n$

$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{existiert}$$

Definiere Fkt.

$$f := \operatorname{sgn} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \end{array} \quad \text{unstetig!}$$

Frage: Ist Stetigkeitsverlust vermeidbar?

Ja – wenn man „schärfere" Kgz. hat!

3.31 Definition Sei $D \subseteq \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{K}'$

(i) Fkt'enfolge $(f_n)_n$ kgt. punktweise gegen $f : D \to \mathbb{K}'$

$$:\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in D \text{ und } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N} : \\ \qquad \forall n \geq N \text{ gilt: } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in D : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \right)$$

(ii) Fkt'enfolge $(f_n)_n$ kgt. gleichmässig gegen $f: D \to \mathbb{K}'$

$$:\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N \text{ gilt} \\ \qquad \underline{\forall x \in D} : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$ gilt:

$$\|f_n - f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| := \sup \{ |f_n(x) - f(x)| : x \in D \} < \varepsilon$$

- Unterschied zu (i): das zu geg. $\varepsilon > 0$ gesuchte N ist unabhängig von x! („gleichmässig")
- gleichmässige (glm.) kgt. $\Rightarrow$ pkt. weise kgt.

3.32 Beispiel: $(f_n)_n$ aus Bsp. 3.30 kgt. punktweise, aber nicht gleichmässig gegen sgn. [Nachprüfen! Folgt aber auch aus:]

3.33 Satz (Gleichmässige Limiten stetiger Fkt'en sind stetig!)
Sei $D \subseteq \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{K}'$ stetig und $(f_n)_n$ glm. kgt. gegen $f: D \to \mathbb{K}'$. Dann ist auch f stetig.

Beweis: „$\frac{\varepsilon}{3}$-Argument": Sei $x \in D$ bel. fest, sei $\varepsilon > 0$.

$\forall y \in D \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \quad (*)$$

glm. Kgz. $f_n \to f \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall \xi \in D$:

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\Rightarrow$ für dieses N gilt:

$$\forall y \in D : |f(x) - f(y)| < \frac{2}{3}\varepsilon + |f_N(x) - f_N(y)| \quad (**)$$

NB: $(**)$ wäre im allg. falsch, wenn N von ξ abhinge!

f_N stetig in x $\Rightarrow \exists\, \delta = \delta_{x,N,\varepsilon} > 0$ so dass $\forall y \in D$
mit $|x-y| < \delta$ gilt: $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\overset{(**)}{\Rightarrow}$ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, also f stetig in x ■

---

4. Potenzreihen und elementare Funktionen

Zur Vorbereitung eine Vertiefung unseres Verständnisses über:

4.1 Reihen (2. Teil)

Erinnerung: Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ kgt. $:\Leftrightarrow$ $(s_n)_n$ kgt. $\Leftrightarrow$ $(s_n)_n$ Cauchy

4.1. Satz $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ kgt. in $\mathbb{K}$ $\Longrightarrow$ $(a_k)_k$ ist Nullfolge

Beweis: n. V. is $(s_n)_n$ Cauchy, d.h.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N: \quad |s_n - s_m| < \varepsilon \quad (*)$

- für $n = m+1$ gilt $s_{m+1} - s_m = a_{m+1}$

$(*) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m \geq N: \quad |a_{m+1}| < \varepsilon \Rightarrow$ Beh. ■

4.2 Bemerkung

Es gilt nicht „$\Leftarrow$" in Satz 4.1

Bsp.: harmonische Reihe $a_k = \frac{1}{k}$

(vgl. Aufg. 2, Blatt 5)

4.3 Definition Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$.

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \quad \underset{\sim}{\text{absolut konvergent}} \\ (\text{in } \mathbb{K})\end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \quad \text{kgt. (in } \mathbb{R})\right.$$

4.4 Satz Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \ \underline{\text{abs.}}\ \text{kgt.} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \ \text{kgt.}$$

4.5 Bemerkung

Es gilt <u>nicht</u> "$\Leftarrow$" in Satz 4.4

Bsp.: alternierende harmon. Reihe $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$, sowie Aufgabe 2, Blatt 5 & Aufgabe 2, Blatt 6.

Beweis von Satz 4.4:

Sei $\sum_k |a_k|$ kgt. $\Rightarrow$ $(s_n)_n$ ist Cauchy, wobei $s_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > m \geq N: |s_n - s_m| < \varepsilon$

Sei $\tilde{s}_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, dann gilt

$$|\tilde{s}_n - \tilde{s}_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{iterierte } \Delta\text{'s Ungl.}}}{\leq} \left|\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\right| = |s_n - s_m|$$

$\Rightarrow (\tilde{s}_n)_n$ Cauchy $\Rightarrow$ Beh. ▨

4.6 Satz (Majoranten-Kriterium)

Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$, $(c_k)_k \subseteq \mathbb{R}_{\geq}$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k$ kgt.

und $|a_k| \leq c_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Dann ist $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ absolut kgt.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_k c_k$ kgt. $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > m \geq N$:

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon \quad \text{(Partialsummen Cauchy)}$$

$\Rightarrow (s_n)_n$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, ist Cauchy $\Rightarrow$ Beh. ■

4.7 Beispiel: $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \geq 2$, gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ kgt.

Beweis: $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt: $k^\alpha = \underbrace{k^{\alpha-2}}_{\geq 1} \underbrace{k^2}_{\geq k \frac{k+1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{2}{k(k+1)} =: c_k$

$\Rightarrow$ Beh. mit Satz 4.6 und Bsp. 2.45 ✓

(Das Resultat ist noch nicht optimal: kgt. $\forall \alpha > 1$; später!)

4.8 Satz (Quotientenkriterium)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ mit $a_k \neq 0 \ \forall k \geq N$, $N \in \mathbb{N}$. Es existiere

$\theta \in \,]0,1[\ \forall k \geq N: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq \theta \qquad (*)$

Dann kgt. $\sum_k a_k$ absolut.

unabhängig von k !

Beweis o.E. gelte (*) und $a_k \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ (endlich viele Glieder abändern beeinflusst Kgz. nicht!)

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad |a_{k+1}| \le \theta |a_k| \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \overset{\text{vollst. Ind.}}{\Rightarrow}$$

$$|a_k| \le \underbrace{\theta^{k-1} |a_1|}_{=: c_k \ge 0} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Da $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k = |a_1| \sum_{k=0}^{n-1} \theta^k \Rightarrow (s_n)_n$ kgt. da $|\theta| < 1$ (geometrische Reihe!)

$\Rightarrow$ Beh. mit Satz 4.6 ∎

4.9 Bemerkung

(i) Quotientenkriterium: (*) $\Leftrightarrow \limsup_{k \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

(ii) Warnung: Die Bedingung: $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \ge N$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

ist nicht hinreichend für Kgz. von $\sum_k a_k$

Bsp. harmonische Reihe $a_k = \frac{1}{k}$.

4.10 Beispiel

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$ kgt. $\forall x \in \mathbb{K}$, denn

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{|x|}{k+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \forall k \ge \lfloor |x| \rfloor}}{\le} \frac{x}{\lfloor |x| \rfloor + 1} =: \theta < 1$$

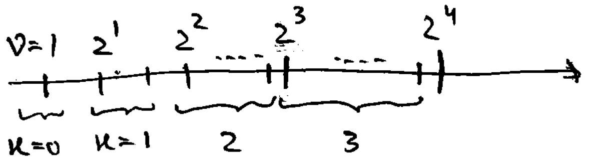
4.11 Cauchyscher Verdichtungssatz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty[$ antiton mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ kgt.} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ kgt.}$$

Beweis: Sei $s_n := \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$, $\sigma_k := \sum\limits_{\kappa=0}^{k} 2^\kappa a_{2^\kappa}$

"⇐" Sei $n < 2^k \Rightarrow s_n \le s_{2^{k+1}-1} = \sum\limits_{\kappa=0}^{k} \underbrace{\sum\limits_{\nu=2^\kappa}^{2^{\kappa+1}-1} a_\nu}$ (a_n antiton)



$$\le \sum_{\nu=2^\kappa}^{2^{\kappa+1}-1} a_{2^\kappa}$$

$$\le \sum_{\kappa=0}^{k} 2^\kappa a_{2^\kappa} = \sigma_k$$

Da n.V. $(\sigma_k)_k$ kgt., isoton $(a_n \ge 0)$ $\Rightarrow \forall k: \sigma_k \le \sigma := \lim\limits_{\kappa\to\infty} \sigma_\kappa$

$\Rightarrow s_n \le \sigma \ \forall n \overset{(s_n)_n \text{ isoton}}{\Rightarrow} (s_n)_n$ kgt. ✓

"⇒" sei $n > 2^k \Rightarrow s_n \ge s_{2^k} = \sum\limits_{\kappa=1}^{k} \underbrace{\sum\limits_{\nu=2^{\kappa-1}+1}^{2^\kappa} a_\nu}_{\ge \sum\limits_{\nu=2^{\kappa-1}+1}^{2^\kappa} a_{2^\kappa}} + a_1$

d.h., $s_n \ge a_1 + \sum\limits_{\kappa=1}^{k} 2^{\kappa-1} a_{2^\kappa}$

$$\ge \frac{1}{2}\sigma_k$$

da n.V. $(s_n)_n$ kgt. und isoton $\Rightarrow \forall n: s_n \le s := \lim\limits_{\nu\to\infty} s_\nu$

$\Rightarrow \sigma_k \le 2s \ \forall k \overset{(\sigma_n)_n \text{ isoton}}{\Rightarrow} (\sigma_k)_k$ kgt.

▨

4.12 Korollar

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{kgt., für } \alpha > 1 \\ \text{divgt., für } \alpha \le 1 \end{cases}$$

(Bislang ist hier noch $\alpha \in \mathbb{Q}$; Resultat auch gültig für $\alpha \in \mathbb{R}$; Potenz mit irrationalen Exponenten wird erst später def.)

Beweis:

- $\alpha > 1 \Rightarrow q := \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < 1$ (da: $\alpha - 1 = \frac{\overset{\in\mathbb{N}}{p}}{q \in \mathbb{N}}$
  Ann: $(2^{-p})^{\frac{1}{q}} \ge 1 \Rightarrow 2^{-p} \ge 1$ ↯)

Somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha}}_{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right]^k} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{kgt. da } 0 < q < 1$$

(geom. Reihe!)

$\Rightarrow$ Beh. mit Satz 4.11 ✓

- $\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{n^{1-\alpha}}_{\ge 1 \text{ wie oben}} \ge \frac{1}{n}$

Ann: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ kgt. $\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{kgt.}}$ (Maj. krit.) ↯ $\Rightarrow$ Beh. ☒

4.13 Bemerkung Sei $\sum_n a_n$ kgt.'e Reihe. Dann gilt:

(i) Man darf Klammern (zusätzlich) setzen: z.B.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{b_1} + \underbrace{a_3}_{b_2} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6)}_{b_3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

wobei $b_k := \sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} a_n$ wobei $1 = N_1 < N_2 < N_3 < \dots$

d.h. $(N_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ strikt isoton

denn: $\sum_{k=1}^{K} b_k = \sum_{n=1}^{N_{K+1}-1} a_n = s_{N_{K+1}-1}$; da $(s_n)_n$ kgt.

so auch Teilfolge, mit selbem Limes.

(iii) Man darf bestehende Klammern nicht umsetzen

Bsp.: $a_n := 0 = 1-1$

$$0 = \sum_n a_n = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$$

aber $1+(-1+1)+(-1+1)+(-1 \dots) = 1$

4.14 Satz (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Folge und $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,\infty]$

Für die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ gilt, dass sie

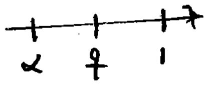
(i) konvergiert absolut, falls $\alpha < 1$

(ii) divergiert, falls $\alpha > 1$

(iii) konvergiert, konvergiert abs. oder divergiert, falls $\alpha = 1$

Bew: (i) Da lim sup größte Häuf.pkt., und $\alpha < 1$:

$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} =: q < 1$



Damit

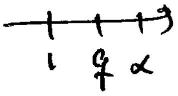
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} |a_n|}_{=:M<\infty} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^n \leq M + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = M + \frac{1}{1-q} - 1 < \infty$$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ abs kgt.

(ii) $\alpha > 1 \Rightarrow \exists$ Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \xrightarrow{k\to\infty} \alpha > 1$

D.h. $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N: \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} =: q > 1$

$\Rightarrow |a_{n_k}| \geq q^{n_k} \geq 1$



$\Rightarrow (a_n)_n$ ist keine Nullfolge

$\Rightarrow \sum_n a_n$ divergent.

(iii) Für $\alpha = 1$ kann alles passieren:

	Konv.	Abs-konv.	Div.	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}$
$\sum\limits_n \frac{1}{n}$	×	×	✓	$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$
$\sum\limits_n \frac{1}{n^2}$	✓	✓	×	$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$
$\sum\limits_n \frac{(-1)^n}{n}$	✓	×	×	$\sqrt[n]{\left\lvert \frac{(-1)^n}{n} \right\rvert} \to 1$

■

4.15 Umordnungssatz Sei $(a_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ und $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv („Umordnung"). Dann gilt:

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ absolut kgt. $\Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_{U(n)}$ abs. kgt. und

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{U(n)}$$

4.16 Bemerkung (i) Vorraussetzung absolut kgt. wesentlich, d.h. ohne sie ist Beh. falsch (⇝ siehe auch: „Riemannscher Umordnungssatz")

Bsp: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; alt. harm. Reihe
kgt. aber nicht abs. kgt.

Betrachte folgende Umordnung:

$$-1 + \frac{1}{2} \underbrace{- \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)}_{2^0 \text{ Glieder}} + \frac{1}{4}}_{n=1:\, b_1} \underbrace{- \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)}_{2^1 \text{ Glieder}} + \frac{1}{6}}_{n=2:\, b_2} \underbrace{- \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right)}_{2^2 \text{ Glieder}} + \frac{1}{8}}_{n=3:\, b_3}$$

$$- \dots \underbrace{- \underbrace{\left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right)}_{\geq 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{\leq \frac{1}{6} \ (n \geq 2)}}_{\leq -\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}}$$

$\Rightarrow$ mit jedem weiteren Summand wird ein Wert $\le -\frac{1}{12}$ dazuaddiert $\Rightarrow$ Partialsumme antiton & nicht von unten beschr. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{N} b_n \xrightarrow{N\to\infty} -\infty$

(ii) Es gilt sogar für konv. Reihe $\sum_n a_n$

$$\sum_n a_{u(n)} \text{ kgt. } \underset{\exists}{\forall} \text{ Umordnungen } u \Rightarrow \sum_n a_n \text{ abs.-kgt.}$$

(folgt z.B. aus Riemannschen Umordnungssatz per Widerspruchsbew.)

Beweis von Satz 4.15: Sei $S := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Da abs. kgt.:

$\exists N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{N} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left|S - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| = \lim_{\substack{K\to\infty\\ K>N}} \Big|\underbrace{\sum_{n=1}^{K} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n}_{\sum_{n=N+1}^{K} a_n}\Big| \le \lim_{\substack{K\to\infty\\ k>N}} \sum_{n=N+1}^{K} |a_n| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei nun $M \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\{u(1), u(2), \dots, u(M)\} \supseteq \{1, \dots, N\}$ (d.h. $M \ge \max\{u^{-1}(j) : j = 1, \dots, N\}$)

$\Rightarrow \forall m \ge M$ gilt:

$$\left|S - \sum_{k=0}^{m} a_{u(k)}\right| \le \underbrace{\left|S - \sum_{n=1}^{N} a_n\right|}_{<\varepsilon/2} + \Big|\underbrace{\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{k=1}^{m} a_{u(k)}}_{-\sum_{\substack{k\le m\\ u(k)>N}} a_{u(k)}}\Big|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\sum_{\substack{k\le m\\ u(k)>N}} |a_{u(k)}|}_{\le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

d.h., $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)}$ kgt. mit Summe S ✓

Wiederhole Argument mit $A := \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_{u(k)}|$ kgt. (mit Summe A), d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)}$ abs. kgt. ∎

4.17 Satz (von Mertens über das Cauchy-Produkt von Reihen)

Seien $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n$ kgt.'e Reihen in $\mathbb{K}$, eine davon absolut kgt.! Für $n\in\mathbb{N}_0$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Dann ist $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n$ kgt. und
$$\underbrace{\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n\Big)}_{=:A}\underbrace{\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n\Big)}_{=:B} = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n}_{=:C}$$

Zusatz: Falls beide Reihen $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ abs kgt., dann ist auch $\sum_n c_n$ abs kgt.

Beweis: o.E. sei $\sum_n a_n$ abs. kgt. Für $N\in\mathbb{N}$ seien A_N, B_N, C_N die zugeh. Partialsummen. $\Rightarrow$ $\left(C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n\right)$

$$C_N = \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{c_1} + \dots + \underbrace{(a_0 b_N + a_1 b_{N-1} + \dots + a_N b_0)}_{c_N}$$
$$= a_0 B_N + a_1 B_{N-1} + \dots + a_N B_0$$
$$\overset{B_N =: B-\beta_N}{=} A_N B - (a_0\beta_N + \dots + a_N\beta_0) =: A_N B - \omega_N$$

Wir zeigen: $(\omega_N)_N$ ist Nullfolge (dies impliziert den Satz, da $A_N \to A$)

es gilt: (i) $(\beta_N)_N$ ist Nullfolge (klar: $B_N \to B$)

(ii) $(a_n)_n$ ist Nullfolge

Sei $\varepsilon > 0$ bel.: $\overset{(i)}{\Rightarrow} \exists k\in\mathbb{N}\ \forall N \geq k: |\beta_N| \leq \frac{\varepsilon}{S}$; $S := \sum_n |a_n| < \infty$

$$\Rightarrow \forall N \geq k \text{ gilt}: |\omega_N| = \Big|\sum_{j=0}^{N} \beta_j a_{N-j}\Big| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |\beta_j| \cdot |a_{N-j}| + \underbrace{\sum_{j=k}^{N} \underbrace{|\beta_j|}_{\leq \frac{\varepsilon}{S}} \cdot |a_{N-j}|}_{\leq \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \limsup_{N\to\infty} |\omega_N| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |\beta_j| \underbrace{\limsup_{N\to\infty} |a_{N-j}|}_{=0\ (ii)} + \varepsilon = \varepsilon$$

$$\overset{\varepsilon>0 \text{ bel.}}{\Rightarrow} \limsup_{N\to\infty} |\omega_N| = 0 \Rightarrow (\omega_N)_N \text{ Nullfolge } ✓$$

Zusatz: Anwendung des bisherigen auf $\sum_n |a_n|$, $\sum_n |b_n|$

4.2 Potenzreihen

4.18 Definition Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}$

(i) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt Potenzreihe (in $\mathbb{K}$)

(ii) dadurch induzierte Funktion: $f_{(a_n)_n} : \begin{array}{l} \mathcal{D} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{array}$

$$\mathcal{D} := \left\{ x \in \mathbb{K} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ \underline{\text{kgt.}} \right\}$$

4.18 Beispiele

(i) $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{x^n}{n!} \overset{\text{Bsp. 4.10}}{\Longrightarrow} \mathcal{D} = \mathbb{K}$

(ii) $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n \underset{\text{Reihe}}{\overset{\text{geom.}}{\Longrightarrow}} \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{K};\ |x| < 1\}$

(Divgz. $\forall x \in \mathbb{C}$, $|x| = 1$: später)

(iii) $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} n^n x^n$ für $x \neq 0$ und $n > \frac{2}{|x|}$

$\Rightarrow |n^n x^n| > 2^n \Rightarrow \underline{\text{divgt.}}$

$\Rightarrow \mathcal{D} = \{0\}$

Beispiele illustrieren die $\underline{\underline{3}}$ Möglichkeiten, die auftreten können.

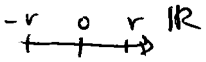
4.19 Satz von Cauchy-Hadamard

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Def.-bereich $\mathcal{D}$. Dann gilt

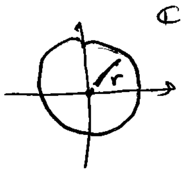
(i) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} = \mathbb{K}$

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} = \{0\}$

(iii) $\frac{1}{r} = r^{-1} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in]0,\infty[\quad \Rightarrow$



Inneres von $\mathcal{D}$ $\rightarrow$ $\{x \in \mathbb{K} : |x| < r\} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq r\}$



(insbes.: $\sum_n a_n x^n$ divgt. für $|x| > r$)

4.20 Definition r aus (iii) ist **Konvergenzradius** der Potenzreihe $\sum_n a_n x^n$. Konventionen: $r := \infty$ im Fall (i)

$r := 0$ im Fall (ii)

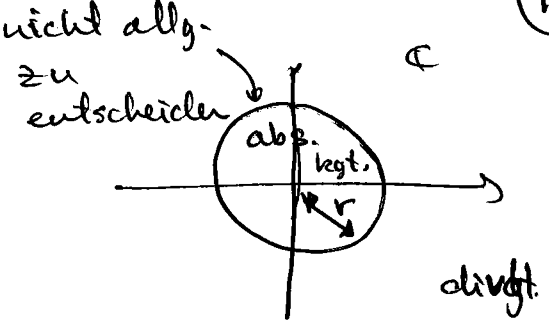
Beweis von Satz 4.19

Wurzelkriterium für $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n$, $c_n := a_n x^n$ (Satz 4.14)

- (i) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}$
  $\Rightarrow$ abs kgt. $\forall x \in \mathbb{K}$
- analog im Fall (ii): $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty \quad \forall 0 \neq x \in \mathbb{K}$
  $\Rightarrow$ divgt. $\forall 0 \neq x \in \mathbb{K}$
- Fall (iii): $|x| < r \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|c_n|} < 1 \Rightarrow$ abs kgt.
  $|x| > r \Rightarrow$ " $> 1 \Rightarrow$ divgt.

▨

4.21. Bemerkung



(i) Für $x \in \{x' \in \mathbb K : |x'| = r\}$
(Rand des Kgz.-kreises in $\mathbb C$, bzw. des Kgz.-intervalles in $\mathbb R$)

kann $\sum_n a_n x^n$ sowohl konvergieren als auch divergieren

Bsp.: $\mathbb K = \mathbb R$ und $a_n := \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow r^{-1} := \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}}_{\le 1} \le 1$

$$\sum_n a_n x^n \begin{cases} \text{kgt. für } x = +1 & (\text{alt.-harmon. Reihe}) \\ \text{divgt. für } x = -1 & (\text{harm. Reihe}) \end{cases}$$

$\overset{\text{Satz 4.19 (iii)}}{\Longrightarrow} \quad r = 1$

(ii) $\forall x \in \mathbb K$ mit $|x| < r$ (und $x = 0$) gilt:

$\sum_n a_n x^n$ abs. kgt.

(iii) Hinreichende Bed. aus Quotientenkrit. (falls $a_n \neq 0 \ \forall n \geq N$):

- $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: \frac{1}{\rho_1} \Rightarrow$ abs. Kgz. $\forall x \in \mathbb K$ mit $|x| < \rho_1$
- $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: \frac{1}{\rho_2} \Rightarrow$ Divergenz $\forall x \in \mathbb K$ mit $|x| > \rho_2$ (vgl. Übung)

Zur Vorbereitung der Stetigkeit von Potenzreihen dient:

4.22. Satz (Konvergenzkriterium von Weierstraß)

Sei $\mathcal D \subseteq \mathbb K$, $\forall n \in \mathbb N$ sei $\varphi_n : \mathcal D \to \mathbb K'$ mit $\sum_{n\in\mathbb N} \underbrace{\|\varphi_n\|_\infty}_{:= \sup_{x\in\mathcal D} |\varphi_n(x)|} < \infty$

Dann gilt:

(1) $\forall x \in \mathcal D$ kgt. $\sum_{n\in\mathbb N} \varphi_n(x)$ absolut, und

$$\Phi : \begin{array}{l} \mathcal D \to \mathbb K' \\ x \longmapsto \sum_{n\in\mathbb N} \varphi_n(x) \end{array}$$ ist wohldef. Notation: $\sum_{n\in\mathbb N} \varphi_n := \Phi$

(2) $(S_n)_n$ kgt. gleichm. gegen Φ (auf $\mathcal D$), wobei

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$$

Jargon: $\sum_n \varphi_n$ kgt. absolut und gleichm. (glm.)

Beweis (1) $\forall x \in D: \quad |\varphi_n(x)| \le \|\varphi_n\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\overset{\text{Major.-krit.}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| \quad \text{kgt.} \quad \forall x \in D \quad \checkmark$$

Sei $\Phi(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x) \quad \forall x \in D$; dies def. $\Phi : D \to \mathbb{K}$

(2) Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_n \|\varphi_n\|_\infty$ kgt. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \ge N$:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi_k\|_\infty < \varepsilon \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \forall n \ge N: \quad \|\Phi - s_n\|_\infty = \sup_{x\in D} |\underbrace{\Phi(x) - s_n(x)}_{\sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(x)}|$$

$$\le \sup_{x\in D} \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{|\varphi_k(x)|}_{\le \|\varphi_k\|_\infty} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi_k\|_\infty \overset{(*)}{<} \varepsilon \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{4.23. Satz}}$ Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Kgz.-rad $r \in \mathbb{R}_{>} \cup \{\infty\}$ und $f_{(a_n)_n}$ die zugeh. Fkt. $\forall 0 < \rho < r$ kgt. $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ absolut und glm. auf $D = B_\rho := \{x \in \mathbb{K} : |x| < \rho\}$ gegen $f_{(a_n)_n}$. Insbesondere ist $f_{(a_n)_n}$ stetig auf B_r und glm. stetig auf $\overline{B}_\rho := \{x \in \mathbb{K} : |x| \le \rho\}$ $\forall 0 < \rho < r$.

Beweis: (1) Sei $\varphi_n : B_\rho \to \mathbb{K}, \ x \mapsto a_n x^n$

$$\Rightarrow \|\varphi_n\|_\infty = |a_n| \rho^n$$

$$\overset{\rho < r}{\underset{\text{Satz 4.19(iii)}}{\Longrightarrow}} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|\varphi_n\|_\infty \quad \text{kgt.}$$

$$\overset{\text{Satz 4.22}}{\Longrightarrow} \quad f_{(a_n)_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \varphi_n \quad \text{abs. und glm. kgt. auf } B_\rho$$

(2) da $\sum_{k=0}^{n} \varphi_k : B_\varrho \to \mathbb{K}$ stetig $\forall n \overset{\text{Satz 3.33}}{\underset{\text{und (1)}}{\Longrightarrow}} f_{(a_n)_n}$ stetig auf B_ϱ;

da $\varrho \in]0,r[$ bel. $\Rightarrow f_{(a_n)_n}$ stetig auf $\bigcup_{\varrho \in]0,r[} B_\varrho = B_r$

(3) Für $\varrho \in]0,r[$ ist $\overline{B_\varrho}$ kompakt (Bsp. 3.25) und $f_{(a_n)_n}$ stetig auf $\overline{B_\varrho} \subset B_r \overset{\text{Satz 3.29}}{\Longrightarrow} f_{(a_n)_n}$ glm.-stetig auf $\overline{B_\varrho}$ ☒

Gleichheit von Potenzreihen für „hinreichend" viele x nur möglich, wenn alle Koeffizienten gleich sind:

4.24. Identitätssatz Seien $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n x^n$ Potenzreihen in $\mathbb{K}$ mit Kgz-radius $r > 0$

Falls $\exists (x_m)_m \subset B_r \setminus \{0\}$ mit $x_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und

$$f_{(a_n)_n}(x_m) = f_{(b_n)_n}(x_m) \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

Übereinstimm. auf Menge mit Häuf.-pkt

dann gilt $a_n = b_n \; \forall n \in \mathbb{N}_0$

4.25 Bemerkung: Identitätssatz kann verschärft werden: Es reicht, wenn $\exists \tilde{x} \in B_r$ mit $x_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{x}$

d.h. $\tilde{x}$ musss nicht 0 sein!

(Mehr dazu in der Vorlesung „Funktionentheorie"..)

Beweis von Satz 4.24

per Ind. nach $n \in \mathbb{N}_0$:

$n=0$: $a_0 = f_{(a_n)_n}(0) \overset{\text{stetig}}{=} \lim_{m\to\infty} \underbrace{f_{(a_n)_n}(x_m)}_{= f_{(b_n)_n}(x_m)} \overset{\text{stetig}}{=} b_0$

$n \to n+1$: es gelte $a_\nu = b_\nu \;\forall \nu \in \{0, .., n\}$ (∗)

z.z.: $a_{n+1} = b_{n+1}$

Für $x \in B_r \setminus \{0\}$ sei

$$g(x) := \frac{1}{x^{n+1}} \left[f_{(a_n)_n}(x) - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \right] = a_{n+1} + a_{n+2} x + \ldots$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+n+1} x^\nu$$

$$h(x) := \frac{1}{x^{n+1}} \left[f_{(b_n)_n}(x) - \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu \right] = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu+n+1} x^\nu$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad g(x_m) = h(x_m) \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} \overset{g \text{ stetig}}{=} \lim_{m \to \infty} \underbrace{g(x_m)}_{= h(x_m)} \overset{h \text{ stetig}}{=} b_{n+1}$$

▨

4.3. Exponentialfunktion

4.26. Definition

Exponentialfunktion $\exp : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{z^n}{n!} =: \exp(z) \end{array}$

[wohldef., da Kgz.radius der Potenzreihe $r = \infty$
(siehe Bsp. 4.10) $\Rightarrow$ abs. kgt. auf $\mathbb{C}$]

4.27 Satz

(a) exp ist stetig.

(b) $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{n!}$ (Eulersche Zahl)

(c) Funktionalglg: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$$

(d) $\forall z \in \mathbb{C}$: $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

(e) $\forall z \in \mathbb{C}$: $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$

(f) insbes. $\forall x \in \mathbb{R}$:
- $\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix)$
- $|\exp(ix)| = 1$

Beweis: (a) Satz 4.23, da $r = \infty$ (b) klar!

(c) Übung

(d) Ann.: $\exists z_0 \in \mathbb{C}$: $\exp(z_0) = 0$

$$\Rightarrow \quad e = \exp(1) = \exp(1 - z_0 + z_0) \overset{(c)}{=} \exp(1 - z_0)\underbrace{\exp(z_0)}_{0} = 0 \quad ↯$$

Somit $1 = \exp(0) = \exp(z-z) \overset{(c)}{=} \exp(z)\exp(-z)$

$$\overset{\exp(z)\neq 0}{\Longrightarrow} \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \, .$$

(e) $$\overline{\exp(z)} = \overline{\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}\right)} \overset{\text{Kor 2.9}}{=} \lim_{N\to\infty}\underbrace{\overline{\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}\right)}}_{\sum_{n=0}^{N}\underbrace{\overline{\frac{z^n}{n!}}}_{\frac{1}{n!}\underbrace{\overline{z^n}}_{(\overline{z})^n}}}$$

$$= \exp(\overline{z})$$

(f) aus (e) und (c) ▨

4.28 Satz (Reelle Exp. Fkt.)

(a) $\exp : \mathbb{R} \to \,]0,\infty[$ strikt isoton, bijektiv, stetig

(b) $\exp(\mathbb{R}_>) = \,]1,\infty[$, d.h. $x > 0 \Rightarrow \exp(x) > 1$

(c) $\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty}\exp(x) = 0$

Beweis: (a) $\exp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ klar wegen Def. (nur reelle Koeff.).

Sei $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exp(x) \overset{4.27(c)}{=} \Big(\underbrace{\exp\left(\tfrac{x}{2}\right)}_{\in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ (4.27(d))}\Big)^2 > 0$

- stetig nach Satz 4.23
- strikt isoton: $x_2 > x_1 \Rightarrow \exp(x_2) = \exp(x_1)\exp(\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}) \overset{(b)}{>} \exp(x_1)$
- injektiv (da strikt isoton)
- surjektiv: (c) & Stetigkeit (& Zwischenwertsatz)

(b) Sei $x > 0 \Rightarrow \exp(x) = 1 + x + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{>0} > 1 + x > 1$

(c) $\lim_{x\to\infty} \underbrace{\exp(x)}_{\geq 1+x} \overset{(b)}{=} \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\exp(-x)}_{1/\exp(x)} = 0$ ■

4.29 Korollar $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z) = \exp(\operatorname{Re} z) \exp(i \operatorname{Im} z)$$

$$|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$$

4.30 Satz $\forall q \in \mathbb{Q} : \exp(q) = e^q$

(Erinnerung : $q = \frac{m \in \mathbb{Z}}{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow e^q = \sqrt[n]{e^m}$)

Beweis : $[\exp(q)]^n = \exp(\underbrace{nq}_{=m=1\cdot m}) = [\underbrace{\exp(1)}_{e}]^m = e^m > 0$

$\Rightarrow \exp(q) = \sqrt[n]{[\exp(q)]^n} = \sqrt[n]{e^m} = e^q$ ■

4.31 Definition $\forall z \in \mathbb{C} : e^z := \exp(z) \quad (\in \mathbb{C})$

- Im Einklang mit Bisherigen für $z \in \mathbb{Q}$ wegen Satz 4.30
- alle Resultate für $\exp(\cdot)$ übertragen sich auf $e^{\cdot}$

4.4. Trigonometrische Funktionen, π und Polardarstellung komplexer Zahlen

4.32. Definition

Kosinus

$$\cos : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \end{array}$$

Kgz. radius $r = \infty$

Sinus

$$\sin : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \end{array}$$

$\Rightarrow$ abs. kgt. auf $\mathbb{C}$.

4.33 Satz

$\forall z \in \mathbb{C}$:

(a) sin, cos sind stetig

(b) $$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

(c) $\cos(z) = \cos(-z)$; $\sin(z) = -\sin(-z)$; insbes.: $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$

(d) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ Eulersche Formel

(e) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ Pythagoras $[\sin^2 z := (\sin z)^2]$

(f) Additionstheoreme: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(i) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

(ii) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

(iii) $$\sin z_1 - \sin z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2}$$

(iv) $$\cos z_1 - \cos z_2 = -2 \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2}$$

u.v.m. … siehe z.B.

Gradshteyn / Ryzhik: „Table of integrals, series and products".

Beweis (a) Satz 4.23 (da $r = \infty$)

(b) $$e^{iz} + e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}$$

(beide Reihen kgt. $\forall z \in \mathbb{C}$) $$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big[\underbrace{(iz)^n + (-iz)^n}_{= \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 2\underbrace{(iz)^n}_{i^n z^n}, & n \text{ gerade} \end{cases}} \Big]$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \underbrace{i^{2k}}_{\underbrace{(i^2)^k}_{-1}} z^{2k}$$

allg.: $$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4l \\ i, & n = 4l+1 \\ -1, & n = 4l+2 \\ -i, & n = 4l+3 \end{cases} \quad l \in \mathbb{N}_0$$

$= 2\cos z$.

Für sin analog!

(c) klar aus Def., oder (b)

(d) klar aus (b)

(e) Übung!

(f) Übung!

4.34 Satz (Reelle trigonom. Fkt.'en)

(a) $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$
$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ stetig

(b) $\forall x \in \mathbb{R}: \cos x = \operatorname{Re} e^{ix}, \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$

Beweis: (b) aus $e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ & Satz 4.33(b)

(a) $\sin(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, $\cos(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ aus Def.

$\Rightarrow \sin^2 x \geq 0, \quad \cos^2 x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\overset{\text{Satz 4.33(e)}}{\Rightarrow} \sin^2 x \in [0,1], \quad \cos^2 x \in [0,1] \Rightarrow$ Beh. ∎

4.35 Satz & Definition

$\exists!\, \xi \in]0,2[$ mit $\cos \xi = 0$.

Kreiszahl: $\pi := 2\xi$ (also $\pi \in]0,4[$)

Der Beweis beruht auf

4.36 Lemma $\forall x \in]0,3[$ gilt

(a) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

(b) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$

[Die Aussage von Lemma 4.36 ist sogar $\forall x > 0$ wahr – mehr dazu später]

Beweis: Übung!

Beweis von Satz 4.35

$$\cos 0 = 1 , \quad \cos 2 \overset{\text{Lemma 4.36(a)}}{<} 1 - 2 + \underbrace{\frac{16}{24}}_{2/3} = -\frac{1}{3} < 0$$

da cos stetig $\overset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow}$ $\exists \xi \in \,]0,2[$ mit $\cos \xi = 0$.

Eindeutigkeit von ξ aus: $\cos :]0,2[\to \mathbb{R}$ strikt antiton

- wahr, denn $\forall x, y \in \,]0,2[$ mit $x > y$

Satz 4.33(f)(iv) $\Rightarrow$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \Big(\underbrace{\frac{x-y}{2}}_{\in]0,1[} \Big) \sin \Big(\underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\in]0,2[} \Big)$$

$$< 0$$

da Lemma 4.36(b): $\forall \tilde{x} \in \,]0,2[$:

$$\sin \tilde{x} > \tilde{x} \Big(1 - \frac{\tilde{x}^2}{6} \Big) > \frac{\tilde{x}}{3} > 0 \quad ▨$$

$\boxed{\text{4.37 Satz}}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

(i) $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = - \sin z$

$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$

(ii) $\cos(z + \pi) = - \cos z$

$\sin(z + \pi) = - \sin z$

(iii) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ und 2π ist <u>kleinste</u>

$\sin(z + 2\pi) = \sin z$ reelle Periode von sin und cos

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$$

Beweis: $\cos\frac{\pi}{2}=0 \overset{4.33(e)}{\Rightarrow} |\sin\frac{\pi}{2}|=1 \underset{4.36(b)}{\overset{\frac{\pi}{2}\in]0,2[}{\Rightarrow}} \sin\frac{\pi}{2}=1$

$\Rightarrow$ 4.33(d): $e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$e^{mi\pi/2} = (e^{i\pi/2})^m \Rightarrow$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
e^{ix}	1	i	-1	$-i$	1

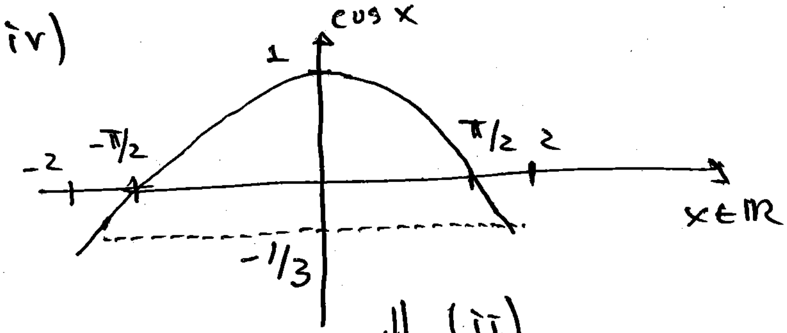
$\Rightarrow$ $\forall z\in\mathbb{C}$ aus Funktionalglg. von exp:

$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{e^{iz+i\pi/2}}_{e^{iz}\underbrace{e^{i\pi/2}}_{i}} + \underbrace{e^{-i(z+\frac{\pi}{2})}}_{\frac{e^{-iz}}{e^{+i\pi/2}} = -ie^{-iz}}\Big) = -\sin z \quad ✓$$

sin: analog.

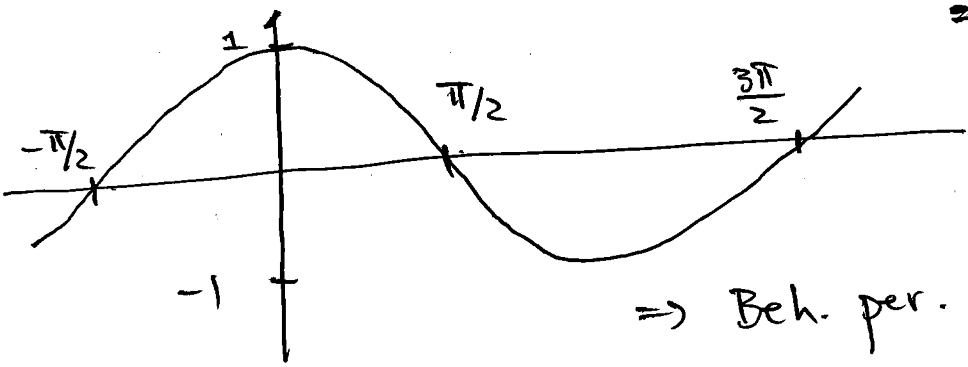
(ii), (iii): Iteration von (i), insbes.: 2π ist Periode. (kleinste Periode: siehe unten!)

(iv)



Satz 4.35 und cos gerade: $\pm\frac{\pi}{2}$ einzige Nullst. in $]-2,2[$

$\Downarrow$ (ii)



$\Rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ einzige Nullst. in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$\Rightarrow$ Beh. per. Induktion.

Nullstellen von sin nun aus (i)

Schließlich: 2π ist kleinste Periode von cos (und somit auch von sin), da:

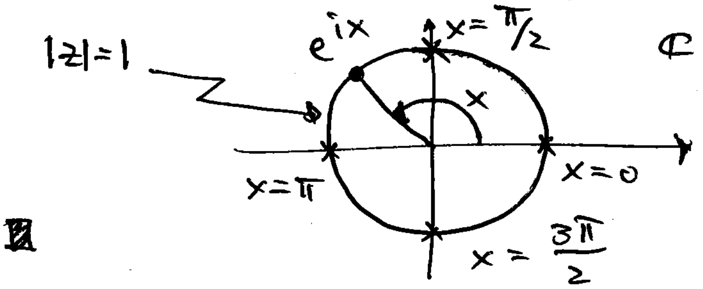
$\cos x > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
$\cos x < 0 \quad \forall x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ $\Rightarrow$ geht nicht kleiner ∎

4.38 Satz

(i) $2\pi i$ ist kleinste imaginäre Periode von exp, insbes.:

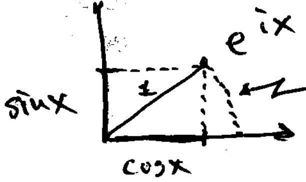
$$e^{z+2\pi i} = e^{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(ii) Mit wachsendem $x \in [0, 2\pi[$ durchläuft e^{ix} genau einmal den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ entgegen dem Urzeigersinn



Beweis: Satz 4.37 und Eulersche Formel ∎

Später:



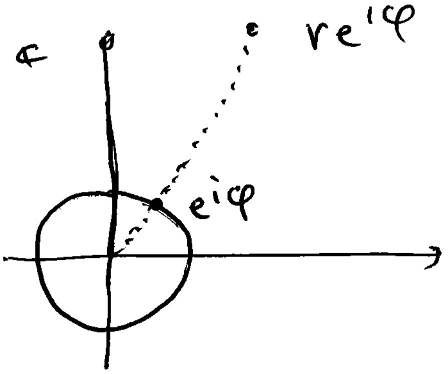
x = Länge des Winkelbogens im Einheitskreis

4.39 Korollar (Polardarstellung komplexer Zahlen)

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists!\, r \geq 0\ \exists \varphi \in \mathbb{R} : \quad z = r e^{i\varphi}$$

Phase, Argument

Betrag



es gilt:
- $r = |z|$
- falls $z \neq 0 \Rightarrow$ φ eindeutig bis auf Addition von $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Beweis: Sei $0 \neq z \in \mathbb{C}$ ($z = 0 \Rightarrow r = 0$, φ bel.)

$$\Rightarrow \left|\frac{z}{|z|}\right| = 1 \overset{\text{Satz 4.38}}{\Rightarrow} \exists!\, \varphi_0 \in [0, 2\pi[: \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi_0} \quad ∎$$

4.40 Def. Hauptzweig des Arguments

$$\arg : \begin{array}{l} \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow]-\pi, \pi] \\ z \longmapsto \varphi =: \arg(z) \end{array}$$

also: $z = |z| e^{i \arg(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

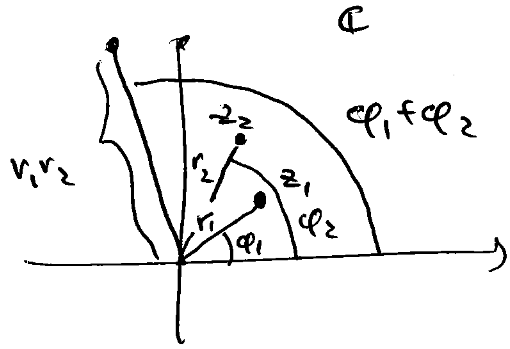
(ist nach Kor. 4.39 wohldef.)

4.41 Korollar (Multiplikation in Polardarstellung)

Seien $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$, $j = 1,2$, so ist

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

„Beträge multiplizieren, Argumente addieren"

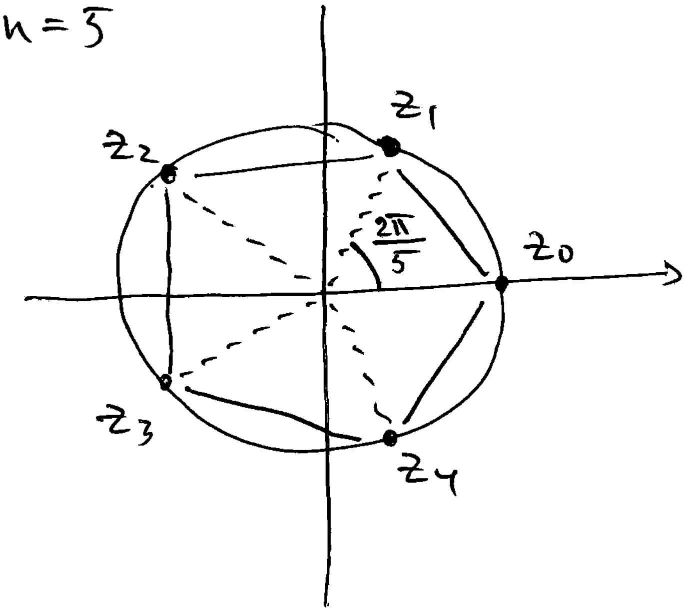


4.42 Korollar Sei $n \in \mathbb{N}$

Die Gleichung $z^n = 1$ besitzt genau n Lösungen in $\mathbb{C}$: $z_k := e^{k2\pi i/n}$, $k = 0, .., n-1$

n.te Einheitswurzeln

Bsp.: $n = 5$



allg.: regelmäßiges n-Eck

unter Benutzung der Bem. zwischen 4.38 und 4.39

Eine schöne Anwendung von Kor. 4.42 sowie der Sätze über stetige Funktionen ist

4.43 Fundamentalsatz der Algebra

Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}$, d.h. $\exists a_0, a_1, .., a_k \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0$, so dass $P(z) = \sum_{j=0}^{k} a_j z^j$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Dann besitz P eine Nullstelle.

<u>Beweis</u>: o.E. sei $a_k = 1$ (sonst betrachte $\tilde{P} := \frac{1}{a_k} P$)

Sei $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq}$, $z \mapsto |P(z)|$

<u>1. Akt</u>: Q nimmt Minimum an

(Idee: da $Q(z) \to \infty, |z| \to \infty$)

(i) $$Q(z) = |z|^k \cdot \Big|1 + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a_j z^{j-k}}_{=: r(z)}\Big|$$

$$|r(z)| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |a_j| \, |z|^{j-k} \xrightarrow{|z| \to \infty} 0$$

- $j-k < 0$
- endliche Summe

$\Rightarrow \exists \rho \in]0, \infty[: |r(z)| < \frac{1}{2}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho$

Da $1 = |1 - r(z) + r(z)| \leq |1 + r(z)| + |r(z)|$

$\Rightarrow |1 + r(z)| \geq 1 - |r(z)| > \frac{1}{2}$ $(|z| > \rho)$

$\Rightarrow Q(z) > |z|^k/2$ $\forall |z| > \rho$

Sei $R \geq \rho$ so groß, dass $R^k/2 \geq |a_0| = Q(0)$

$\Rightarrow \inf_{z \in \mathbb{C}} Q(z) = \inf_{z \in \overline{B}_R} Q(z)$ mit

$\overline{B}_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$

(ii) Da $\overline{B_R}$ kompakt (Bsp. 3.25)

und $Q : \overline{B_R} \to \mathbb{R}_{\geq}$ stetig $\overset{\text{Satz 3.26}}{\Longrightarrow}$

$$\exists z_- \in \overline{B_R} : Q(z_-) = \min_{z \in \overline{B_R}} Q(z) = \inf_{z \in \overline{B_R}} Q(z)$$

$\Rightarrow$ Beh. mit (i) ✓

2. Akt : $Q(z_-) = 0$

Ann: $Q(z_-) > 0$; sei $q(z) := \frac{1}{P(z_-)} P(z_- + z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$

also: (i) q Polynom vom Grad k mit $|q(z)| \geq q(0) = 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$

(ii) $\exists \xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $m \in \{1, \dots, k\}$ und Polynom $\tilde{q} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

so dass $q(z) = 1 + \xi z^m + z^{m+1} \tilde{q}(z)$ verwende: Pol $q(z) - 1$ verschwindet bei $z = 0$

Nun wähle $\tau \in \mathbb{C}$ mit $|\tau| = 1$: $\tau^m = -\overline{\xi}/|\xi|$ (!)

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_{\geq} : |q(\tau t)| = |1 - |\xi| t^m + (\tau t)^{m+1} \tilde{q}(\tau t)|$$

$$\leq |1 - |\xi| t^m| + t^{m+1} |\tilde{q}(\tau t)|$$

$$\text{für } t < |\xi|^{-1/m} \longrightarrow = 1 - t^m \underbrace{\left(|\xi| - \underbrace{t|\tilde{q}(\tau t)|}_{\xrightarrow{t \to 0} 0}\right)}_{\geq \frac{|\xi|}{2}}$$

$\exists t_0 > 0 :$ $\forall 0 < t \leq t_0$ $\rightarrow$

$\Rightarrow \forall 0 < t < \min(|\xi|^{-1/m}, t_0)$ gilt

$$|q(\tau t)| \leq 1 - \frac{t^m |\xi|}{2} < 1 \quad \lightning \text{ zu (i)} \quad \square$$

4.44 Korollar Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}$. Dann besitzt P genau k Nullstellen in $\mathbb{C}$, gezählt mit ihrer Vielfachheit.

4.5 Logarithmus und allgemeine Potenz

4.45 Satz und Definition

Sei $\mathbb{C}_l := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ (links geschlitzte komplexe Ebene)

und $S' := \{ z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi \}$ (offener Horizontalstreifen der Breite 2π)

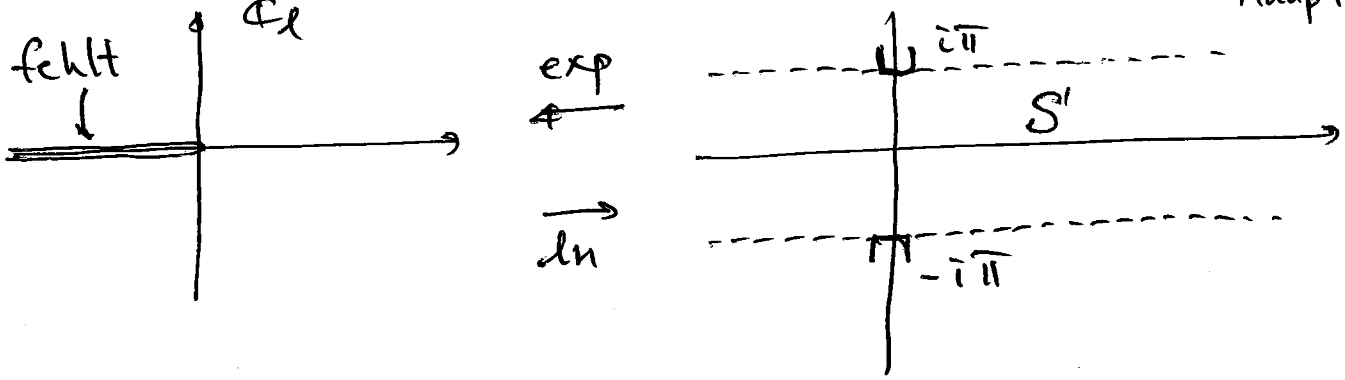
Dann gilt:

$$\exp : S' \to \mathbb{C}_l \quad \text{ist bijektiv.}$$

Umkehrfkt dazu: Hauptzweig des (naturlichen) Logarithmus

$$\ln : \mathbb{C}_l \to S' \qquad (\text{auch}: \log; \mathrm{Log}, \mathrm{Ln})$$

Hauptzweig



Beweis: Sei $z \in S' \Rightarrow e^z = \underbrace{e^{\operatorname{Re} z}}_{|e^z|} \underbrace{e^{i \operatorname{Im} z}}_{e^{i \arg(e^z)}}$

- Satz 4.28(a) $\Rightarrow$ $\mathbb{R} \to]0, \infty[$, $\operatorname{Re} z \mapsto e^{\operatorname{Re} z}$ bijektiv

- Def. 4.40 $\Rightarrow$ $]-\pi, \pi[\to \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \} \setminus \{-1\}$, $\operatorname{Im} z \mapsto e^{i \operatorname{Im} z}$ bijektiv

$\Rightarrow$ Beh. aus Polardarstellung, Kor. 4.39

∎

4.46 Satz (Funktionalglg. des ln)

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\ell$ mit $z_1 z_2 \in \mathbb{C}_\ell$. Dann $\exists!\, k = k_{z_1,z_2} \in \{0, \pm 1\}$:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i$$

Beweis: Für $j = 1,2$ $\exists!\, \zeta_j \in S$ mit $z_j = e^{\zeta_j}$ (Satz 4.45)

$$\Rightarrow \zeta_j = \ln z_j$$

Funkt.glg. von exp: $z := z_1 z_2 = e^{\zeta_1 + \zeta_2} = e^{\overbrace{\zeta_1+\zeta_2+2k\pi i}^{=:\zeta}}$

wobei $k \in \{0, \pm 1\}$ eindeutig durch

$$\operatorname{Im}(\zeta_1 + \zeta_2 + 2k\pi i) \in \,]-\pi, \pi[$$

festgelegt (NB: $z \in \mathbb{C}_\ell \Rightarrow \zeta \in S$)

$$\Rightarrow \ln z = \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + 2k\pi i$$ ▨

4.47 Korollar (Reeller Logarithmus)

$\exp : \mathbb{R} \to \,]0,\infty[$ ist bijektiv mit Umkehrfkt. $\ln : \,]0,\infty[\, \to \mathbb{R}$. Es gilt

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in \,]0,\infty[$$

Beweis: Sätze 4.28, 4.46 und 3.22 (da $\exp|_{\mathbb{R}}$ strikt isoton). ▨

4.48 Korollar

$\forall z \in \mathbb{C}_\ell$ gilt: $\ln z = \ln|z| + i\arg(z)$, und $\ln : \mathbb{C}_\ell \to S$ ist stetig.

Beweis: Satz 4.46; Stetigkeit aus Kor. 4.47 und Stetigkeit von arg (Übung!)

4.49 Definition (Allgemeine Potenz)

Für $a \in \mathbb{C}_\ell$ und $z \in \mathbb{C}$ setze

$$a^z := \exp(z \ln a) \qquad \underline{NB}: a^{z_1} a^{z_2} = a^{z_1+z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

4.50 Bemerkung

- $\begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto a^z \end{array}$ stetig $\forall a \in \mathbb{C}_\ell$
- konsistent mit Def. 4.31 für $a = e$, wegen $\ln e = 1$.
- konsistent mit Def. 2.71 für $a \in \mathbb{R}_>$ und $z = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, da:

$$\exp\left(\frac{m}{n} \ln a\right) = \sqrt[n]{\exp(m \ln a)}$$

- linke Seite $\in \mathbb{R}$
- $(\text{linke Seite})^n = \exp(m \ln a)$ wegen Fkt.-glg.
- Eindeutigkeit der positiven n'ten Wurzel

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{m}{n} \cdot \ln a\right) = \sqrt[n]{[\underbrace{\exp(\ln a)}_{a}]^m} = \sqrt[n]{a^m}$$

4.51 Satz

(i) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|\operatorname{Im} z_1| < \pi$: $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$

(ii) $\forall z_1 \in \mathbb{C}_\ell \; \forall z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1^{z_2} \in \mathbb{C}_\ell \; \exists! k \in \mathbb{Z}$:

$$\ln(z_1^{z_2}) = z_2 \ln z_1 + 2k\pi i$$

Beweis: Übung!

5. Differenzieren von Funktionen auf $\mathbb{R}$

5.1. Ableitung

Im folgenden stets:
$D \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

5.1. Definition

Sei $f : D \to \mathbb{K}'$, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt von D

(a) f differenzierbar in a $:\Longleftrightarrow$ $\underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{=: f'(a) =: \frac{df}{dx}(a)}$ existiert

(1.) Ableitung von f in a

(auch: Differentialquotient von f in a)

(b) falls $a \in D$ Häufungspkt. von $D \cap [a, \infty[$, setze:

f von rechts diff. in a $:\Longleftrightarrow$ $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =: f'_+(a)$ existiert

analog: von links diff-bar

(c) Sei $A \subseteq D$ mit $\forall a \in A$ gilt: a ist Häufungspkt. von D

f diff. bar auf A $:\Longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \forall a \in A \text{ gilt:} \\ f \text{ diff. bar in } a \end{array} \right.$

mit (1.) Ableitung von f auf A: $f' : \begin{array}{l} A \to \mathbb{K}' \\ a \mapsto f'(a) \end{array}$

auch: $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx} f$

(d) f diff. bar $:\Longleftrightarrow$ f diff. bar auf D.

5.2. Bemerkung (i) Für $a \in D$ Häufungspkt von D gilt:

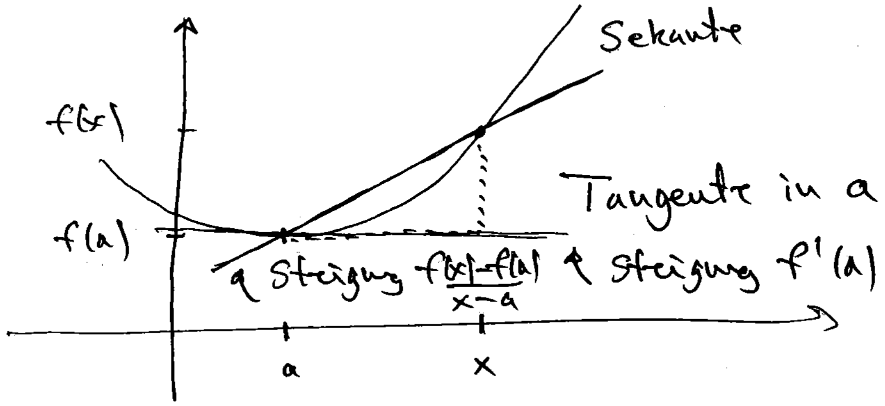
$$f \text{ diff-bar in } a \iff \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{=: g(h),\ \mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f) - a := \{x-a \,:\, x \in \mathrm{dom}(f)\}} \text{ existiert}$$

d.h. hier sind bel. Nullfolgen $(h_n)_n$ zu betrachten mit $h_n \neq 0$, $h_n \in \mathrm{dom}(g)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\frac{df}{dx}$ ist kein Quotient; nur Notation!
(Gelegentlich schreiben wir auch $f'(x) =: \frac{df(x)}{dx}$)

(iii) geometrische Interpretation für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$f'(a)$ ist Steigung der Tangente an Graphen von f im Pkt. a



5.3. Beispiele

(i) konstante Fkt. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x) =: c$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x \to a} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\frac{c-c}{x-a}} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

(ii) Monom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f'(a) = n a^{n-1} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \text{ da}$$

$$f(a+h)-f(a) = (a+h)^n - a^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k a^{n-k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big) = \binom{n}{1} a^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} a^{n-k}}_{\to 0\ ,\ h \to 0}$$

(iii) e-Fkt.:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{\lambda x} \end{array} \qquad \text{wobei } \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f'(a) = \lambda e^{\lambda a} = \lambda f(a)} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

insbes.:

- $\exp' = \exp$ $\quad (\lambda = 1)$
- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$

$\left.\begin{array}{l} \sin' = \cos \\ \cos' = -\sin \end{array}\right\}$ (aus $\lambda = \pm i$)

da: $$\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big) \underset{\text{Funktionalglg.}}{=} e^{\lambda a} \underbrace{\left(e^{\lambda h}-1\right)/h}_{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n h^{n-1}}{n!}} \qquad \forall h \neq 0$$

$$= \lambda e^{\lambda a} g(h), \qquad g: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{(n+1)!}$$

Potenzreihe mit Kgz. radius ∞ (Quot. krit.!)

Satz 4.23 $\Rightarrow$ g stetig auf $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \lim_{h \to 0} g(h) = g(0) = 1$ ✓

(iv) $$|\cdot| : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$$ diff. bar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber nicht in 0,

mit $$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sgn}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(Ableitung von rechts bzw links in 0 existiert dagegen!)

5.4 Definition

(*Höhere Ableitungen*) Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$, sei $x \in \mathcal{D}$, sei $A \subseteq \mathcal{D}$

(a) Falls $\exists\, \varepsilon > 0$, so dass f diff.bar auf $\mathcal{D} \cap \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ und f' diff. bar in x, setze

$$f''(x) := (f')'(x)$$ *2. Ableitung von f in x*

f *2-mal diff.bar (auf A)* $:\Leftrightarrow f, f'$ diff. bar (auf A)

(b) induktive Def. für $k \in \mathbb{N}$:

falls $\exists\, \varepsilon > 0$, so dass $f^{(0)} := f, f^{(1)} := f', \dots, f^{(k-2)}$ diff. bar auf $\mathcal{D} \cap \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ und $f^{(k-1)}$ diff. in x, setze

$$f^{(k)}(x) := \left(f^{(k-1)}\right)'(x)$$ *k'te Ableitung von f in x*

f *k-mal diff. bar (auf A)* $:\Leftrightarrow \left\{ f^{(0)}, \dots, f^{(k-1)} \right.$ diff. bar (auf A)

mit

k'te Ableitung von f auf A: $f^{(k)} : \begin{array}{l} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f^{(k)}(x) \end{array}$

(c) *f k-mal stetig diff. bar (auf A)* $:\Leftrightarrow f$ k-mal diff. bar (auf A) *und* $f^{(k)}$ *stetig* (auf A)

5.5. Bemerkung

(i) *Notation*: $f^{(k)} =: \dfrac{d^k f}{dx^k} =: \dfrac{d^k}{dx^k} f =: \left(\dfrac{d}{dx}\right)^k f$

analog $f^{(k)}(x) =: \dfrac{d^k f(x)}{dx^k} = \dots$

(ii) mit (i) gilt: $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)} = \frac{d}{dk} f^{(k-1)}$$ (falls Ableitungen existieren natürlich!)

5.6. Beispiel

(i) $\exp^{(k)} = \exp \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(ii) $\sin'' = -\sin, \quad \cos'' = -\cos$

5.7. Satz (Lineare Approximierbarkeit)

Sei $f : D \to \mathbb{K}^1$, $a \in D$ ein Häufungspkt von D.
Dann gilt:

$$f \text{ diff. bar in } a \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, m \in \mathbb{K}^1, \delta > 0 \text{ und } \varphi : D \cap B_\delta(a) \to \mathbb{K}^1 \\ \text{mit } \lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0, \text{ so dass} \\ f(x) = f(a) + m(x-a) + \varphi(x) \\ \qquad \forall x \in D \cap B_\delta(a) \end{cases}$$

In diesem Fall gilt $f'(a) = m$.

5.8 Bemerkung

(i) Später dient lineare Approximierbarkeit als Def. der Diff.barkeit in allg. Situationen

(ii) es gilt $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} \left[\frac{\varphi(x)}{x-a} (x-a) \right] \underset{\text{Satz 3.6(ii)}}{=} 0$

5.9 Korollar

(a) f diff. bar in $a \Rightarrow f$ stetig in a

(b) f k-mal stetig diff.bar für ein $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f^{(j)}$ stetig $\forall j \in \{0, 1, \dots, k\}$

Beweis von Satz 5.7

"$\Rightarrow$" Setze $m := f'(a)$ und $\forall x \in D$ (entspricht δ bel. groß)

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - m(x-a)$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\substack{x\to a \\ \xrightarrow[\text{n.V.}]{} m}} - m \quad \forall x \in D\setminus\{a\}$$

✓

"$\Leftarrow$" $\forall x \in D \cap B_\delta(a)\setminus\{a\}$ gilt:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m + \frac{\varphi(x)}{x-a}$$

$\Rightarrow$ f diff.bar in a mit $f'(a) = m$

nach Vor. an φ ☒

5.2. Ableitungsregeln

$\boxed{\text{5.10. Satz}}$ Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x \in D$, $f, g : D \to \mathbb{K}$ diff-bar in x

(a) Linearität der Ableitung

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ist $\lambda f + \mu g$ diff. bar in x und

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$$

(b) Produktregel

$f \cdot g$ ist diff. bar in x und

$$(fg)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

(c) Quotientenregel

Sei $g(x) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ diff. bar in x und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Beweis: (a) aus Regeln für Limiten

(b) Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $x + h \in D$

$$\Rightarrow (fg)(x+h) = f(x+h)g(x+h) = f(x+h)g(x) + f(x+h)\left[g(x+h) - g(x)\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = f'(x)g(x) + \underbrace{\lim_{h \to 0}\left[f(x+h)\,\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}_{\text{Kor 5.9 \& Satz 3.6 (ii)} \longrightarrow \; = f(x)g'(x) \text{ existiert}}$$

(c) da $g(x) \neq 0$ & g diff-bar in x

$$\overset{\text{Kor 5.9, Satz 3.18 (i)}}{\Longrightarrow} \quad \exists \delta > 0 \;\; \forall y \in D \cap B_\delta(x) : \quad g(y) \neq 0$$

1. Abt: $f = 1$

Sei $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$ mit $x+h \in D$ (also $g(x+h) \neq 0$!)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right)\frac{1}{h} = \underbrace{\frac{1}{g(x+h)}}_{\xrightarrow{h\to 0}\ \frac{1}{g(x)}} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(x+h)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0}\ -g'(x)\ \text{u. V.}}$$

Kor 5.9. $\rightarrow$
Satz 3.14 (iii)

$\Rightarrow \frac{1}{g}$ diff-bar in x und $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$

2. Abt: $f \neq 1$

aus 1. Abt & Produktregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \blacksquare$$

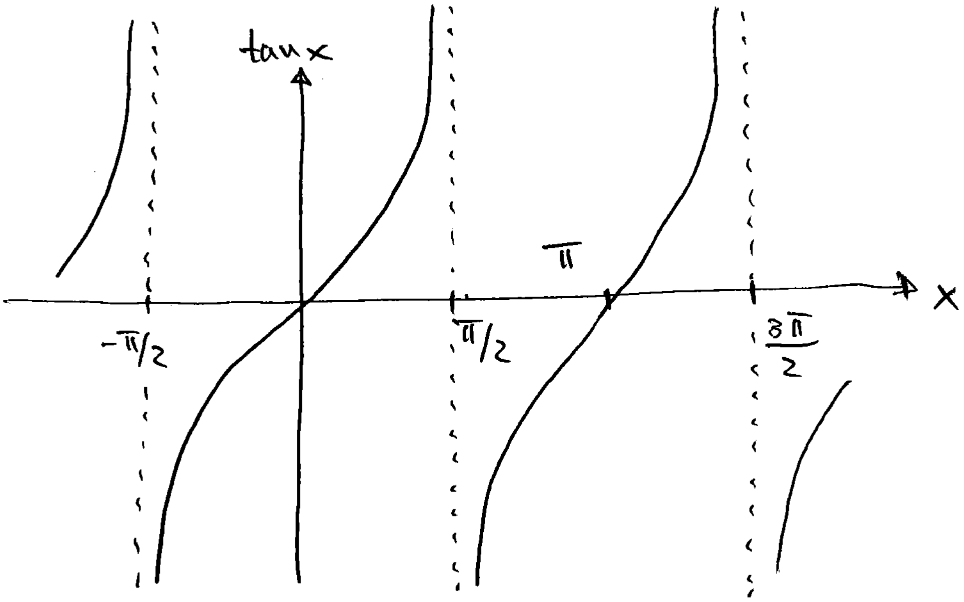
5.11 Beispiel (i) Für $D := \mathbb{C} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ setze

$$\tan : \begin{array}{l} D \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \tan z := \dfrac{\sin z}{\cos z} \end{array}$$ (komplexer) Tangens

Quot.regel $\Rightarrow$ $\tan : \begin{array}{l} D \cap \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x \end{array}$ ist diff.bar mit

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

reeller Tangens



(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ und $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{-n} \end{array}$ gilt

f diff. bar mit

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}$$

$$\overset{\text{Bsp. 5.3(ii)}}{\Longrightarrow} \quad \forall n \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}} : \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

$\boxed{\text{5.12 Satz}}$ (Kettenregel)

Seien $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$, $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \underset{\mathbb{C}}{\cancel{\mathbb{R}}}$ Funktionen mit $f(D_f) \subseteq D_g$.

Sei f diff. bar in $x \in D_f$ und g diff. bar in $f(x) \in D_g$.

Dann ist $g \circ f$ diff. bar in x mit

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

Beweis: Nach Satz 5.7:

- f diff. bar. in $x \Rightarrow \exists \delta > 0 \; \exists \varphi : \underbrace{B_\delta(0) \cap (D_f - \{x\})}_{=: D_\varphi} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{f'(x)h + \varphi(h)}_{=: \mathcal{H}(h)} \quad \forall h \in D_\varphi \text{ und } \frac{\varphi(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

- g diff. bar in $y := f(x) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \; \exists \chi : \underbrace{B_\varepsilon(0) \cap (D_g - \{y\})}_{=: D_\chi} \to \mathbb{C}$

mit

$$g(y+k) = g(y) + g'(y)k + \chi(k) \quad \forall k \in D_\chi \text{ und } \frac{\chi(k)}{k} \xrightarrow{k \to 0} 0.$$

Da $\varkappa(h) \xrightarrow{h\to 0} 0 \underset{\text{Bem. 5.8(ii)}}{\Rightarrow} \exists\, 0 < \tilde{\delta} \leq \delta : \varkappa(h) \in D_\chi \;\forall h \in \underbrace{D_\psi \cap B_{\tilde{\delta}}(0)}_{=: \tilde{D}_\psi}$

$\Rightarrow \forall h \in \tilde{D}_\psi :$

$$g(\underbrace{f(x+h)}_{f(x)+\varkappa(h)}) = g(f(x)) + g'(f(x))\varkappa(h) + \chi(\varkappa(h))$$

$\Rightarrow \forall\, 0 \neq h \in \tilde{D}_\psi :$

$$\frac{1}{h}\left[(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x)\right] = g'(f(x))f'(x) + g'(f(x))\underbrace{\frac{\psi(h)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} + \underbrace{\frac{\chi(\varkappa(h))}{h}}_{=: \Phi(h)}$$

z.z.: $\Phi(h) \xrightarrow{h\to 0} 0.$

1. Fall: $\varkappa(h) = 0 \Rightarrow \chi(\varkappa(h)) = 0 \Rightarrow \Phi(h) = 0$

2. Fall: $\varkappa(h) \neq 0 \Rightarrow \Phi(h) = \underbrace{\frac{\varkappa(h)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{\chi(\varkappa(h))}{\varkappa(h)}}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} \longrightarrow 0,\; h \to 0$

$\frac{\varkappa(h)}{h} = f'(x) + \frac{\psi(h)}{h}$

, da $\varkappa(h) \to 0, h \to 0$ und $\frac{\chi(k)}{k} \xrightarrow{k\to 0} 0$ ■

5.13. Beispiel:

Ableitung von $x \mapsto x^z$ $(D = \mathbb{R}_>)$, $z \in \mathbb{C}$

$$x^z \underset{\text{Def. 4.49}}{=} e^{z \ln x} = g(\ln x) \quad \text{mit} \quad g := e^{z\cdot}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} x^z} = \underbrace{g'(\ln x)}_{\overset{\text{Bsp.5.3(iii)}}{\to}\, z g(\ln x)} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\ln x}_{1/x \text{ (Übung!)}}$$

$$= z x^z \cdot \frac{1}{x} \underset{\text{Fktlglg. der e-Fkt.}}{=} \boxed{z x^{z-1}}$$

5.14 Satz Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (uneigentliches) Intervall, nicht ausgeartet (d.h. mit > 1 Elementen).

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton, diff.bar in $x \in I$ mit $f'(x) \neq 0$.

Dann ist f^{-1} diff. bar in $f(x)$ und

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\left(\Leftrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \text{für} \quad y = f(x) \right)$$

Beweis: Übung!

5.3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

In diesem Unterkapitel:
- Fkt.'en $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- stets $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

5.15 Definition

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, sei $\xi \in D$.

$$\left.\begin{array}{l}f \text{ hat lokales Maximum} \\ (\text{bzw. Minimum}) \text{ in } \xi\end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in B_\varepsilon(\xi) \cap D: \\ f(\xi) \geq f(x) \quad (\text{bzw. } f(\xi) \leq f(x))\end{array}\right.$$

- ξ heißt Maximalstelle (bzw. Minimalstelle)
- falls $\forall x \in (B_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}) \cap D$ sogar $f(\xi) > f(x)$: striktes lok. Max (analog für Min)
- Extremum: Maximum oder Minimum

Eine notwendige Bed. für Extrema:

5.16 Satz Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$. Sei $\xi \in]a,b[$ lokales Extremum von f und f diff.bar in ξ

Dann gilt: $$f'(\xi) = 0$$

Beweis: o.E., sei ξ Maximalstelle (für Min analog!)

Sei $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(\xi) \subset]a,b[$, sei $x \in B_\varepsilon(\xi)$

$$\overset{f \text{ diff.bar}}{\underset{\text{in } \xi}{\Longrightarrow}} \quad f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \nearrow \xi} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\geq 0} = \lim_{x \searrow \xi} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \quad f'(\xi) = 0$$

■

5.17 Warnung

(i) Bed. $f'(\xi)=0$ nicht hinreichend für lok. Extremum

Bsp.: $f: \begin{array}{l}]-1,1[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^3 \end{array}$ und $\xi=0$

(ii) Randpkt.'e a, b ausgeschlossen in Satz 5.16

Bsp: $f: \begin{array}{l} [0,1]\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x \end{array}$ und $\xi=0$ oder $\xi=1$

5.18. Satz (Rolle)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit $f(a)=f(b)$ und f diff.bar auf $]a,b[$. Dann $\exists\, \xi\in\,]a,b[\, : f'(\xi)=0$.

Beweis: 1. Fall: $f=$ konst. trivial

2. Fall: $f\neq$ konst

$\Rightarrow \exists\, x_0\in\,]a,b[$ mit $f(x_0)\neq f(a)$. o.E. sei $f(x_0)>f(a)$

("<" analog!)

Satz 3.26 $\Rightarrow f$ nimmt Maximum an,

d.h. $\exists\, \xi\in[a,b]$ mit $f(\xi)\geq f(x)\ \forall x\in[a,b]$

wegen $f(x_0)>f(a) \Rightarrow \xi\in\,]a,b[\, \Rightarrow$ Beh. mit Satz 5.16

5.19 Korollar (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und diff.bar in $]a,b[$. Sei $g'(x)\neq 0\ \forall x\in\,]a,b[$ ($\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} g(a)\neq g(b)$!). Dann gilt

$$\exists\, \xi\in\,]a,b[\, : \ f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(\xi).$$

Insbesondere für $g=\mathrm{id}$:

$$\exists\, \tau\in\,]a,b[\, : \ f'(\tau)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Beweis: Mittels Rolle für

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,(g(x)-g(a))$$

dann φ stetig auf $[a,b]$, diff.-bar auf $]a,b[$ &

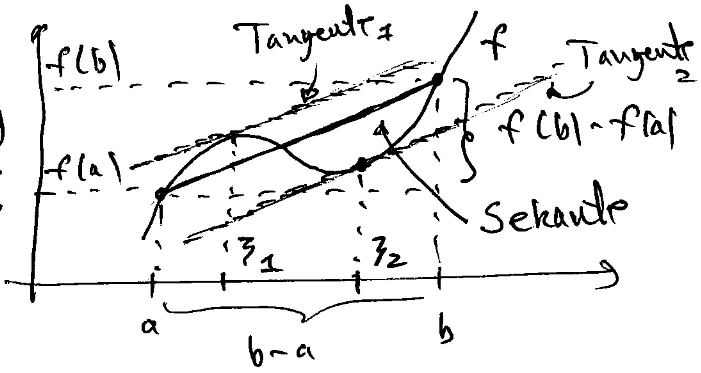
$$\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)$$

$$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi = \xi(g) \in\,]a,b[\,:\, 0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(\xi) \quad \blacksquare$$

Geom. Interpretation für $g = id$

Steigung Sekante durch $(a, f(a))$ & $(b, f(b))$

= Steigung Tangente bei ξ



Zusammenhang Monotonie & Ableitung in

$\boxed{\text{5.20 Satz}}$ Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ diff.-bar

(a) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in\,]a,b[\;\Rightarrow\; f$ isoton

$\quad >$ $\quad\Rightarrow f$ strikt isoton

$\quad \leq$ $\quad\Rightarrow f$ antiton

$\quad <$ $\quad\Rightarrow f$ strikt antiton

(b) f isoton $\;\Rightarrow\; f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in\,]a,b[$

$\quad f$ antiton $\;\Rightarrow\; \leq$

(hier kein extra Version für „strikt"; Bsp: $f(x) = x^3$)

Beweis: Übung!

5.21 Satz Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ diff-bar und $\xi \in]a,b[$.

Sei
- f 2 mal diff. bar in ξ
- $f'(\xi) = 0$
- $f''(\xi) > 0$ (bzw. < 0)

Dann hat f in ξ ein striktes lokales Minimum (bzw. Max)

5.22. Bemerkung

Im Gegensatz zu Satz 5.16 gibt Satz 5.21 eine hinreichende, aber nicht notwendige Bed. für ein lokales Extremum. Bsp. $f: \begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^4 \end{array}$ und $\xi = 0$

Beweis von Satz 5.21 nur Fall $f''(\xi) > 0$ (<0 analog!)

da $0 < f''(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$

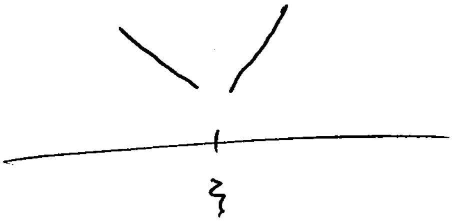
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(\xi) \subseteq]a,b[$ & $\dfrac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} > 0 \quad \forall x \in B_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}$

da $f'(\xi) = 0 \Rightarrow$
- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]\xi, \xi + \varepsilon[$
- $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]\xi - \varepsilon, \xi[$

$\overset{\text{Satz 5.20}}{\Rightarrow}$ f strikt antiton in $]\xi - \varepsilon, \xi[$

f " isoton in $]\xi, \xi + \varepsilon[$

$\Rightarrow$ striktes lok. Min in ξ ▨



$\boxed{\text{5.23 Satz}}$ (Regeln von de l'Hopital)

Seien $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ diff.bar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Sei **entweder** $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \searrow a} g(x)$

oder $\lim\limits_{x \searrow a} g(x) = \pm \infty$

Weiter **existiere** $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L$

Dann existiert $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Zusatz: analog für $x \nearrow b$ und $x \to \pm\infty$

Beweis: • Fall „entweder": Sei $x_0 \in]a,b[$ und

$$\hat{f} : \begin{array}{l} [a,x_0] \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x), & x \in]a,x_0] \\ 0, & x = a \end{cases} \end{array} \quad (\text{stetig!})$$

analog def. $\hat{g}$!

Mittelwertsatz mit $\hat{f}, \hat{g}$ auf $[a,x_0] \Rightarrow \exists \xi = \xi_{x_0} \in]a,x_0[$:

$$\frac{\hat{f}'(\xi)}{\hat{g}'(\xi)} = \frac{\hat{f}(x_0) - \hat{f}(a)}{\hat{g}(x_0) - \hat{g}(a)}, \quad \text{d.h.} \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$\Rightarrow$ Beh. mit $x_0 \searrow a$ $(\Rightarrow \xi_{x_0} \searrow a)$

• Fall „oder": Sei $\varepsilon > 0$, n.V. $\exists \delta > 0 \ \forall x \in]a, a+\delta[$ $(\delta < |b-a|)$

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon \quad (*)$$

Sei $a < x_0 < y_0 < a+\delta$, so dass $g(x) \neq 0 \ \forall x \in]a, y_0]$ (möglich n.V.!)

Mittelwertsatz auf $[x_0, y_0]$

$$\Longrightarrow \exists \xi \in]x_0, y_0[: \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(y_0) - f(x_0)}{g(y_0) - g(x_0)}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \left| \frac{f(y_0)-f(x_0)}{g(y_0)-g(x_0)} - L \right| < \varepsilon$$

$$\overset{(**)}{\Longrightarrow} \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L - \frac{f(y_0)-Lg(y_0)}{g(x_0)} \right| < \varepsilon$$

(**) $\frac{g(x_0)-g(y_0)}{g(x_0)} = 1 - \frac{g(y_0)}{g(x_0)}$

(!) > 0 $\forall x_0$ nahe bei a

$$|\zeta-\eta| \geq |\zeta|-|\eta| \Rightarrow \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L \right| < \varepsilon + \left| \frac{f(y_0)-Lg(y_0)}{g(x_0)} \right|$$

$$\Rightarrow \limsup_{x_0 \downarrow a} \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L \right| \leq \varepsilon \quad \underline{\forall \varepsilon > 0}$$ (!) weil $\lim_{x \downarrow a} g(x) = \pm\infty$.

$$\Rightarrow \limsup_{x_0 \downarrow a} \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L \right| = 0 \overset{|\cdot| \geq 0}{\Longrightarrow} \lim_{x_0 \downarrow a} \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L \right| = 0 \quad \checkmark$$

__Zusatz:__ $x \nearrow b$ klar; $x \to \pm\infty$ mittels $f(x) =: \tilde{f}(\frac{1}{x})$, $g(x) =: \tilde{g}(\frac{1}{x})$ aus Fall $x \overset{\nearrow 0}{\searrow 0}$ für $\tilde{f}, \tilde{g}$. ∎

__5.24 Beispiel__ Sei $D =]0,\infty[$, $\alpha > 0$. Dann gilt:

(a) $\lim_{x \downarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$ „ln wächst langsamer als jede Potenz"

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

__Beweis__ (a): $\ln x \xrightarrow{x \downarrow 0} -\infty$, $x^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln x} \xrightarrow{x \downarrow 0} \infty$

$$\overset{\text{Satz 5.23}}{\Longrightarrow} \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-\alpha})'} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1/x}{\alpha x^{-\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \downarrow 0} x^\alpha = 0$$

(b) aus (a) mittels $y = \frac{1}{x}$ und $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$.

∎

6. Integrieren von Funktionen auf $\mathbb{R}$

Im ganzen Kapitel: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; $I := [a, b]$

$f : I \to \mathbb{R}$

6.1. Riemann-integrierbare Funktionen

6.1. Definition

(a) $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion

$:\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N} \text{ und Unterteilung } a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \\ \text{von } I, \text{ und } \exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}, \text{ so dass } \forall j = 1, \ldots, n : \varphi|_{]x_{j-1}, x_j[} = c_j \end{cases}$

(Die Werte $\varphi(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$ sind nicht vorgeg.).

(b) $\mathcal{T}(I) := \{ \varphi : I \to \mathbb{R} : \varphi \text{ Treppenfkt} \}$

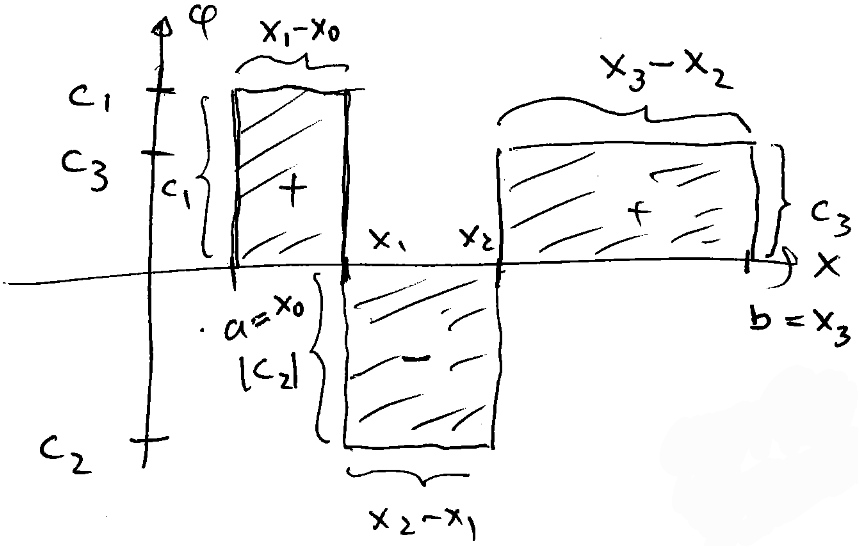
Menge der Treppenfkt.'en auf I

(c) Für Treppenfkt $\varphi \in \mathcal{T}(I)$ ist

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx := \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1})$$

(Riemann) Integral von φ

auch: $\int_a^b dx\, \varphi(x)$; $\int_a^b \varphi\, dx$; $\int_I \varphi(x)\, dx$; $\int_I dx\, \varphi(x)$ etc



6.2. Bemerkung

$\int_a^b \varphi(x)\,dx$ ist wohldef., d.h. unabhängig von der gewählten Unterteilung von φ, denn:

für $x_{j-1} = y_k < y_{k+1} < y_{k+\ell-1} < y_{k+\ell} = x_j$ gilt

$$c_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{\kappa=1}^{\ell} c_j(y_{k+\kappa} - y_{k+\kappa-1})$$

6.3 Lemma

(a) $\mathcal{T}(I)$ ist Vektorraum (über $\mathbb{R}$) und $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{T}(I)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x)\,dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx + \mu \int_a^b \psi(x)\,dx$$

Linearität

(b) $\forall \varphi \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi \geq 0$, d.h. $\varphi(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, gilt: $\int_a^b \varphi(x)\,dx \geq 0$

Monotonie

Beweis (b) klar, da $c_j \geq 0$ in Darstellung von φ

(a) • Vektorraum:

- $0 \in \mathcal{T}(I)$ klar
- Sei $\varphi \in \mathcal{T}(I)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\varphi \in \mathcal{T}(I)$, denn $c_j \to \lambda c_j$
- Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}(I)$ mit

$$\varphi|_{]x_{j-1}, x_j[} = c_j, \quad j = 1, .., n$$

$$\psi|_{]y_{k-1}, y_k[} = d_k, \quad k = 1, .., m$$

Definiere eindeutige Unterteilung

$a=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_{\nu-1}<\xi_\nu=b$, so dass

$\{\xi_\alpha : \alpha=1,\ldots,\nu-1\}=\{x_j : j=1,\ldots,n-1\}\cup\{y_k : k=1,\ldots,m-1\}$

d.h. gröbste Unterteilung, die Unterteilungen von φ und ψ enthält ($\Leftrightarrow$: gröbste Verfeinerung)

$$\Rightarrow \varphi\big|_{]\xi_{\alpha-1},\xi_\alpha[}=c_{j(\alpha)}\,,\quad \psi\big|_{]\xi_{\alpha-1},\xi_\alpha[}=d_{k(\alpha)}$$

$$\Rightarrow (\varphi+\psi)\big|_{]\xi_{\alpha-1},\xi_\alpha[}=c_{j(\alpha)}+d_{k(\alpha)}=:e_\alpha\,,\quad \alpha=1,\ldots,\nu.$$

also $\varphi+\psi\in\mathcal{T}(I)$

Linearität: $\int_a^b(\lambda\varphi+\mu\psi)(x)=\sum_{\alpha=1}^{\nu}(\lambda c_{j(\alpha)}+\mu d_{k(\alpha)})(\xi_\alpha-\xi_{\alpha-1})$

$$=\lambda\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{\nu}c_{j(\alpha)}(\xi_\alpha-\xi_{\alpha-1})}_{\overset{\text{wegen 6.2}}{\sum_{j=1}^{n}c_j(x_j-x_{j-1})}}+\mu\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{\nu}d_{k(\alpha)}(\xi_\alpha-\xi_{\alpha-1})}_{\overset{\text{wegen 6.2}}{\sum_{k=1}^{m}d_k(y_k-y_{k-1})}}$$

$$=\lambda\int_a^b\varphi(x)dx+\mu\int_a^b\psi(x)dx \qquad \boxtimes$$

$\boxed{\text{6.4 Definition}}$ Sei $f: I\to\mathbb{R}$ beschränkt ($\exists C>0: |f(x)|\le C\ \forall x\in I$)

(a) Oberintegral $\mathcal{O}_I(f):=\inf\left\{\int_I\varphi(x)dx : \varphi\in\mathcal{T}(I),\ \varphi\ge f\right\}$

Unterintegral $\mathcal{U}_I(f):=\sup\left\{\int_I\psi(x)dx : \psi\in\mathcal{T}(I),\ \psi\le f\right\}$

(b) f Riemann-integrierbar (über I) $:\Leftrightarrow$

$$\mathcal{O}_I(f)=\mathcal{U}_I(f)=:\int_I f(x)dx$$

Riemann-Integral von f über I

auch: $\int_a^b f(x)dx,\ \int_I dx\,f(x),\ \int_a^b dx\,f(x)$

(c) Sei $f: I \to \underline{\underline{\mathbb{C}}}$ beschränkt

- f Riemann-integrierbar $:\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}\, f \wedge \mathrm{Im}\, f$ Riemann-integrierbar
- $\int_I f(x)\,dx := \int_I (\mathrm{Re}\, f)(x)\,dx + i \int_I (\mathrm{Im}\, f)(x)\,dx$

6.5 Bemerkung

(i) Falls $m_- \le f \le m_+$ $(m_\pm \in \mathbb{R})$, so ist mit $|I| := b-a$

$$m_- |I| \le \mathcal{U}_I(f) \le \mathcal{O}_I(f) \le m_+ |I|$$

$\varphi = m_-$ zugelassen

$\psi = m_+$ zugelassen

Lemma 6.3(b): $\varphi \le \psi \Rightarrow \int_I \varphi\,dx \le \int_I \psi\,dx$

(ii) $\forall \varphi \in \mathcal{J}(I)$: φ ist Riemann-integrierbar mit

$$\int_I \varphi(x)\,dx = \mathcal{O}_I(\varphi) = \mathcal{U}_I(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1})$$

$\varphi|_{]x_{j-1}, x_j[} = c_j$

(iii) $f = 1_{\mathbb{Q}} := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ <u>nicht</u> (Riemann) integrierbar über $[0,1] =: I$

$\mathcal{O}_I(1_{\mathbb{Q}}) = 1$
inf durch $1_{[0,1]}$ realisiert,
da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$

$\mathcal{U}_I(1_{\mathbb{Q}}) = 0$
sup durch 0 realisiert,
da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$

(iv) <u>Name</u> der Integrationsvariablen irrelevant

(so wie Summationsindex!)

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f(t)\,dt = \int_I f(y)\,dy = \ldots$$

6.6 Definition Sei $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt

Sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Unterteilung von I und $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ „Stützstelle"

- $\mathcal{Z} := \left((x_j)_{j \in \{0, \ldots, n\}}, (\xi_j)_{j \in \{1, \ldots, n\}} \right)$ Zerlegung (= Unterteilung mit Stützstellen)
- $\mu(\mathcal{Z}) := \max\limits_{j=1,\ldots,n} (x_j - x_{j-1})$ Feinheit der Zerlegung
- Riemann-Approximante von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$: Treppenfkt $\varphi_{\mathcal{Z}} \in \mathcal{J}(I)$ mit

$$\varphi_{\mathcal{Z}}|_{]x_{j-1}, x_j[} = f(\xi_j) \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

- Riemann-Summe von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$:

$$R(\mathcal{Z}, f) := \int_I \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

Nächster Satz dient Charakterisierung Riemann-integrierbarer Funktionen:

6.7 Satz Sei $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent: (i) f ist Riemann integrierbar

(ii) $\exists J \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall$ Zerlegungen $\mathcal{Z}$ mit $\mu(\mathcal{Z}) < \delta$:

$$|J - R(\mathcal{Z}, f)| < \varepsilon$$

symbolische (!) Schreibweise: $\lim\limits_{\mu(\mathcal{Z}) \to 0} R(\mathcal{Z}, f) = J$

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \varphi_{\pm} \in \mathcal{J}(I)$ mit $\varphi_- \leq f \leq \varphi_+$

und $$\int_I \varphi_+(x)dx - \int_I \varphi_-(x)dx < \varepsilon$$

Trifft eine der Aussagen (i)-(iii) zu, so ist
$$J = \int_I f(x)\,dx.$$

<u>Beweis</u>: <u>(iii) ⇒ (i)</u>: Da $\forall \varphi_{\pm} \in \mathcal{J}(I)$ mit $\varphi_- \leq f \leq \varphi_+$:
$$\int_I \varphi_-(x)dx \leq \mathcal{U}_I(f) \leq \mathcal{O}_I(f) \leq \int_I \varphi_+(x)dx \Rightarrow \text{Beh.}$$

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>: Sei $\varepsilon > 0$ und $a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b$ mit
$$\max_{j=1,..,n}(x_j - x_{j-1}) < \delta$$

$$\overset{\text{n.V.}}{\Rightarrow} \forall j = 1,..,n \;\; \forall \xi_j \in \,]x_{j-1}, x_j[\, : \;\; \left| J - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon \;\; (*)$$

Sei $$f_j^{\pm} := \substack{\sup \\ \inf} \{ f(x) : x \in \,]x_{j-1}, x_j[\, \} \quad (f \text{ beschränkt!})$$

$$\Rightarrow \exists \, (\eta^{\pm}_{j,\nu})_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \,]x_{j-1}, x_j[\, \text{ mit } \lim_{\nu \to \infty} f(\eta^{\pm}_{j,\nu}) = f_j^{\pm}$$

Wähle $\xi_k = \eta^{\pm}_{k,\nu}$ in $(*)$ $\overset{\nu \to \infty}{\Rightarrow} \left| J - \sum_{k=1}^{n} f_k^{\pm} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \varepsilon \;\; (**)$

somit gilt für $\varphi_{\pm} \in \mathcal{J}(I)$,

$$\varphi_{\pm}\big|_{]x_{k-1}, x_k[} := f_k^{\pm}, \quad \varphi_{\pm}(x_k) := f(x_k),$$

dass $\varphi_- \leq f \leq \varphi_+$ und

$$\int_I \varphi_+(x)dx - \int_I \varphi_-(x)dx \overset{\text{aus } (**)}{\leq} 2\varepsilon \qquad \checkmark$$

(i) ⇒ (ii): Sei $\varepsilon > 0$ und $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine gemeinsame Unterteilung von φ_+ und φ_-, wobei $\varphi_- \leq f \leq \varphi_+$ und

$$\left| \int_I \varphi_\pm(x)dx - \int_I f(x)dx \right| < \varepsilon \quad (0)$$

Sei $\delta > 0$, so dass

$$2\delta n \left(\sup_{x\in I} |\varphi_+(x)| + \sup_{x \in I} |\varphi_-(x)| \right) < \varepsilon \quad (1)$$

Sei $Z = \left((y_k)_{k=0,..,m}, (\xi_k)_{k=1,..,m} \right)$ bel. Zerlegung mit $\mu(Z) < \delta$

Sei $a = z_0 < z_1 < \ldots < z_\nu = b$ gröbste gemeinsame Unterteilung von $(x_j)_j$ und $(y_k)_k$ (gröbste Verfeinerung)

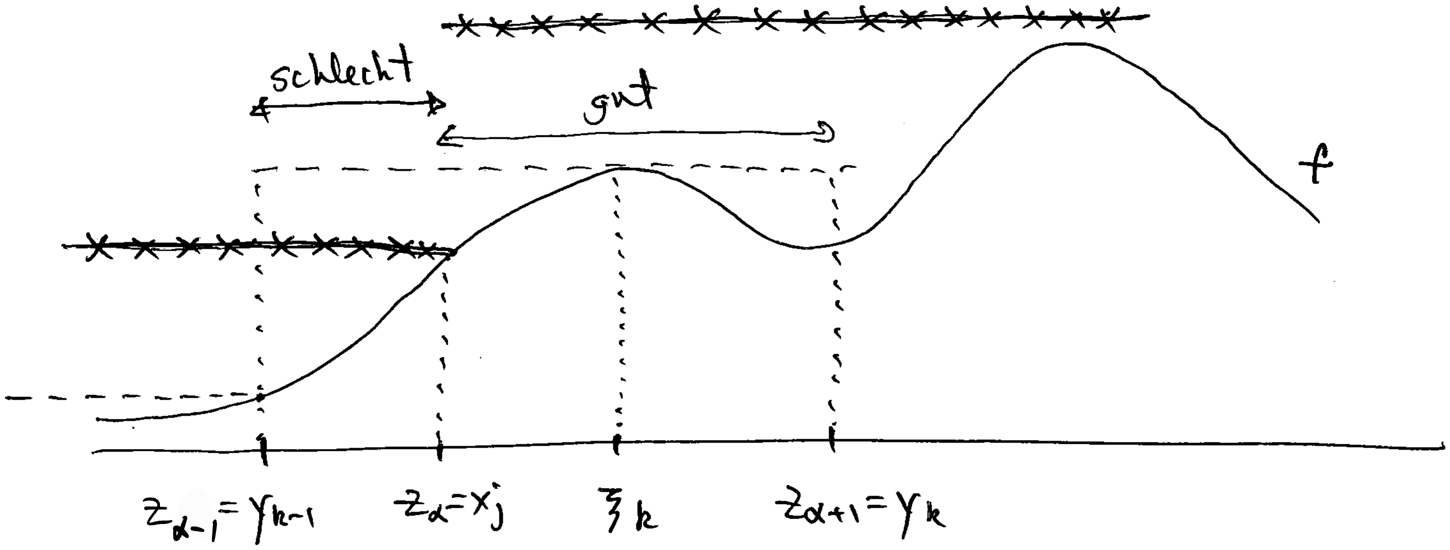
Also $\nu \leq m + (n-1)$ [man denke sich die x_j's in die bestehende Unterteilung $(y_k)_k$ „reingeworfen"]

Def. $\alpha \in \{1,..,\nu\}$ schlecht $:\Leftrightarrow \forall k = 1,..,m : \xi_k \notin]z_{\alpha-1}, z_\alpha[$

ansonsten: α gut

$\Rightarrow$ (2) $\exists$ höchstens $2(n-1)$ schlechte α's (ungünstigster Fall: $x_j = \xi_{k(j)} \; \forall j = 1,..,n-1$)

(3) α gut $\Rightarrow \varphi_- \leq \varphi_Z \leq \varphi_+$ auf $]z_{\alpha-1}, z_\alpha[$



-------- Werte von φ_Z ($= f(\xi_k)$ auf $]y_{k-1}, y_k[$)

×××××××× Werte von φ_+ ($\geq f$ auf $]x_{k-1}, x_k[$)

Für $\# \in \{+, -, \mathcal{Z}\}, \alpha \in \{1, .., \nu\}$, sei $c_{\#,\alpha} := \varphi_\#(w_\alpha)$

wobei $w_\alpha \in]z_\alpha, z_{\alpha-1}[$ (Intervall, auf dem $\varphi_\#$ konstant)

$$\int_{I,g} \varphi_\#(x)dx := \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha \text{ gut}}}^{\nu} c_{\#,\alpha}(z_\alpha - z_{\alpha-1})$$

$$\Rightarrow \quad \left| \int_I \varphi_\#(x)dx - \int_{I,g} \varphi_\#(x)dx \right| \leq \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha \text{ schlecht}}}^{\nu} \underbrace{|c_{\#,\alpha}|}_{\leq \sup_{x\in I}|\varphi_+(x)| + \sup_{x \in I}|\varphi_-(x)|} \cdot \underbrace{(z_\alpha - z_{\alpha-1})}_{\leq \mu(\mathcal{Z}) < \delta} \overset{(2),(1)}{<} \varepsilon$$

(4):

$$(5): \int_{I,g} \varphi_-(x)dx \overset{(3)}{\leq} \int_{I,g} \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx \overset{(3)}{\leq} \int_{I,g} \varphi_+(x)dx$$

$$\text{aus}(4) \wedge (0) \Rightarrow \left| \int_{I,g} \varphi_+(x)dx - \int_{I,g} \varphi_-(x)dx \right| \leq \left| \int_{I,g} \varphi_+(x)dx - \int_I \varphi_+(x)dx \right|$$

$$+ \left| \int_I \varphi_+(x)dx - \int_I \varphi_-(x)dx \right| + \left| \int_I \varphi_-(x)dx - \int_{I,g} \varphi_-(x)dx \right|$$

$$\overset{(0),(4)}{<} \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} \quad 0 \leq \int_{I,g} \varphi_+(x)dx - \int_{I,g} \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx \leq 4\varepsilon$$

(6):

$$\text{Somit } \left| \int_I f(x)dx - \underbrace{R(\mathcal{Z}, f)}_{\int_I \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx} \right| \leq \left| \int_I f(x)dx - \int_I \varphi_+(x)dx \right| + \left| \int_I \varphi_+(x) - \int_{I,g} \varphi_+ dx \right|$$

$$+ \left| \int_{I,g} \varphi_+ dx - \int_{I,g} \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx \right| + \left| \int_{I,g} \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx - \int_I \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx \right|$$

$$\overset{(0),(4),(6),(4)}{<} \varepsilon + \varepsilon + 4\varepsilon + \varepsilon = 7\varepsilon$$

▨

6.8 Definition Sei $N \subseteq \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} N \text{ (Lebesgue-)} \\ \text{Nullmenge} \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ offene Intervalle } J_n \subseteq \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}: \\ \underbrace{N \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n}_{\text{„offene Überdeckung von } N\text{"}} \quad \text{und} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n| < \varepsilon \end{array}\right.$$

6.9 Satz (a) $\forall k \in \mathbb{N}$ sei $N_k \subseteq \mathbb{R}$ Nullmenge

$\Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ ist Nullmenge

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar. Dann ist M Nullmenge

Beweis (a) Sei $\varepsilon > 0$. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists$ n.V. offene Überdeckung $N_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n^k$ mit Intervallen, so dass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n^k| < 2^{-k}\varepsilon$$

$\Rightarrow \left(\bigcup_k N_k\right) \subseteq \underbrace{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{abzählbar}} J_n^k$ mit offene Intervalle und

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n^k| < \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} = \varepsilon \quad ✓$$

(b) . $\forall x \in \mathbb{R}$: $\{x\}$ ist Nullmenge (1 Intervall reicht!)

$\Rightarrow$ Beh. mit (a) ■

Ein Integrabilitätskriterium:

6.10 Satz Sei $f: I \to \mathbb{R}$ und $N_f := \{x \in I : f \text{ nicht stetig in } x\}$

Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ beschränkt} \\ \text{und } N_f \text{ Nullmenge} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow f \text{ Riemann-integrierbar auf } I$$

Beweis: Hier nur „⇒"; für „⇐" siehe z.B. Heuser, Satz 84.2

Sei $\varepsilon > 0$

- Sei $x \in I \setminus N_f \overset{\text{stetig}}{\Rightarrow} \exists \delta_x > 0 \ \forall x' \in B_{\delta_x}(x) \cap I:$
  $$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \qquad (1)$$
- Sei $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ offene Überdeckung aus Intervallen von N_f mit
  $$\sum_{n \in \mathbb{N}} |J_n| < \varepsilon \quad (2)$$

$\Rightarrow I \subseteq \left(\bigcup_{x \in I \setminus N_f} B_{\delta_x}(x) \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \right)$. Da I kompakt (vgl. Bsp. 3.25) $\xRightarrow[\text{(siehe unten)}]{\text{Satz v. Heine-Borel}}$ $\exists$ endliche Teilüberdeckung,

d.h. $\exists \kappa, \nu \in \mathbb{N} \ \exists x_1, \ldots, x_\kappa \in I \setminus N_f, \ n_1, \ldots, n_\nu \in \mathbb{N}$ mit

$$I \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{\kappa} B_{\delta_{x_k}}(x_k) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\nu} J_{n_j} \right)$$

Sei $a = z_0 < z_1 < \ldots < z_{\lambda-1} < z_\lambda = b$ Unterteilung von $I = [a,b]$, so dass $\forall l = 1, \ldots, \lambda$: entweder $\exists k = 1, \ldots, \kappa$:

$$I_l :=]z_{l-1}, z_l[\subseteq B_{\delta_{x_k}}(x_k) \quad (\text{„}l \text{ gut"})$$

oder $\exists j = 1, \ldots, \nu: \quad I_l \subseteq J_{n_j} \quad$ („l schlecht")

Seien $\varphi_\pm \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi_\pm\big|_{I_l} := \underset{x \in I_l}{\begin{smallmatrix}\sup\\ \inf\end{smallmatrix}} f(x)$ konstant $\forall l = 1, \ldots, \lambda$

$$\Rightarrow 0 \le O_I(f) - U_I(f) \overset{\varphi_- \le f \le \varphi_+}{\le} \int_I \varphi_+ dx - \int_I \varphi_- dx = \sum_{l=1}^{\lambda} \left(\varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l} \right) |I_l|$$

$$= \sum_{l \text{ gut}} \underbrace{\left(\varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l} \right)}_{\le 2\varepsilon \ (1)} |I_l| + \sum_{l \text{ schlecht}} \underbrace{\left(\varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l} \right)}_{\le 2 \sup_{x \in I} |f(x)| =: 2S < \infty \ \text{n.V.}} |I_l|$$

$$\le 2\varepsilon |I| + 2S \underbrace{\sum_{j=1}^{\nu} |J_{n_j}|}_{< \varepsilon \ (2)} < 2\varepsilon(|I| + S) \quad \xRightarrow{\varepsilon > 0 \text{ bel.}} \text{Beh.} \qquad ▨$$

Im Beweis von Satz 6.10 wurde ein Spezialfall des Überdeckungssatzes von Heine-Borel (⤳ Ana 2!) verwendet:

|Spezialfall Heine-Borel| Seien $-\infty < a < b < \infty$; J eine (unendliche) Indexmenge und $\forall \alpha \in J$ sei I_α ein offenes Intervall. Es gelte

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} I_\alpha$$

Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ sowie $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in J$, so dass

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_{\alpha_n}$$ (endliche Teilüberdeck.)

Beweis. Per Widerspruch. Ann. $\nexists$ endliche Teilüberdeckung von $[a,b] =: K_0$ $\Rightarrow$ mindestens eines der Intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung; wähle eines davon, K_1, aus.

$\overset{\text{induktiv}}{\Rightarrow}$ $\exists$ Intervallschachtelung $\{K_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit

- $K_k \subseteq K_{k-1}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $|K_k| = |K_{k-1}|/2$
- (*)| K_k wird nicht durch endlich viele I_α's überdeckt

$\overset{\text{Intervallsch. Prinzip 2.69}}{\Rightarrow}$ $\exists!\, x \in \mathbb{R} : x \in K_k \ \forall k \in \mathbb{N}_0$ (hier wurde die Abgeschlossenheit und Beschränktheit von $[a,b]$ benutzt!)

$\overset{\{I_\alpha\}_{\alpha\in J} \text{ Überd.}}{\Rightarrow}$ $\exists \alpha_0 \in J : x \in I_{\alpha_0}$; I_{α_0} offen

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : x \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq I_{\alpha_0}$

$\Rightarrow$ für k groß genug (so dass $|K_n| < \varepsilon$) $\Rightarrow x \in K_k \subseteq]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I_{\alpha_0}$

↯ (zu (*)) ☒

6.11 Korollar Sei $f: I \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

f stetig oder stückweise stetig (d.h. N_f ist endliche Menge und f besitzt links- u. rechtsseitige Limiten in allen Punkten) $\Longrightarrow$ f integrierbar auf I.

6.12. Korollar Sei $f: I \to \mathbb{R}$ monoton

$\Longrightarrow$ f integrierbar auf I

Denn, es gilt:

6.13 Satz Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist N_f höchstens abzählbar.

Beweis. o.E. sei f isoton (sonst betrachte $-f$)

Monotonie $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$ existiert $\lim_{y \nearrow x} f(y) =: f(x^-) \in \mathbb{R}$

und $\lim_{y \searrow x} f(y) =: f(x^+) \in \mathbb{R}$

Für $M, n \in \mathbb{N}$ setze

$$\mathcal{U}_n^M := \{x \in [-M, M] : f(x^+) - f(x^-) > \tfrac{1}{n}\}$$

$$\Rightarrow \quad N_f = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n^M \qquad (*)$$

Da $0 \le \underset{\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{f(M)}} - \underset{\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{f(-M)}} > \frac{1}{n} \cdot \#\{\mathcal{U}_n^M\}$

$\Rightarrow \mathcal{U}_n^M$ endlich $\forall n, M \in \mathbb{N}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ N_f abzählbar $\blacksquare$

6.2. Eigenschaften des Riemann-Integrals

6.14 Satz Seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(a) Dann ist $\lambda f + \mu g$ Riemann-integrierbar und

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(x)\, dx = \lambda \int_I f(x)\, dx + \mu \int_I g(x)\, dx$$

(b) Monotonie: $f \leq g \Rightarrow \int_I f(x) dx \leq \int_I g(x) dx$

(c) Dreiecksungleichung: $|f| : I \to \mathbb{R}_{\geq}$ ist Riemann-integrierbar und $\left| \int_I f(x)\, dx \right| \leq \int_I |f(x)|\, dx$

(d) Additivität: Sei $I = [a, b]$ und $a < c < b$. Dann sind äquivalent

(i) f Riemann integrierbar auf I

(ii) f " " " $[a, c]$ und auf $[c, b]$

Gilt eine der beiden Aussagen, so ist

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \qquad (*)$$

Konvention

$$\int_a^a f(x)\, dx := 0 \;; \qquad \int_a^b f(x)\, dx := -\int_b^a f(x)\, dx$$

falls $b < a$ und f Riemann-integrierbar auf $[b, a]$

Beweis von Satz 6.14

(a) aus Satz 6.7 (i) $\Leftrightarrow$ (ii), da

$$R(\mathcal{Z}, \lambda f + \mu g) = \lambda R(\mathcal{Z}, f) + \mu R(\mathcal{Z}, g)$$

[gültig für reellwertige Fkt'en $\Rightarrow$ gültig für $\mathbb{C}$]

(b) wegen (a) genügt es zu zeigen:

$$g \geq 0 \Rightarrow \int_I g(x)\,dx \geq 0$$

$\varphi_- := 0$ ist Treppenfkt.

mit $\varphi_- \leq g \Rightarrow 0 = \int_I \varphi_-(x)\,dx \leq \mathcal{U}_I(g) \underset{\nearrow\, g \text{ integrierbar}}{=} \int_I g(x)\,dx$

(c) f integrierbar $\Rightarrow$ Re f $\wedge$ Im f integrierbar

$\Downarrow$ Satz 6.10 $\Downarrow$

beschränkt und stetig bis auf

Nullmenge N_1 ; Nullmenge N_2

$\Rightarrow x \mapsto |f(x)| = \sqrt{(\mathrm{Re} f)(x)^2 + (\mathrm{Im} f)(x)^2}$ beschränkt und stetig bis auf $N_1 \cup N_2$ (wieder Nullmenge!)

$\xRightarrow{\text{Satz 6.10}}$ integrierbar

$$\Rightarrow \left| \int_I f(x)\,dx \right| = \lim_{\mu(\mathcal{Z}) \to 0} \underbrace{|R(\mathcal{Z}, f)|}_{\leq R(\mathcal{Z}, |f|)} \leq \int_I |f(x)|\,dx$$

(d) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) folgt aus Satz. 6.10, und

Glg. (*) aus Satz 6.7. (ii) und einer Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit c als Stützstelle

▨

6.15 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig ($\overset{\text{Kor. 6.11}}{\Longrightarrow}$ Riemann-integrierbar)

sei zudem $g \geq 0$.

Dann $\exists\, \xi \in I$: $\quad \int_I f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_I g(x)\,dx$

(hängt von f, g und I ab!)

Speziell für $g = 1$ gilt : $\int_I f(x)\,dx = f(\xi)\,|I|$

Beweis : Sei $\begin{matrix} m \\ M \end{matrix} := \begin{matrix} \inf \\ \sup \end{matrix} \{ f(x) : x \in I \} \overset{g \geq 0}{\Longrightarrow} mg \leq fg \leq Mg$

$$\overset{\text{Satz 6.14(b)}}{\Longrightarrow} \quad m\int_I g(x)\,dx \leq \int_I f(x)g(x)\,dx \leq M\int_I g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \exists\, \mu \in [m, M] : \int_I f(x)g(x)\,dx = \mu \int_I g(x)\,dx$$

$\Downarrow$ Zwischenwertsatz (f stetig)

$\exists\, \xi \in I : \mu = f(\xi)$ ▨

Eine unmittelbar Anwendung :

6.16 Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung

Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig, sei $x_0 \in I$ und

$$F : \begin{array}{l} I \to \mathbb{C} \\ x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(x')\,dx' =: F(x) \end{array}$$

Dann ist F diff.bar und $F' = f$.

Beweis Es genügt Satz für $f: I \to \mathbb{R}$ stetig zu zeigen (daraus folgt Beh. für $\mathbb{C}$)

Sei $x \in I$, $0 \neq h \in \mathbb{R}$, so dass $x+h \in I$

$$\Rightarrow \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 6.14(d)}}}{=} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x')\,dx' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mittelwertsatz 6.15} \\ \exists \xi_h \in [x,x+h] \\ \text{(falls } h>0)}}{=} f(\xi_h) \xrightarrow[\xi_h \to x]{h \to 0} \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ stetig!}}}{f(x)}$$

▨

6.17. Definition Sei $f: I \to \mathbb{C}$ stetig

$\left.\begin{array}{l} F: I \to \mathbb{C} \text{ diff.bar ist} \\ \text{Stammfkt. zu } f \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow F' = f$

Schreibweise: $F = \int f = \int f(x)dx$; $F(x) = \int^x f = \int^x f(t)dt$

6.18. Satz Sei $f: I \to \mathbb{C}$ stetig und F Stammfkt. zu f.

Dann gilt:

$\left.\begin{array}{l} G: I \to \mathbb{C} \text{ diff.bar ist} \\ \text{Stammfkt. zu } f \end{array}\right\} \Longleftrightarrow F - G = \text{konst.}$

Beweis: „$\Leftarrow$“ $\underbrace{F'}_{f} - G' = 0$

„$\Rightarrow$“ Sei G auch Stammfkt. zu f

$\Rightarrow (G-F)' = G' - F' = f - f = 0$

$\overset{G-F \text{ diff.bar auf } I}{\underset{\text{(Übung!)}}{\Longrightarrow^{*}}} \quad G - F = \text{konst.}$

▨

6.19 Korollar

Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $\forall x_0 \in I$ $I \ni x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ eine Stammfkt. zu f und $\forall$ Stammfkt'en F von f gilt $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(x_0) =: F(t)\Big|_{x_0}^{x}$

6.20 Beispiele

(a) Sei $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $I = [a, b]$ abgeschl. Intervall mit $0 \notin I$. $\Rightarrow \int_a^b x^r\,dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} \Big|_a^b$

NB: Für $r \geq 0$ braucht mann die Vor. „$0 \notin I$" nicht!

(b) Sei I wie oben (insbes. entweder $a > 0$ oder $b < 0$)

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} \ln x \big|_a^b, & a > 0 \\ \ln(-x) \big|_a^b, & b < 0 \end{array} \right\} = \ln|x| \Big|_a^b$$

$$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1)$$

(c) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

Falls Stammfkt. nicht offentsichtlich, können die folgenden Integrationsformeln (part. Integr. & Substitution) u. U. nützlich sein.

$\boxed{\text{6.21 Satz}}$ (Partielle Integration) („PI")

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff-bar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Beweis: Produktregel (diff.) für $\Phi := fg$

$\Rightarrow \Phi' = f'g + fg' =: \varphi$ und Kor 6.19 mit $f = \varphi, F = \Phi$ ∎

6.22 Beispiele

(a) Seien $a, b > 0$

$$\int_a^b \underbrace{\ln x}_{\underset{f}{\overset{\shortparallel}{\ln x}} \cdot \underset{g'}{\overset{\shortparallel}{1}}}\,dx \overset{PI}{=} (\ln x)\, x\Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b \underbrace{\frac{1}{x}\cdot x}_{1}\,dx}_{x|_a^b} = x(\ln x - 1)\Big|_a^b$$

(b) $I_m(x) := \int_0^x \underbrace{\sin^m(t)}_{:=(\sin t)^m}\,dt$, $m \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

- $m = 0, 1$: $I_0(x) = x$; $I_1(x) = -\cos x + 1$

- $m \geq 2$:

$$I_m(x) = \int_0^x \underbrace{\sin t}_{g'}\ \underbrace{\sin^{m-1} t}_{f}\,dt = -\cos x \sin^{m-1} x + \int_0^x \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t}(m-1)\sin^{m-2} t\,dt$$

$$\Rightarrow I_m(x) = -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1) I_{m-2}(x) + (1-m) I_m(x)$$

$$\Rightarrow I_m(x) = -\frac{1}{m} \cos x \sin^{m-1} x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) I_{m-2}(x)$$

- erlaubt rekursive Berechnung aller $I_m(x)$!
- Insbes.: $I_2(x) = \int_0^x \sin^2 t \, dt = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}$

6.23 Satz (Riemannsches Lemma)

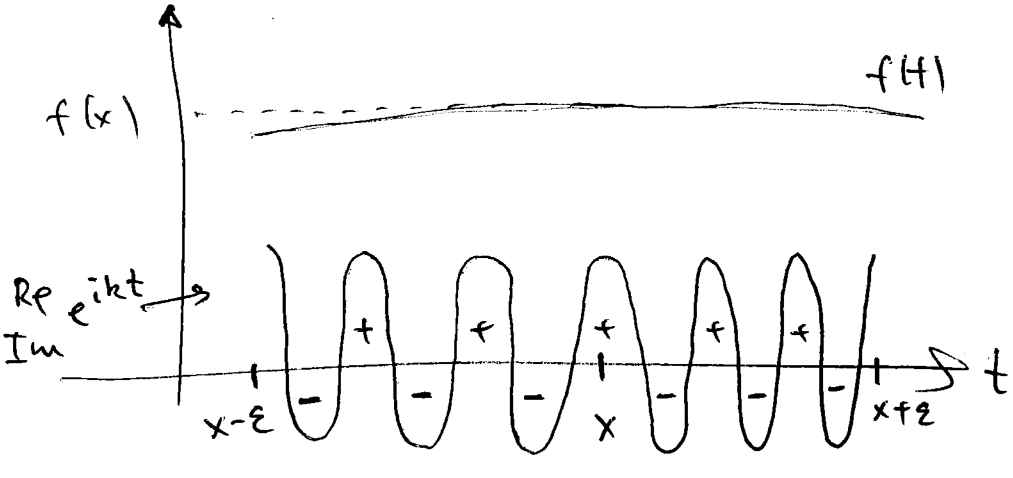
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff-bar. Dann gilt für

$$\tilde{f}(k) := \int_a^b f(x) e^{ikx} \, dx \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

dass $\lim_{k \to \pm\infty} \tilde{f}(k) = 0$.

6.24 Bemerkung

- $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt Fourier-Transformierte von f (modulo Vorfaktor)
- wird später ($\geq$ Ana 3) verallg. auf integrierbare f ⇝ Riemann-Lebesgue-Lemma
- Moral: für $|k| \gg \frac{1}{\varepsilon} \gg \sup_{t \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} |f'(t)|$



„+"- und „−"-Anteile heben sich weg für $|k| \to \infty$

Beweis von Satz 6.23 Sei $k \neq 0$

$$\tilde f(k) \overset{PI}{=} f(x)\,\frac{e^{ikx}}{ik}\Big|_a^b - \frac{1}{ik}\int_a^b f'(x)\,e^{ikx}\,dx$$

$$\Rightarrow |\tilde f(k)| \le \frac{1}{|k|}\Big(\underbrace{|f(b)|}_{<\infty} + \underbrace{|f(a)|}_{<\infty}\Big) + \frac{1}{|k|}(b-a)\underbrace{\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|}_{=:M<\infty}$$

f' stetig auf $[a,b] \Rightarrow$ beschr.

∎

6.25 Satz (Substitutionsregel)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stetig, sei $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig diff-bar.

Dann gilt
$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy \qquad (*)$$

Beweis: (Kettenregel!)

Für $g := (f\circ\varphi)\varphi'$ gilt:

- $g:[a,b]\to\mathbb{C}$ stetig
- $G := F\circ\varphi$ ist Stammfkt. zu g

  ↑ Stammfkt zu f (ex. nach HDI 6.16)

da (Kettenregel!) $G' = (\underbrace{F'}_{f}\circ\varphi)\,\varphi' = g$

also: rechte Seite $(*)$ $\overset{6.19}{=} F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

linke Seite $(*)$ $\overset{6.19}{=} G(b) - G(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

∎

Merkregel: Für $y = \varphi(x)$ gilt

- $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$; informell (!) : $dy = \varphi'(x)\,dx$
- $x = a$, $x = b$ entspricht $y = \varphi(a)$, $y = \varphi(b)$

6.26 Beispiele

(a) $$\int_a^b f(\underbrace{mx+c}_{y=\varphi(x)})\,dx \underset{dy = m\,dx}{=} \frac{1}{m}\int_a^b f(\underbrace{mx+c}_{y})\underbrace{m\,dx}_{dy} = \frac{1}{m}\int_{ma+c}^{mb+c} f(y)\,dy$$

für $m, c \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

(b) Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff-bar und $\varphi(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx \underset{y=\varphi(x)}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{y}\,dy \underset{\text{Bsp. 6.20(b)}}{=} \ln|\varphi(x)|\Big|_a^b$$

(c) $$\int^x \arctan(t)\,dt = \int^x \underbrace{\arctan(t)}_{f}\cdot\underbrace{1}_{g'}\,dt$$

$$\overset{PI}{=} x\arctan(x) - \underbrace{\int^x \frac{1}{1+t^2}\,2t\cdot\frac{1}{2}\,dt}_{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} \quad (b)$$

(Probe durch Differenzieren !)

6.27. Satz (Vertauschung von Integration mit Limiten)

$\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ($\overset{\text{Satz 3.33}}{\Rightarrow}$ f stetig!)

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \left(= \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx \right)$$

Beweis $$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \sup_{y\in[a,b]} |f(y)-f_n(y)|} dx$$

$$\leq \|f - f_n\|_\infty (b-a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\blacksquare$

Beispiel: Sei $0 < a < b$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b e^{-nx^2} dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} dx = 0$$

$$\uparrow$$

$$\sup_{x\in[a,b]} e^{-nx^2} = e^{-na^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Eine Anwendung:

6.28. Satz (Vertauschung von Differentiation mit Limiten)

$\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff.bar, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. punktweise gegen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. gleichmässig auf $[a,b]$. Dann ist f stetig diff.bar und

$$\lim_{n\to\infty} (f_n') = f' \qquad \left(= \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' \right)$$

Beweis: Sei $g := \lim_{n\to\infty} f_n'$ ($\overset{\text{Satz 3.33}}{\Longrightarrow}$ g stetig auf $[a,b]$)

zu zeigen: $g = f'$. Nach HDI 6.16:

$$\begin{tikzcd} f_n(x) \arrow[d] & = f_n(a) \arrow[d, "\text{pkt.w Kgz.}"'] & + \int_a^x f_n'(t)\,dt \arrow[d, "\text{Satz 6.27}"] & \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b] \\ f(x) & = f(a) & + \int_a^x g(t)\,dt & \end{tikzcd}$$

$\overset{\text{HDI 6.16}}{\Longrightarrow}$ f diff.-bar und $f' = g$, also stetig diff.-bar ■

6.29 Warnung

$$f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx) \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} \underbrace{|f_n(x)|}_{\le \frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

also $(f_n)_n$ glm. gegen 0 kgt.,

Aber: $f_n'(x) = \cos(nx)$ kgt. nicht für $n \to \infty$.

6.30 Korollar (Gliedweise Differentiation von Potenzreihen)

Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ Potenzreihe mit Kgz.-radius R. Dann gilt

$$\forall x \in\,]-R,R[\,: \quad \frac{d}{dx}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot n x^{n-1}$$

(insbes. ist $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ diff.-bar).

Zusatz: $x \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ bel. oft diff.-bar auf $]-R,R[$

Beweis: Für $N \in \mathbb{N}$ sei $f_N(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \quad \forall x \in]-R, R[$

Sei $0 < \rho < R$ bel. fest

(i) $\forall N \in \mathbb{N}$ ist f_N stetig diff.-bar auf $[-\rho, \rho]$

(ii) $f_N(x) \xrightarrow{N \to \infty} f(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n \quad \forall x \in [-\rho, \rho]$

(iii) $f_N'(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) a_{n+1} x^n$

Beh.: Kgz. radius von $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} (n+1) a_{n+1} x^n$ ist R, da

- $(n+1)^{1/n} = e^{1/n \ln(n+1)} \xrightarrow{n \to \infty} 1 \quad (= e^0)$
- Satz von Hadamard ✓

Satz 4.23 $\Rightarrow$ $(f_N')_N$ kgt. glm. auf $[-\rho, \rho]$

(i) - (iii) $\overset{\text{Satz 6.28}}{\Longrightarrow}$ f diff. bar auf $[-\rho, \rho]$ und

$$f'(x) = \lim_{N \to \infty} f_N'(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \forall x \in [-\rho, \rho]$$
$$= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} n a_n x^{n-1}$$

$\rho < R$ bel.
$\Rightarrow$ Beh.

Zusatzbeh. per Induktion ⇝ Übung! ▨
(siehe expl. gemacht...)

6.31 Beispiel Für $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n x^n = x \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{n x^{n-1}}_{\frac{d}{dx} x^n} \overset{\text{Kor. 6.30}}{=} x \frac{d}{dx} \Big(\underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n}_{\frac{1}{1-x} - 1} \Big)$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$