Math. Seminar "Var. Rech" | SoSe 2013

"Höhere Regularität für das Dirichlet Integral" (& Ausblicke).

(TΦS) 10/07/2013

Zur Erinnerung: 1d-Fall:

Thm. 4.7 Sei $f \in C^\infty([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ s.d.

(H_1') $f_{\xi\xi}(x,u,\xi) > 0 \quad \forall (x,u,\xi) \in [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

(H_2) $\exists\, p > q \geq 1$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$f(x,u,\xi) \geq \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3 \quad \forall (x,u,\xi) \in [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

(H_3') $\forall R > 0\ \exists\, \alpha_4 = \alpha_4(R)$:

$$|f_u(x,u,\xi)|,\ |f_\xi(x,u,\xi)| \leq \alpha_4 (1 + |\xi|^p) \quad \forall (x,u,\xi) \in [a,b]\times[-R,R]\times\mathbb{R}$$

Dann gilt: Falls $\bar{u}$ Minimierer von

$$(P) \qquad \inf_{u \in X} \left\{ I[u] = \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx \right\} = m,$$

$$X = \{ u \in W^{1,p}(a,b) \mid u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta \}$$

ist, dann $\bar{u} \in C^\infty([a,b])$.

(Falls $f \in C^k$, $k \geq 2$, dann $\bar{u} \in C^k$)

Sonderfall: (OK für $f = \frac{1}{2}\xi^2 = \frac{1}{2}|\xi|^2$).

Th 2 Sei $f(x,u,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + g(x,u)$, $g \in C^\infty([a,b]\times\mathbb{R})$

mit $(\tilde{H}2)$ $\exists\, 2 > q \geq 1$, $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$g(x,u) \geq \alpha_2 |u|^q + \alpha_3 \quad \forall (x,u) \in [a,b]\times\mathbb{R}$$

Dann $\exists\, \bar{u} \in C^\infty([a,b])$ die (P) minimiert.

Beweis idée: Existenz von Minimizer gibt Lösung von

$$(E_w) \qquad \int_a^b \bar{u}' v' \, dx = -\int_a^b g_u(x, \bar{u}(x))\, v(x)\, dx \quad \forall v \in C_0^\infty([a,b])$$

Zuerst. Zeigen $\bar{u} \in W^{2,2}_{p}(a,b)$ (!) (von (E_w)).

dann partiel integrieren um $\bar{u}''$ zu isolieren:

$$(*) \qquad \bar{u}''(x) = g_u(x, \bar{u}(x)) \quad \text{f.ü. } x \in (a,b)$$

Dann "bootstrap" (Münchhausen)

$\bar{u} \in W^{2,2}(a,b) \Rightarrow \bar{u} \in C^1([a,b])$

$\Rightarrow x \mapsto g_u(x,\bar{u}(x))$ C^1

$\Rightarrow \bar{u}'' \in C^1 \Rightarrow \bar{u} \in C^3$ etc

$\ldots \Rightarrow \bar{u} \in C^\infty$.

Idée: Gleichung für höchste Ableitung in $\bar{u}$

– und zwar explizit $(*)$

Wichtig dafür: Annahme $f_{\xi\xi} > 0$

Heute: Höhere Dimension, Höhere Regularität

(für Dirichlet Integral :

$$f(x,u,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 - h(x)u$$

Letztes mal: "innere Regularität" : (dim n)

Thm 3 Unter gewisse (!) Bedingungen an g, in

$$f(x,u,\xi) = g(x,\xi) - h(x)u$$

(die für $\frac{1}{2}|\xi|^2$ erfüllt sind) gilt :

Ein Minimizer $\bar{u} \in u_0 + W^{1,2}(\Omega)$ ($u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$)

ist in $W^{2,2}_{loc}(O)$ $\quad \forall O \subset \bar{O} \subset \Omega$

& $\forall O \; \exists \gamma > 0$:

$$\|u\|_{W^{2,2}(O)} \leq \gamma \left[\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \right]$$

Und

(II) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial g}{\partial \xi_i}(x, \nabla u) \right] = -h(x) \quad \text{für } \Omega$$

Pb. mit (II): (1) Nicht direkt Gleichg für Ableitg $\bar{u}$. (von g abh.).

(2) Auch wenn : $g(x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$:

(II) ist

(Δ) $$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -h$$

Im Fall $n = 1$:

$$\bar{u}'' = -h \in C^\infty \Rightarrow \bar{u} \in C^\infty$$

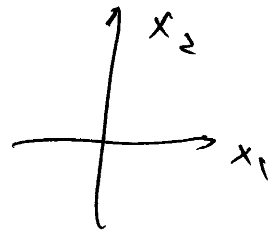
Aber: Für $n > 1$ enthält (Δ) nur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \left(\text{nicht aber } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \; i \neq j \right).$$

– und, sogar nur $\sum_i$ davon!.

(Brauche $\partial^\alpha u \in C^0$ $\forall \alpha$ wenn $u \in C^\infty$).

Tatsache: (Ex. 4.5.3).



$\exists$ $u : B_{1/2}(0) \to \mathbb{R}$, $u = u(x_1, x_2)$

mit $u_{x_1 x_1}, u_{x_2 x_2} \in C^0$

$$\left(\text{i.e. } \Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} \equiv f \in C^0(B_{1/2}(0)) \right)$$

aber $u_{x_1 x_2} \notin L^\infty(B_{1/2}(0))$

i.e. $\notin C^0$ – so dass $u \notin C^2$

obwohl $\Delta u = f \in C^0$.

Haben aber:

Thm. 4 (4.10) $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen & beschränkt, Lipschitz Rand (!?), $h \in W^{k,2}(\Omega)$

und

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega h(x) u(x) dx \;\middle|\; u \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\}.$$

Dann $\exists!$ Minimierer $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{k+2,2}_{loc}(\Omega)$

& $\forall O \subset \bar{O} \subset \Omega$, O offen $\exists \gamma$:

$$(\Delta\Delta) \quad \|u\|_{W^{k+2,2}(O)} \leq \gamma \|h\|_{W^{k,2}(\Omega)}$$

Falls $\partial\Omega \in C^{k+2}$, dann

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{k+2,2}(\Omega) \quad \text{und}$$

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \le \gamma \|h\|_{W^{k,2}(\Omega)}$$

Ins besonders: Falls $k = \infty$ (so dass $h \in C^\infty$),

dann $\bar{u} \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Bem. (1) Obwohl C^k - Räume also "ungeeignet" für Regularität sind, hat man

$\forall \alpha \in (0,1) \ \exists \gamma = \gamma(\alpha)$:

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega)} \le \gamma \|h\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$$

(aber nicht für $\alpha = 0$, $\alpha = 1$).

("Schauder Abschätzungen").

(Besser als via Sobolev Einbettung wenn nicht an C^∞).

(2) Auch für $1 < p < \infty$ hat man

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \le \gamma \|h\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

(aber nicht für $p = 1$, $p = \infty$). (Beispiele).

("Calderón - Zygmund Abschätzungen")

Sind viel harter zu Beweisen!

Also: Sobolev ($1 < p < \infty$) - & Schauder ($C^{k,\alpha}$) gut,

C^h schlecht.

(3) Kann verallgemeinern auf $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$

(von $\frac{1}{2}|\xi|^2$) wenn

$$\langle \lambda, A(x)\lambda \rangle \geq \beta \|\lambda\|^2, \quad \beta > 0$$
$$\forall x, \forall \lambda$$

$A = (a_{ij})$

Beweis: Innen Regularität, unter Anwendung vom Resultat vom letztes Mal. - I.e. ($\Delta\Delta$)

(B) (aus Satz 3) ist hier ($g = \frac{1}{2}|\xi|^2$)

$$(\square\square) \begin{cases} \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx = \int_\Omega h(x)\varphi(x)\,dx & \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \Delta u = -h \quad \text{f.ü. } \Omega \end{cases}$$

Zu Beweisen: $h \in W^{1,2}(\Omega) \Rightarrow u \in W^{3,2}_{loc}(\Omega)$

[$h \in W^{k,2}(\Omega) \Rightarrow u \in W^{k+2,2}_{loc}(\Omega)$ folgt durch iterieren]

Idee: Die Gleichung ($\square\square$) zu differenzieren:

$$\Delta(u_{x_i}) = -h_{x_i} \in L^2$$

also $u_{x_i} \in W^{2,2}_{loc}(\Omega) \quad \forall i$ (aus Satz 3)

also $u \in W^{3,2}_{loc}(\Omega)$ (& Abschätz.)

<u>Rigoros</u>: Aus (□□□) folgt (!) [zu Beweisen!]

$$(**) \quad \int_\Omega \langle \nabla u_{x_i}(x), \nabla \varphi(x) \rangle \, dx = \int_\Omega h_{x_i}(x) \varphi(x) \, dx$$

$$\forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Aus $h \in W^{1,2}$ folgt $h_{x_i} \in L^2$, also (Satz 3)

$u_{x_i} \in W^{2,2}_{loc}$ $\forall i$ & $\exists \gamma_2 > 0$:

$$\|u_{x_i}\|_{W^{2,2}(O)} \le \gamma_2 \|h_{x_i}\|_{L^2(\Omega)} \le \gamma_c \|h\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

Also, $u \in W^{3,2}_{loc}(\Omega)$ und

$$\|u\|_{W^{3,2}(O)} \le \gamma_3 \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

<u>Beweis:</u> von (**): ($u \in W^{2,2}_{loc}$, so OK für $\varphi \in C_0^\infty$)

$$\int_\Omega \langle \nabla(u_{x_i}), \nabla\varphi \rangle dx \overset{\text{"Gauss"}}{=} \int_\Omega \langle (\nabla u)_{x_i}, \nabla\varphi \rangle dx$$

$$= -\int_\Omega \langle \nabla u, (\nabla\varphi)_{x_i} \rangle \, dx \quad \text{(def. schwach Abl.)}$$

$$= -\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla(\varphi_{x_i}) \rangle dx \quad (\varphi_{x_i} \in C_0^\infty)$$

$$= -\int_\Omega h \varphi_{x_i} \, dx \quad \text{(von (□□))}$$

$$= \int_\Omega h_{x_i} \varphi \, dx \quad \text{(def schwach Abl. & } h \in W^{1,2}\text{).}$$

| math-Sem. "Var. Rechn" | | SoSe 2013 |

Ausblicke

- Zur "Klassische Methode": Schon frühe Email geschickt zur Büchern von Giaquinta & Hildebrandt (dazu gibt es noch tiefer (als auch [D]) angesetzten Büchern).

- Zur "Direkte Methode": Schon diesen Semester Vorlesung dazu (! - war dünn) - Zur Literatur insbesondere "Gross" - Dacorogna und Struwe "Variational Methods"

- Ganz anderes Thema sind kritische Punkte (nicht nur Minima) zu finden
  - Sehe dazu Struwe. (min/max, Mountain Pass)

- Regularität: Riesen Gebiet - sowohl in $W^{k,p}$, als $C^{k,\alpha}$ - enthält (!) Harmonische Analysis, Operatortheory - Distributive Theorie (Werbung! Seminar), PDG. - Lineare Theorie als auch nichtlineare Theorie (sehe/lese Kap. 4.7)