Solutions de Viscosité
et
Équations Elliptiques du Deuxième Ordre

Guy Barles

Septembre 1997

Université de TOURS

Table des Matières

1 Introduction

(ou pourquoi apprendre à utiliser les solutions de viscosité)

Le but de ce cours est de présenter les idées fondamentales et les principaux résultats de la *théorie des solutions de viscosité.* La notion de "solutions de viscosité" a été introduite en 1981 par M.G. Crandall et P.L. Lions[15] (voir aussi M.G. Crandall, L.C. Evans et P.L. Lions[12]) pour résoudre des problèmes posés par les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre mais elle est très vite apparue comme une notion de solutions faibles bien adaptée pour les équations elliptiques non linéaires, éventuellement dégénérées, du second-ordre dans un cadre que nous allons définir dans cette introduction.

L'expression "théorie" des solutions de viscosité peut prêter à sourire car, pour l'instant du moins, l'utilisation de cette notion de solutions se heurte à la difficulté récurrente suivante : sauf quelques cas (relativement) bien répertoriés comme les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman, par exemple, l'équation à laquelle on s'intéresse ne satisfait qu'exceptionnellement les hypothèses des résultats classiques de la "théorie". Ceci est particulièrement vrai pour les résultats d'unicité qui sont pourtant des résultats fondamentaux dans cette approche.

On peut invoquer la jeunesse de cette théorie pour excuser cette faiblesse (qui en dégoûte en général les non-spécialistes) mais la raison principale de cette particularité est le spectre extrêmement large des équations auxquelles la notion de solutions de viscosité s'applique. Le but de la Section 1.2 est de montrer cette variété, aussi bien sur le type d'équations que sur les champs d'applications.

A cause de cette particularité, l'utilisateur doit être capable de refaire les preuves d'unicité ou de stabilité en les adaptant au cas particulier considéré. Aussi, dans ce cours, nous avons cherché à la fois à décrire assez en détails les deux types de résultats vraiment indispensables pour manipuler les solutions de viscosité (stabilité et unicité) et à donner un aperu du potentiel de la théorie via des exemples plus exotiques (mais qu'il nous sera impossible de détailler ici).

L'objectif de cette introduction est de donner une motivation pour cet apprentissage : nous montrerons tout d'abord l'utilité des solutions de viscosité dans les problèmes de modélisations, puis nous donnerons quelques exemples des diverses applications de cette théorie et enfin des problèmes qu'elle a contribués à résoudre.

Tout au long de ce cours, nous ne donnerons que peu de références : le lecteur intéressé par des développements particuliers pourra se reporter dans un premier temps aux ouvrages ou articles de références : le "User's guide" de M.G. Crandall, H. Ishii et P.L. Lions[14] qui présente la théorie de manière plus complète que ce cours, le livre de W.H. Fleming et H.M. Soner[17] où l'accent est mis sur les applications au contrôle optimal ou encore à [3] qui se veut d'un abord plus élémentaire mais qui se restreint aux équations du premier ordre. Last but not least, le cours CIME donné par M. Bardi, M.G. Crandall, L.C. Evans, H.M. Soner et P.E. Souganidis[2] présente, outre la théorie classique, un certain nombre d'applications spectaculaires des solutions de viscosité.

Bien entendu, pour des résultats plus pointus, la lecture d'articles plus spécialisés est sans doute nécessaire : les notes bibliographiques des références mentionnées ci-dessus, bien qu'obligatoirement incomplètes, permettent assez facilement de trouver le bon article et le résultat recherché... s'il existe.

1.1 Solutions de viscosité et modélisation

La plupart du temps, on présente les solutions de viscosité comme une notion de solutions faibles qui permet, en particulier, l'extension des propriétés du type principe du maximum (qui sont classiques pour des solutions régulières d'équations elliptiques) à des solutions moins régulières, typiquement continues. Ce que l'on peut résumer par :

$$\text{Solutions de viscosité} \quad \Rightarrow \quad \text{Principe du maximum.}$$

Mais, en fait, on a découvert récemment que cette implication – qui n'est d'ailleurs vraie que sous certaines conditions – n'est pas la justification la plus convaincante ni la plus intéressante de l'introduction de la notion de solutions de viscosité : bien que peu de travaux aient pour l'instant utilisé systématiquement cette remarque, il paraît désormais clair que la notion de solutions de viscosité est naturellement sous-jacente à tout modèle physique, biologique, économique... qui satisfait certaines propriétés de "monotonie". Ce qui signifie que l'implication intéressante est plutôt :

$$\text{Principe du maximum} \quad \Rightarrow \quad \text{Solutions de viscosité}$$

Pour être un peu plus précis, donnons un exemple d'un tel résultat. Cet exemple est tiré du travail de L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions et J.M. Morel[1] en traitement d'images.

On suppose que le modèle qui nous intéresse est décrit par une fonction $u : \mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Le but est de trouver une équation aux dérivées partielles dont u est la solution, ce qui permettrait de calculer systématiquement $u(\cdot, t)$ pour $t > 0$ soit à partir de la donnée initiale $u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)$, soit à partir de $u(\cdot, s)$ pour un certain $s < t$.

Une première condition naturelle pour pouvoir faire cela est la suivante :

(A1) (Causalité)
Il existe une famille d'applications $T_{t,t+h} : BUC(\mathbb{R}^N) \to BUC(\mathbb{R}^N)$ *définies pour* $t, h \geq 0$ *telles que :*

$$u(x, t+h) = T_{t,t+h}\,[u(.,t)]\,(x) \quad \textit{dans } \mathbb{R}^N \ ,$$

et $T_{t,t} = Id$ *pour tout* $t \geq 0$ *et* $h \geq 0$.

La propriété ci-dessus est naturelle comme expression du déterminisme du phénomène. Nous rappelons que $BUC(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des fonctions bornées, uniformément continues sur $\mathbb{R}^N$.

L'hypothèse essentielle pour le lien avec les solutions de viscosité est la :

(A2) (Monotonie)

$$T_{t,t+h}\, u \leq T_{t,t+h}\, v \qquad \textit{si } u \leq v \quad \textit{dans } \mathbb{R}^N \ ,$$

pour toutes fonctions $u, v \in BUC(\mathbb{R}^N)$, *pour tous* $t \geq 0$ *et* $h \geq 0$.

Enfin, pour éviter des phénomènes non-locaux et trop exotiques, un certain nombre d'hypothèses dont la dernière est seulement simplificatrice :

(A3) (Localité)
Si $f, g \in BUC(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *vérifient* $D^\alpha f(x) = D^\alpha g(x)$ *pour un certain*

$x \in I\!\!R^N$ et pour tout multi-indice α [1] *alors*

$$T_{t,t+h}[f](x) - T_{t,t+h}[g](x) = o(h) \quad \textit{quand } h \to 0^+ \ ,$$

pour tout $t \geq 0$.

(A4) (Régularité)
Pour tous $f, g \in BUC(I\!\!R^N) \cap C^\infty(I\!\!R^N)$, pour tous $t, h \geq 0$ et pour tout $\mu \in I\!\!R$, il existe une constante $C = C(f, g, t)$ telle que :

$$||T_{t,t+h}[f + \mu g] - T_{t,t+h}[f] - \mu g||_\infty \leq C\mu h \ .$$

(A5) (Invariances)
Pour tout $k \in I\!\!R^N$ et $f \in BUC(I\!\!R^N)$, on a :

$$T_{t,t+h}[f(\cdot + k)] = T_{t,t+h}[f](\cdot + k) \ ,$$

$$T_{t,t+h}[f + c] = [T_{t,t+h} f] + c \ ,$$

pour tous $k \in I\!\!R^N$, $f \in BUC(I\!\!R^N)$, $t, h \geq 0$ et $c \in I\!\!R$.

Le résultat est alors le :

Théorème 1.1 : *Sous les hypothèses (A1)–(A5), il existe une fonction continue $G : [0, +\infty) \times I\!\!R^N \times \mathcal{S}^N \to I\!\!R$ où $\mathcal{S}^N$ est l'espace des matrices symétriques $N \times N$ telle que la fonction u est une solution de viscosité de :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + G(t, Du, D^2 u) = 0 \qquad \textit{dans } I\!\!R^N \times (0, \infty) \ . \tag{1}$$

De plus, cette équation est "elliptique" (parabolique) car G satisfait :

$$G(t, p, M_1) \leq G(t, p, M_2) \qquad \textit{si } M_1 \geq M_2 \ , \tag{2}$$

pour tous $t \geq 0$, $p \in I\!\!R^N$ et $M_1, M_2 \in \mathcal{S}^N$.

---

[1] On rappelle que, si f est une fonction régulière, on note :

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}} \ ,$$

si $\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_N)$ où les α_i sont des entiers naturels et où $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

Ce résultat décrit parfaitement le cadre de ce cours : on va s'intéresser à des équations de type (1) – ou à sa version stationnaire – quand G satisfait la condition d'ellipticité (2).

Plusieurs variantes de ce résultat sont décrites dans [1]; signalons seulement que les hypothèses (A1), (A3) et (A4) servent à démontrer l'existence de ce que l'on appelerait dans le cas semi-groupe, un générateur infinitésimal i.e. ici d'une limite quand $h \to 0$ du quotient :

$$\frac{T_{t,t+h}[f](x) - f(x)}{h} ,$$

pour toute fonction $f \in BUC(I\!\!R^N) \cap C^\infty(I\!\!R^N)$. Si cette limite est notée $\mathcal{A}(t,f)(x)$, (A2) implique qu'en fait :

$$\mathcal{A}(t,f)(x) = \tilde{\mathcal{A}}(t, Df(x), D^2f(x), \ldots, D^kf(x), \ldots) .$$

Ensuite, (A4) permet de prouver que $\tilde{\mathcal{A}}$ ne dépend réellement que de $t, Df(x)$ et $D^2f(x)$ avec la condition d'ellipticité annoncée. L'hypothèse (A5) simplifie vraiment la preuve (et l'énoncé de l'hypothèse de régularité); il est clair que les deux propriétés imposées par (A5) empêchent G de dépendre respectivement de x et de u.

Une version géométrique de ce résultat, moins générale puisque l'existence du "générateur infinitésimal" est supposée a priori, où le rôle de la monotonie est joué par des propriétés d'inclusions est donnée dans G. Barles et P.E. Souganidis[9].

1.2 Quelques exemples d'applications

Dans cette section, nous donnons quelques exemples d'équations qui nous ont semblé refléter les applications les plus typiques de la notion de solution de viscosité dans divers domaines. Certaines d'entre elles, pour diverses raisons ne rentrent pas tout à fait dans le formalisme de la section précédente ou bien parce qu'elles ne sont pas posées dans $I\!\!R^N$ – ce qui n'est pas très important – ou bien parce que des discontinuités apparaissent dans l'équation – ce qui est plus gênant mais pas rédibitoire –.

Tout au long de cette section et de ce cours, $\mathcal{O}$ désigne un ouvert de $I\!\!R^N$ et H une fonction continue sur $\mathcal{O} \times I\!\!R \times I\!\!R^N$ à valeurs réelles. Si la fonction $u : \mathcal{O} \to I\!\!R$ est régulière, on note $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_i})_{1 \leq i \leq N}$, son gradient et

$D^2u = (\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j})_{1\le i,j\le N}$, sa matrice hessienne. Enfin, la notation $|.|$ désigne la norme euclidienne standard sur $I\!R^N$ i.e.

$$|p| = \left(\sum_{i=1}^{N} p_i^2\right)^{1/2} \quad ,$$

pour tout $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N) \in I\!R^N$.

Exemple 1 : les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre.

$$H(x, u, Du) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \ .$$

Ce premier exemple est évidemment fondamental car c'est pour résoudre les diverses questions posées par ces équations que la notion de solution de viscosité a été introduite et c'est incontestablement pour ces équations que la théorie est la plus avancée (pour ne pas dire qu'elle est complète). A l'évidence, ces équations sont les plus dégénérées qu'on puisse imaginer puisque D^2u n'intervient pas.

Nous décrirons les problèmes que posaient ces équations dans les sections suivantes; bien entendu, des difficultés analogues apparaissent dans l'étude d'équations elliptiques dégénérées.

Exemple 2 : les équations elliptiques ou paraboliques semi-linéaires.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + H(x, u, Du) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \times (0, \infty) \ ,$$

où les $a_{i,j}$ sont des fonctions au moins continues.

Pour de telles équations, la théorie classique est bien développée dans le cadre *uniformément elliptique* i.e. si la matrice $a = (a_{i,j})_{i,j}$ satisfait :

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(x) p_i p_j \ge \nu |p|^2 \ , \quad \forall p \in I\!R^N \ , \tag{3}$$

pour un certain $\nu > 0$ indépendant de x.

Mais dans le cas dégénéré, c'est-à-dire quand cette propriété est satisfaite avec $\nu = 0$, il n'en est pas de même et beaucoup de problèmes tout à fait analogues à ceux présentés plus loin par les équations du premier ordre se posent. Il est d'ailleurs à noter que la généralité de l'exemple ci-dessus autorise les équations hyperboliques type lois de conservation (si $a \equiv 0$) qu'il nous faudra éliminer car elles ne rentrent pas dans le cadre de la théorie des solutions de viscosité.

Bien que ce cours soit destiné à des analystes, nous devons évoquer ici le lien avec la théorie probabiliste des processus stochastiques qui permet (au moins) de comprendre certaines hypothèses faites, en particulier, sur la matrice de diffusion $a = (a_{i,j})_{i,j}$.

Une équation différentielle stochastique est une équation du type :

$$dX_s^x = b(X_s^x)ds + \sigma(X_s^x)dW_s \quad , \quad X_0^x = x \in \mathbb{R}^N \ , \tag{4}$$

où b et σ sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^N$ et à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^N$ et dans l'espace des matrices $p \times N$ ($p \in \mathbb{N}$). Le processus $(X_s^x)_s$ est l'inconnu de cette équation – qui n'est qu'une simple équation différentielle ordinaire si $\sigma \equiv 0$ – et le processus $(W_s)_s$ est un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^p$.

Quand b et σ sont des fonctions lipschitziennes, on a un résultat d'existence et d'unicité pour (4) (penser à Cauchy-Lipschitz!). D'autre part, la formule d'Itô (que l'on ne va pas décrire ici) montre le lien entre l'équation (4) et l'opérateur différentiel :

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(a(x)D^2\right) - b(x) \cdot D \ ,$$

avec $a := \sigma\sigma^T$ où σ^T désigne la transposée de la matrice σ.

De manière un peu plus précise bien que formelle, la solution naturelle du problème linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(a(x)D^2u\right) - b(x) \cdot Du = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

si l'on suppose que g est une fonction lipschitzienne, est donnée par :

$$u(x,t) = \mathbb{E}_x\left(g(X_t^x)\right) \ ,$$

où $\mathbb{E}_x$ désigne l'espérance conditionnelle par rapport à l'évènement $\{X_0^x = x\}$. On voit que les trajectoires de l'EDS (4) jouent ici essentiellement le rôle que jouent les caractéristiques pour une équation hyperbolique. Le lecteur intéressé par l'approche probabiliste des équations elliptiques pourra consulter le livre de M. Freidlin[18] ou l'article de D.W Strook et S.R.S. Varadhan[29].

Cet exemple nous permet déjà d'entrevoir les problèmes de ce type d'équation : la fonction u sauf dans des cas uniformément elliptiques, ne sera jamais mieux que lipschitzienne; alors en quel sens satisfait-elle l'équation? est-elle l'unique solution de cette équation? quelle régularité possède-t-elle? Même dans ce cadre très simple, la réponse à ces questions n'est pas évidente. La première qualité de la notion de solution de viscosité – nous le signalons ici pour mémoire car nous n'y reviendrons pas – est de fournir des résultats sous des hypothèses qui sont naturelles du point de vue probabiliste.

Nous terminons les commentaires sur cet exemple en faisant remarquer au lecteur que, pour ce type d'équations dégénérées, les approches utilisant des espaces de Sobolev semblent mal adaptées ou au moins très délicates à utiliser car il est clair que l'espace de Sobolev doit dépendre de a.

Exemple 3 : les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(A^\alpha u - f(x,\alpha) \right) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \times (0,\infty) \ , \tag{5}$$

où :

$$A^\alpha u = -\sum_{i,j} a_{i,j}(x,\alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x,\alpha) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,\alpha) u \ .$$

et où les fonctions $a_{i,j}$ $(1 \leq i,j \leq N)$, b_i $(1 \leq i \leq N)$, c, f sont des fonctions continues sur $\mathcal{O} \times \mathcal{A}$ à valeurs réelles.

Ces équations interviennent en contrôle optimal, déterministe si $a_{i,j}(.,\alpha) \equiv 0$ pour tous i et j et pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, stochastique sinon. L'ensemble $\mathcal{A}$ est l'espace des contrôle; c'est en général un espace métrique compact.

Ces équations dont la première particularité est d'être fortement non-linéaires, fournissent un cadre d'applications typique des solutions de viscosité : la dégénérescence éventuelle des matrices $(a_{i,j})_{i,j}$ ainsi cette forte non-linéarité rendent quasi-inutilisables d'autres approches.

Poursuivons cette revue d'exemples par des applications plus concrètes.

Exemple 4 : Options lookback en finance

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\sigma^2 P^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial P^2} - rP\dfrac{\partial u}{\partial P} + ru = 0 & \text{si } 0 < P < Z \ , \\ -\dfrac{\partial u}{\partial Z} = 0 & \text{si } 0 < Z < P \ . \end{cases}$$

Dans cet exemple, la solution u représente le prix d'une option dont la valeur à maturité T est connue – $(Z - P)^+$ par exemple –, r est le taux sans risque, P le prix de l'action sous-jacente et σ la volatilité de cette action. La variable Z prend en compte le maximum du prix de l'action sur la période écoulée.

Cet exemple, pourtant relativement simple en finance, montre le caractère un peu exotique que peuvent prendre les équations issues de ce domaine où l'on a souvent affaire à des problèmes de contrôle optimal singulier. L'exemple ci-dessus combine les difficultés d'une équation dégénérée avec celles liées à une condition au limite de type dérivée oblique.

Exemple 5 : Equations Géométriques

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c|Du| = 0 \quad \text{dans } I\!R^N \times (0,\infty) \ , \tag{6}$$

où $c \in I\!R$ et :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \frac{(D^2uDu|Du)}{|Du|^2} = 0 \quad \text{dans } I\!R^N \times (0,\infty) \ . \tag{7}$$

Ces deux équations interviennent en géométrie : les lignes de niveaux de la solution u – que l'on peut imaginer comme étant des hypersurfaces de $I\!R^N$ – se propagent avec une vitesse normale égale à c dans le cas de (6) et à la courbure moyenne de cette hypersurface au point considéré dans le cas de (7). En fait, ces équations permettent de donner un sens "faible" à ces lois de propagation.

Parmi ces deux exemples, l'équation (7) est certainement celle qui présente les particularités les plus intéressantes : outre son caractère dégénéré et le fait qu'elle ne soit pas sous forme divergence, elle admet une forte singularité pour $Du = 0$.

La conclusion de cette section consiste à résumer les caractéristiques communes des équations ci-dessus : on veut pouvoir traiter des équations fortement non linéaires, éventuellement dégénérées et pouvant présenter certains types de singularités. On sait a priori qu'il ne faut pas s'attendre à trouver des solutions classiques, "régulières". On doit donc définir une notion de solutions "faibles" ce qui va entrainer des problèmes d'unicité et de prise en compte des conditions aux limites (on va y revenir dans les prochaines sections). Voilà pour les difficultés.

De manière positive, ces équations sont toutes elliptiques (ou paraboliques) dégénérées i.e. elles peuvent se mettre sous la forme :

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \;, \tag{8}$$

où $\mathcal{O}$ est un ouvert d'un espace $I\!\!R^d$ et F est une fonction définie sur $\mathcal{O} \times I\!\!R \times I\!\!R^d \times \mathcal{S}^d$ à valeurs dans $I\!\!R$ où $\mathcal{S}^d$ est l'espace des matrices $d \times d$ symétriques.

La fonction F, très souvent appelée l'hamiltonien par référence au contrôle optimal, est en général une fonction continue (mais pas toujours). Sa caractéristique FONDAMENTALE est de satisfaire la condition dite *d'ellipticité* :

$$F(x, u, p, M_1) \leq F(x, u, p, M_2) \quad \text{si } M_1 \geq M_2 \;,$$

pour tous $x \in \mathcal{O}$, $u \in I\!\!R$, $p \in I\!\!R^d$ et $M_1, M_2 \in \mathcal{S}^d$.

Cette condition d'ellipticité est un pré-requis nécessaire pour parler de solution de viscosité. Même si nous ne le précisons pas par la suite, toutes les équations considérées seront supposées satisfaire cette propriété.

1.3 Solutions explicites : comment donner un sens à ces solutions et comment sélectionner la bonne?

Nous avons affirmé ci-dessus que les équations que nous considérons n'admettent pas de solutions régulières; l'exemple suivant permet de s'en convaincre :

$$|u'| = 1 \quad \text{dans }]0, 1[\;, \tag{9}$$

avec la condition aux limites :

$$u(0) = u(1) = 0 \;. \tag{10}$$

Il est clair, par simple application du théorème de Rolle, que ce problème n'admet pas de solution C^1.

On doit alors définir une notion de solution "faible" mais ce n'est pas si facile : le premier réflexe est de se tourner vers les espaces de Sobolev. On a envie de dire qu'une solution de (9) est une fonction de $W^{1,\infty}(]0,1[)$ qui satisfait l'équation au sens presque partout. Il s'agit du concept de *solution généralisée*. Mais on construit facilement pour l'exemple ci-dessus une infinité de telles solutions, ce qui est évidemment inacceptable. On souhaite que la notion de solution faible considérée fasse en sorte que le problème soit bien posé.

D'autre part, le contrôle optimal fournit des solutions explicites de certaines équations. Par exemple, la fonction u définie sur $I\!R^N \times (0,+\infty)$ par:

$$u(x,t) = \inf_{|y-x|\leq t} [u_0(y)] \ , \tag{11}$$

où u_0 est une fonction continue, doit être la “bonne” solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + |Du| = 0 \quad \text{dans } I\!R^N \times (0,+\infty) \ , \tag{12}$$

associée à la donnée initiale :

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{dans } I\!R^N \ . \tag{13}$$

Mais u n'est a priori qu'une fonction continue et l'approche par solution généralisée est inopérante, de même qu'une approche au sens des distributions à cause du terme $|Du|$.

On peut remarquer d'ailleurs que, si $u_0(x) = |x|$, $u(x,t) = (|x|-t)^+$ et $v(x,t) = |x|-t$ sont deux solutions généralisées et on retrouve le défaut de non-unicité même sans la présence d'un bord.

Le problème du choix d'une notion de solution faible est délicat car il détermine ensuite les propriétés de l'équation (existence, unicité, ...etc). Ici le problème a l'air encore plus ardu car on ne voit pas très bien quoi faire d'autre que les solutions généralisées.

1.4 Problèmes de passage à la limite

Comme dans le cas peut-être mieux connu des équations hyperboliques type lois de conservation, il est naturel de penser que la démonstration de l'existence d'une solution – et, on l'espère, de la bonne solution – pour une équation elliptique dégénérée devrait utiliser la méthode dite de *viscosité évanescente*. Cette méthode pour une équation de Hamilton-Jacobi s'écrit :

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon + H(x,u_\varepsilon,Du_\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \ , \tag{14}$$

où $\varepsilon > 0$ est destiné à tendre vers 0. Bien entendu, il faut associer à cette équation des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann pour avoir un problème bien posé.

Comme l'équation (14) est maintenant une équation semi-linéaire uniformément elliptique et on peut espérer l'existence d'une solution $u_\varepsilon \in C^2(\mathcal{O})$. On doit ensuite étudier le comportement de la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$.

La situation favorable la plus standard est celle où l'on arrive à démontrer que les suites $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(Du_\varepsilon)_\varepsilon$ sont uniformément bornées dans L^∞. Des estimations plus fortes sont rarement satisfaites car elles conduiraient, pour l'équation du premier ordre, à des solutions C^1.

Avec ces estimations et quitte à extraire une sous-suite, on a la convergence forte des u_ε par le théorème d'Ascoli mais seulement une convergence faible des Du_ε qui est insuffisante pour passer à la limite dans le terme non-linéaire (difficulté standard de l'Analyse non-linéaire!). Sauf dans des cas particuliers, on est bloqué.

Ces questions de passage à la limite ne sont pas seulement académiques : elles interviennent naturellement dans les problèmes de Grandes Déviations, dans la théorie des perturbations de problèmes de contrôle déterministe... etc. Une autre motivation importante pour ces problèmes de passage à la limite est, bien sûr, la convergence de schémas numériques pour les équations du premier ou du deuxième ordre.

1.5 Conditions aux limites ou pas?

Les équations de transport, qui rentrent parfaitement dans notre cadre, montrent la difficulté de ce type de questions. Quand on veut résoudre le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -b(x)\cdot Du = 0 & \text{dans } \mathcal{O} \\ \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

où b est une fonction lipschitzienne et $\varphi \in C(\partial\mathcal{O})$, il est bien connu que la condition aux limites de Dirichlet n'est en général satisfaite par u qu'aux points du bord où le champ b est sortant. Par contre, quand il est rentrant, on a l'impression que l'équation a lieu jusqu'au bord. Quoiqu'il en soit pour une équation aussi simple, la situation n'est déjà pas si triviale.

On se doute donc que le sens des conditions aux limites pour des équations dégénérées est délicat : comme le montre l'exemple ci-dessus, il est bien connu que l'on ne peut pas toujours résoudre le problème de Dirichlet, que dans ce type de questions les propriétés du bord (en particulier sa courbure) jouent un rôle essentiel...etc mais aucune théorie complète n'existe.

On peut envisager cette question d'une manière un peu différente : si on veut résoudre le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + H(x,u,Du) = 0 & \text{dans } \mathcal{O}, \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \tag{15}$$

où la matrice $(a_{i,j})_{i,j}$ satisfait (3) avec $\nu = 0$, il est naturel d'utiliser la méthode de viscosité évanescente et d'introduire le problème approché, plus régulier car fortement elliptique :

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u_\varepsilon - \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + H(x,u_\varepsilon,Du_\varepsilon) = 0 & \text{dans } \mathcal{O} \\ u_\varepsilon = \varphi & \text{sur } \partial\mathcal{O}\ . \end{cases} \tag{16}$$

Pour ce problème non dégénéré, on peut raisonnablement espérer trouver une solution u_ε dans $C^2(\mathcal{O}) \cap C(\overline{\mathcal{O}})$.

La "bonne" solution du problème (15) devrait être la limite des u_ε et on est amené à étudier le comportement des u_ε quand ε tend vers 0, le problème limite et, en particulier, la condition de bord. Cette question semble évidemment particulièrement intéressante si, comme dans l'exemple de l'équation de transport ci-dessus, on se heurte à des pertes de la condition aux limites de Dirichlet mais aussi particulièrement difficile car on doit s'attendre à des phénomènes de couches limites pour les u_ε au voisinage de $\partial\mathcal{O}$. On ne peut plus comme dans la section précédente utiliser le théorème d'Ascoli jusqu'au bord...

2 Solutions de viscosité continues : définition et premières propriétés

2.1 Présentation et définition

Il est bien connu que le principe du maximum joue un rôle fondamental dans l'étude des équations elliptiques et paraboliques, surtout quand on utilise l'approche dite de Schauder où l'on cherche des solutions régulières (C^2 ou $C^{2,\alpha}$). En effet, la construction systématique de sous-solutions et sursolutions ad hoc et la possiblité de les comparer avec des solutions est un des arguments-clé de cette approche.

On peut même aller plus loin et dire que, pour ces équations, tout repose sur le principe du maximum puisque même les résultats de régularité (les "estimations de Schauder") peuvent être obtenus grâce à ce type d'arguments comme le montrent les travaux de A. Brandt[10, 11] (cf. la section 3.4 du D. Gilbarg et N.S Trudinger[19]).

Cette idée est justifiée par le résultat suivant où l'on s'intéresse à des équations générales du type :

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \ , \tag{17}$$

où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $I\!R^N$ et F une fonction continue satisfaisant la condition d'ellipticité.

Théorème 2.1 : Principe du Maximum et Solutions régulières.
$u \in C^2(\mathcal{O})$ est solution classique de l'équation (17) **si et seulement si :**

$\forall \phi \in C^2(\mathcal{O})$, si $x_0 \in \mathcal{O}$ est un point de maximum local de $u - \phi$, on a :

$$F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0 \ ,$$

et :

$\forall \phi \in C^2(\mathcal{O})$, si $x_0 \in \mathcal{O}$ est un point de minimum local de $u - \phi$, on a :

$$F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \geq 0 \ .$$

Ce théorème montre que, grâce au principe du maximum, on peut définir ce qu'est la solution d'une équation elliptique sans utiliser de régularité puique la seconde formulation ne requiert ni l'existence de Du ni celle de D^2u. La continuité de u semble être une condition naturelle qui permet de donner un sens à cette deuxième formulation dont il convient de remarquer au passage qu'elle ne semble pas dépendre du caractère dégénéré ou non dégénéré de l'équation.

La preuve du théorème ci-dessus est triviale car elle repose sur des propriétés d'Analyse élémentaire : par exemple, si $x_0 \in \mathcal{O}$ est un point de maximum de $u - \phi$, on a:

$$Du(x_0) = D\phi(x_0) \quad \text{et} \quad D^2u(x_0) \leq D^2\phi(x_0) \ .$$

En combinant ces propriétés avec l'ellipticité de l'équation, on prouve facilement le résultat.

On peut maintenant donner la définition de solution de viscosité dans le cas de solutions continues.

Définition 2.1 : Solution de Viscosité
$u \in C(\mathcal{O})$ *est solution de viscosité de l'équation* (17) **si et seulement si :**

$\forall \phi \in C^2(\mathcal{O})$*, si* $x_0 \in \mathcal{O}$ *est un point de maximum local de* $u - \phi$*, on a :*

$$F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0 \ , \tag{18}$$

et :
$\forall \phi \in C^2(\mathcal{O})$*, si* $x_0 \in \mathcal{O}$ *est un point de minimum local de* $u - \phi$*, on a :*

$$F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \geq 0 \ . \tag{19}$$

Si u ne vérifie que (18) *(resp.*(19)*), on dira que u est une sous-solution de viscosité (resp. une sursolution de viscosité).*

Dorénavant on parlera simplement de sous-solution, de sursolution et de solution étant bien entendu qu'elles seront toujours de viscosité.

La terminologie "solutions de viscosité" provient des équations du premier ordre pour lesquelles la "bonne" solution – qui est une solution de viscosité – est obtenue par la méthode de viscosité évanescente. Le lecteur trouvera une démonstration de cette affirmation dans la section consacrée au résultat de stabilité.

Toujours dans le cas des équations du premier ordre, il est curieux de noter que les solutions de $F = 0$ ne sont pas nécessairement solutions de $-F = 0$: le signe de l'hamiltonien compte! On peut comprendre ce phénomène de la manière heuristique suivante: l'équation $F = 0$ possède plusieurs solutions généralisées et les approximations de cette équation par $-\varepsilon\Delta + F = 0$ (qui conduit à une solution de $F = 0$) et par $\varepsilon\Delta + F = 0$ (qui conduit à une solution de $-F = 0$) sélectionnent, en général, deux solutions différentes.

Remarquons enfin que les équations paraboliques ne sont qu'un cas particulier des équations elliptiques telles que nous les avons définies: on remplace simplement la variable x par la variable (x, t), Du et D^2u désignant alors le gradient et la matrice hessienne de u par rapport à la nouvelle variable (x, t).

Le but de ce cours est bien entendu de montrer comment cette notion de solution résout tous les problèmes présentés dans l'introduction. Pour commencer, nous allons donner un certain nombre de définitions équivalentes qui peuvent être utiles en pratique.

Proposition 2.1 : *On obtient une définition équivalente de sous-solution, de sursolution et de solution de viscosité en remplaçant dans la définition 2.1:*

1. *"$\phi \in C^2(\mathcal{O})$" par "$\phi \in C^k(\mathcal{O})$" ($2 < k < +\infty$) ou par "$\phi \in C^\infty(\mathcal{O})$" dans le cas d'équations du deuxième ordre,*

2. *"$\phi \in C^2(\mathcal{O})$" par "$\phi \in C^1(\mathcal{O})$" dans le cas d'équations du premier ordre,*

3. *"maximum local" ou "minimum local" par "maximum local strict" ou "minimum local strict" ou par "maximum global" ou "minimum global" ou encore par "maximum global strict" ou "minimum global strict".*

Cette proposition permet en pratique de simplifier de nombreuses preuves : on utilise, en particulier, la définition avec des points de "maximum global" ou "minimum global" pour éviter des arguments assez lourds de localisation.

Nous laissons la démonstration de cette proposition en exercice au lecteur: elle repose sur des arguments classiques d'Analyse, le point le plus délicat étant évidemment le passage du local au global.

Remarque 2.1 : *Pour prouver la partie non triviale de l'équivalence dans les points 1. et 2. de la proposition 2.1, le lecteur pourra se ramener au cas où les points de maximum ou de minimum local sont des points de maximum ou de minimum local strict, régulariser la fonction-test et utiliser le lemme 3.1 dont l'énoncé est plus loin dans le texte.*

2.2 Solutions de viscosité et dérivées généralisées

Nous allons donner dans cette section une définition équivalente de la notion de solution de viscosité qui s'appuie sur la notion de sur et sous-différentiels d'ordre 2 d'une fonction continue. L'intérêt de cette définition équivalente est très limité pour les équations du premier ordre mais elle joue au contraire un rôle fondamental pour les équations du deuxième ordre.

Définition 2.2 : Sur et sous-différentiel d'ordre 2 d'une fonction continue
Soit $u \in C(\mathcal{O})$. Le surdifférentiel d'ordre 2 de u au point $x \in \mathcal{O}$ est le sous-ensemble convexe de $I\!R^N \times \mathcal{S}^N$ noté $D^{2,+}u(x)$ qui est constitué des couples (p, M) tels que :

$$u(y) - u(x) - (p, y - x) - \frac{1}{2}M(y - x) \cdot (y - x) \leq o(|y - x|^2) ,$$

pour $y \in \mathcal{O}$ voisin de x.

Le sous-différentiel d'ordre 2 de u au point $x \in \mathcal{O}$ est le sous-ensemble convexe de $I\!R^N \times \mathcal{S}^N$ noté $D^{2,-}u(x)$ qui est constitué des couples (p, M) tels que :

$$u(y) - u(x) - (p, y - x) - \frac{1}{2}M(y - x) \cdot (y - x) \geq o(|y - x|^2) ,$$

pour $y \in \mathcal{O}$ voisin de x.

Ces sous-ensembles peuvent éventuellement être vides, même tous les deux à la fois comme dans le cas de la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}\sin(\frac{1}{x^2})$ prolongée en 0 par 0.

Si u est deux fois différentiable en x alors :

$$D^{2,+}u(x) = \{(Du(x), M);\ M \leq D^2u(x)\} ,$$

$$D^{2,-}u(x) = \{(Du(x), M);\ M \geq D^2u(x)\} ,$$

Passons maintenant aux liens des sur et sous-différentiels d'ordre 2 avec les solutions de viscosité.

Théorème 2.2 :
(i) $u \in C(\mathcal{O})$ est sous-solution de l'équation (17) ssi, pour tout $x \in \mathcal{O}$:

$$\forall (p, M) \in D^{2,+}u(x) , \quad F(x, u(x), p, M) \leq 0 . \tag{20}$$

(ii) $u \in C(\mathcal{O})$ est sursolution de l'équation (17) ssi, pour tout $x \in \mathcal{O}$:

$$\forall (p, M) \in D^{2,-}u(x) , \quad F(x, u(x), p, M) \geq 0 . \tag{21}$$

Avant de donner la démonstration du théorème 2.2, nous commençons par en tirer un certain nombre de conséquences.

Corollaire 2.1 :

(i) Si $u \in C^2(\mathcal{O})$ *vérifie* $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$ *dans* $\mathcal{O}$ *alors* u *est une solution de viscosité de* (17).

(ii) Si $u \in C(\mathcal{O})$ *est une solution de viscosité de* (17) *et si* u *est deux fois différentiable au point* x_0 *alors:*

$$F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) = 0 \; .$$

(iii) Si $u \in C(\mathcal{O})$ *est une solution de viscosité de* (17) *et si* φ *est une fonction de classe* C^2 *sur* $I\!R$ *telle que* $\varphi' > 0$ *sur* $I\!R$ *alors la fonction* v *définie par* $v = \varphi(u)$ *est solution de:*

$$K(x, v, Dv, D^2v) = 0 \quad \textit{dans } \mathcal{O} \; ,$$

où $K(x, z, p, M) = F(x, \psi(z), \psi'(z)p, \psi'(z)M + \psi''(z)p \otimes p)$ *et* $\psi = \varphi^{-1}$.

La preuve de ce corollaire est élémentaire à partir de la nouvelle définition en utilisant les techniques de base de l'analyse classique; nous la laisserons donc en exercice.

Nous avons formulé le corollaire en terme de "solution" mais, bien sûr, on a des résultats analogues en remplaçant le mot "solution" par "sous-solution" ou "sursolution".

De nombreuses variantes sont possibles pour le résultat (iii): tous les changements de fonctions sont autorisés pourvu que l'on préserve les signes dans les inégalités de sur et sous-différentiels ou, si l'on préfère, pourvu que l'on ne transforme pas les minima en maxima ou inversement. Citons, par exemple, les transformations: $v = u + \psi$, ψ de classe C^1 ou $v = \chi u + \psi$, χ, ψ de classe C^1 et $\chi \geq \alpha > 0 \cdots$ etc.

Dans le cas de "renversement de signes", on a la proposition suivante:

Proposition 2.2 : $u \in C(\mathcal{O})$ *est sous-solution (resp. sursolution) de* (17) *ssi* $v = -u$ *est sursolution (resp. sous-solution) de:*

$$-F(x, -v, -Dv, -D^2v) = 0 \quad \textit{dans } \mathcal{O} \; .$$

Dans la **Preuve du théorème 2.2** que la proposition précédente nous peremet de faire seulement dans le cas “sous-solution”, il n'y a que deux arguments ; le premier est élémentaire: si ϕ une fonction-test de classe C^2 et si x_0 un point de maximum local de $u - \phi$ alors on a, en combinant la régularité de ϕ et la propriété de maximum local :

$$\phi(x) = \phi(x_0) + (D\phi(x_0), x - x_0) + \frac{1}{2} D^2\phi(x_0)(x - x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2) \ .$$

En combinant ces deux dernières propriétés, on obtient:

$$u(x) - u(x_0) - (D\phi(x_0), x - x_0) - \frac{1}{2} D^2\phi(x_0)(x - x_0) \cdot (x - x_0) \leq o(|x - x_0|^2) \ ,$$

d'où $(D\phi(x_0), D^2\phi(x_0))$ est dans $D^{2,+}u(x_0)$.

Le second l'est beaucoup moins et fait l'objet du :

Lemme 2.1 : *Si* $(p, M) \in D^{2,+}u(x_0)$*, il existe une fonction* ϕ *de classe* C^2 *telle que* $D\phi(x_0) = p$*,* $D^2\phi(x_0) = M$ *et telle que* $u - \phi$ *a un maximum local en* x_0*.*

Nous terminons cette section en définissant les ensembles $\overline{D}^{2,+}u(x)$ et $\overline{D}^{2,-}u(x)$ qui sont respectivement constitués des couples (p, X) qui sont limites de couples (p_α, X_α) appartenant à $D^{2,+}u(x_\alpha)$ (ou à $D^{2,-}u(x_\alpha)$) pour une suite $x_\alpha \to x$. Comme F est supposé continue, il est clair que, si u est une sous-solution de viscosité de $F = 0$ et si $(p, M) \in \overline{D}^{2,+}u(x)$:

$$F(x, u(x), p, M) \leq 0 \ ;$$

de même :

$$F(x, u(x), p, M) \geq 0 \ ,$$

si u est une sursolution de viscosité de $F = 0$ et si $(p, M) \in \overline{D}^{2,-}u(x)$.

3 Un premier résultat de stabilité

Il n'est pas besoin de rappeler ici que les problèmes de passage à la limite dans des équations elliptiques non-linéaires quand on a seulement une convergence faible des solutions est un des problèmes fondamentaux de l'Analyse non-linéaire.

On appelle résultat de stabilité un résultat qui permet de tels passages à la limite en utilisant la notion de solutions de viscosité.

Nous présentons dans ce cours deux résultats de stabilité qui sont de natures assez différentes : le premier est de facture relativement classique car il requiert la connaissance de propriétés de compacité sur la suite de solutions considérées; il est donc en pratique plus difficile à utiliser car les estimations nécessaires ne sont pas toujours aisées à obtenir. Le second, au contraire, est on ne peut moins classique car il ne réclame que des estimations souvent triviales à démontrer; mais – car on n'a jamais rien sans rien – on doit avoir des propriétés d'unicité assez fortes pour l'équation limite, et c'est là, cette fois, que se situe la difficulté.

Le premier résultat est le :

Théorème 3.1 : *On suppose que, pour $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon \in C(\mathcal{O})$ est une sous-solution (resp. une sursolution) de l'équation :*

$$F_\varepsilon(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon, D^2u_\varepsilon) = 0 \quad \textit{dans } \mathcal{O} \ , \tag{22}$$

où $(F_\varepsilon)_\varepsilon$ est une suite de fonctions continues satisfaisant la condition d'ellipticité. Si $u_\varepsilon \to u$ dans $C(\mathcal{O})$ et si $F_\varepsilon \to F$ dans $C(\mathcal{O} \times I\!R \times I\!R^N \times \mathcal{S}^N)$ alors u est une sous-solution (resp. une sursolution) de l'équation :

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \textit{dans } \mathcal{O} \ .$$

Nous rappelons tout d'abord que la convergence dans les espaces de fonctions continues $C(\mathcal{O})$ ou $C(\mathcal{O} \times I\!R \times I\!R^N \times \mathcal{S}^N)$ est la convergence uniforme sur tout compact.

Ce résultat permet donc de passer à la limite dans une équation avec une non-linéarité sur le gradient (et même sur la dérivée seconde!) en connaissant seulement la convergence localement uniforme de la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, ce qui bien sûr n'implique aucune convergence forte (par exemple presque partout) ni du gradient ni de la matrice hessienne.

Une caractéristique inhabituelle de ce résultat est de considérer séparément la convergence de l'équation – ou plus exactement de l'hamiltonien F_ε – et celle de la solution u_ε : un raisonnement classique conduirait à une question du type "est-ce que la convergence de u_ε est assez forte pour passer à la limite dans l'égalité $F_\varepsilon(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon, D^2u_\varepsilon) = 0$?" ; dans ce cas, la convergence nécessaire sur u_ε dépend fortement de la suite d'équations considérées, c'est-à-dire des propriétés des F_ε. Ici ce n'est pas du tout le cas : les convergences requises pour F_ε et pour u_ε sont fixées a priori.

L'exemple d'application le plus classique de ce résultat est la méthode de viscosité évanescente :

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon + H(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} .$$

Dans ce cas, l'hamiltonien F_ε est donné par :

$$F_\varepsilon(x, u, p, M) = -\varepsilon \mathrm{Tr}(M) + H(x, u, p) ,$$

et sa convergence dans $C(\mathcal{O} \times I\!R \times I\!R^N \times \mathcal{S}^N)$ vers $H(x, u, p)$ est triviale. Si u_ε converge uniformément vers u, alors le théorème 3.1 implique que u est solution de :

$$H(x, u, Du) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} .$$

L'exemple ci-dessus montre que les solutions des équations de Hamilton-Jacobi – et plus généralement des équations elliptiques non linéaires – obtenues par la méthode de viscosité évanescente sont des solutions de viscosité, ce qui justifie la terminologie.

En pratique, on applique plutôt le théorème 3.1 à une sous-suite de $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ qu'à la suite elle-même. Quand on veut passer à la limite dans une équation du type (22), on procède généralement comme suit :

1. On prouve que u_ε est localement borné dans L^∞, uniformément par rapport à $\varepsilon > 0$.

2. On prouve que u_ε est localement borné dans un espace de Hölder $C^{0,\alpha}$ pour un certain $0 \leq \alpha < 1$ ou dans $W^{1,\infty}$, uniformément par rapport à $\varepsilon > 0$.

3. Grâce aux deux premières étapes, on a la compacité de la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $C(K)$ pour tout $K \subset\subset \mathcal{O}$ par le théorème d'Ascoli.

4. On applique le résultat de stabilité à une sous-suite convergente de $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ obtenue par un procédé d'extraction diagonale.

Cette méthode ne sera réellement complète que lorsque nous possèderons un résultat d'unicité : en effet, le raisonnement ci-dessus montre que toute sous-suite convergente de la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers UNE solution de viscosité de l'équation limite. S'il n'existe qu'une seule solution de cette équation alors toute sous-suite convergente de la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers LA solution de viscosité de l'équation limite que l'on note u. Par un argument classique de compacité et de séparation, ceci implique que toute la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers u (exercice!).

Mais, pour avoir l'unicité et justifier ce raisonnement, il faut imposer des conditions aux limites et, accessoirement, savoir aussi passer à la limite dans ces conditions aux limites...

Donnons un exemple d'application de cette méthode :

Exemple : Cet exemple est nécessairement un peu formel : notre but est de montrer un mécanisme type de passage à la limite par solutions de viscosité et non pas de détailler la manière d'obtenir les estimations dont nous avons besoin. Nous allons, en particulier, utiliser le Principe du Maximum dans $I\!\!R^N$ sans démonstration.

Soit, pour $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon \in C^2(I\!\!R^N) \cap W^{1,\infty}(I\!\!R^N)$, l'unique solution de l'équation :

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon + H(Du_\varepsilon) + u_\varepsilon = f(x) \quad \text{dans } I\!\!R^N \ ,$$

où H est une fonction localement lipschitzienne sur $I\!\!R^N$, $H(0) = 0$ et f appartient à $W^{1,\infty}(I\!\!R^N)$. Par le Principe du Maximum, on a :

$$-||f||_\infty \leq u_\varepsilon \leq ||f||_\infty \quad \text{dans } I\!\!R^N \ ,$$

car $-||f||_\infty$ et $||f||_\infty$ sont respectivement sous- et sursolution de l'équation. De plus, si $h \in I\!\!R^N$, comme $u_\varepsilon(. + h)$ est solution d'une équation analogue où $f(.)$ est remplacé par $f(. + h)$ dans le second membre, le Principe du Maximum implique également :

$$||u_\varepsilon(. + h) - u_\varepsilon(.)||_\infty \leq ||f(. + h) - f(.)||_\infty \quad \text{dans } I\!\!R^N \ ,$$

et, comme f est lipschitzien, le second membre est majoré par $C|h|$ où C est la constante de lipschitz de f. Il en résulte que :

$$||u_\varepsilon(. + h) - u_\varepsilon(.)||_\infty \leq C|h| \quad \text{dans } I\!\!R^N \ .$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout h, elle implique que u_ε est lipschitzien de constante de lipschitz C.

D'après le théorème d'Ascoli et le classique argument d'extraction diagonale, on peut extraire de la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une sous-suite encore notée $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ qui converge vers une fonction continue u qui est, par le théorème 3.1, solution de l'équation :

$$H(Du) + u = f(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \ .$$

On vient donc d'effectuer un passage à la limite dans un problème de perturbation singulière : encore une fois, il ne deviendra complet que lorsque nous saurons que u est l'unique solution de cette équation, ce qui impliquera que toute la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers u par un argument classique de séparation.

Nous passons maintenant à la **Preuve du théorème 3.1**. On ne prouve le résultat que dans le cas des sous-solutions, l'autre cas se montre de manière identique.

Soit $\phi \in C^2(\mathcal{O})$ et soit $x_0 \in \mathcal{O}$ un point de maximum local de $u - \phi$. Quitte à retrancher à $u - \phi$ un terme de la forme $\chi(x) = |x - x_0|^4$, on peut toujours supposer que x_0 est un point de maximum local strict. On utilise alors le lemme suivant qui fait l'objet d'un exercice :

Lemme 3.1 : *Soit $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite de fonctions continues sur un ouvert $\mathcal{O}$ qui converge dans $C(\mathcal{O})$ vers v. Si $x_0 \in \mathcal{O}$ est un point de maximum local strict de v, il existe une suite de points de maximum local de v_ε, notée $(x_\varepsilon)_\varepsilon$, qui converge vers x_0.*

On utilise le lemme 3.1 avec $v_\varepsilon = u_\varepsilon - (\phi + \chi)$ et $v = u - (\phi + \chi)$. Comme u_ε est une sous-solution de (22) et comme x_ε est un point de maximum de $u_\varepsilon - (\phi + \chi)$, on a, par définition :

$$F_\varepsilon\Big(x_\varepsilon, u_\varepsilon(x_\varepsilon), D\phi(x_\varepsilon) + D\chi(x_\varepsilon), D^2\phi(x_\varepsilon) + D^2\chi(x_\varepsilon)\Big) \leq 0 \ .$$

Il suffit alors de passer la limite dans cette inégalité : comme $x_\varepsilon \to x_0$, on utilise la régularité des fonctions-test ϕ et χ qui implique :

$$D\phi(x_\varepsilon) + D\chi(x_\varepsilon) \to D\phi(x_0) + D\chi(x_0) = D\phi(x_0) \ ,$$

et :

$$D^2\phi(x_\varepsilon) + D^2\chi(x_\varepsilon) \to D^2\phi(x_0) + D^2\chi(x_0) = D^2\phi(x_0) \ .$$

De plus, grâce à la convergence localement uniforme de u_ε, on a :

$$u_\varepsilon(x_\varepsilon) \to u(x_0) \ ,$$

et celle de F_ε donne finalement :

$$F_\varepsilon\Big(x_\varepsilon, u_\varepsilon(x_\varepsilon), D\phi(x_\varepsilon) + D\chi(x_\varepsilon), D^2\phi(x_\varepsilon) + D^2\chi(x_\varepsilon)\Big)$$
$$\to F\Big(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)\Big) \ .$$

On a donc :

$$F\Big(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)\Big) \leq 0 \ .$$

Ce qui termine la démonstration.

4 Solutions de viscosité continues et unicité

4.1 Introduction

Comme pour les résultats de stabilité – ou peut-être même devrais-je dire à cause de ces résultats –, on distingue deux types de résultats d'unicité : ceux qui ne sont valables que pour des solutions *continues* et ceux, plus généraux mais souvent plus délicats à obtenir, qui s'appliquent à des solutions présentant des *discontinuités* et que l'on appelle *résultats d'unicité forte*.

La différence essentielle vient du fait que les premiers permettent d'obtenir l'unicité de solutions continues et d'utiliser de manière optimale le Théorème 3.1 alors que les seconds donnent l'unicité dans un cadre plus large, ils permettent d'obtenir l'existence de solutions continues (cf. Méthode de Perron décrite dans H. Ishii[21]) et surtout ils constituent un argument-clé dans la méthode des semi-limites relaxées, c'est-à-dire dans l'utilisation du résultat de stabilité discontinue.

Encore une fois la terminologie "unicité" n'est pas très heureuse car ces résultats sont quasiment TOUJOURS des résultats du type principe du maximum et l'unicité n'est qu'un sous-produit parmi tant autres. En fait, ces résultats disent qu'une sous-solution est plus petite qu'une sursolution, ce qui recouvre bien entendu des réalités différentes suivant que l'on sache ou que l'on ne sache pas *a priori* si une telle inégalité a lieu sur le bord ou pas (cf. par exemple les conditions aux limites de Neumann). Nous verrons à propos des conditions aux limites au sens de viscosité qu'en pratique ces différences sont néanmoins largement estompées.

Nous présentons dans ce chapitre des résultats de base pour des solutions continues et d'un type classique i.e.

Si $u, v \in C(\overline{\mathcal{O}})$ sont respectivement sous-solution et sursolution de l'équation (8) et si $u \leq v$ sur $\partial\mathcal{O}$ alors :

$$u \leq v \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \ .$$

en commenant par le cas plus simple des équations du premier ordre. Les résultats d'unicité forte sont énoncés dans la Section 7.

4.2 Résultats d'unicité pour les équations du premier ordre

On considère l'équation du premier ordre :

$$H(x, u, Du) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \ , \tag{23}$$

où $\mathcal{O}$ est un ouvert *borné* et H est une fonction continue sur $\mathcal{O} \times I\!R \times I\!R^N$.

Pour formuler le premier résultat d'unicité, on utilise les hypothèses suivantes :

(H1) $$H(x, u, p) - H(x, v, p) \geq \gamma_R(u - v) \ , \qquad (\gamma_R > 0)$$

pour tout $x \in \mathcal{O}$, $-R \leq v \leq u \leq R$ et $p \in I\!R^N$ $(\forall\, 0 < R < +\infty)$.

(H2) $$|H(x, u, p) - H(y, u, p)| \leq m_R(|x - y|(1 + |p|)) \ ,$$

où $m_R(t) \to 0$ quand $t \to 0$, pour tout $x, y \in \mathcal{O}$, $-R \leq u \leq R$ et $p \in I\!R^N$ $(\forall\, 0 < R < +\infty)$.

Le résultat est le suivant :

Théorème 4.1 : *Sous les hypothèses* (H1)-(H2)*, on a un résultat d'unicité pour* (23)*. De plus, le résultat reste vrai si on remplace l'hypothèse* (H2) *par "$u \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$" ou par "$v \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$".*

Le Principe du Maximum, classique pour les équations elliptiques non linéaires du deuxième ordre, s'étend donc aux solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre.

L'hypothèse (H1) est naturelle dans ce type de résultat : dans le cas du deuxième ordre, c'est une hypothèse standard qui permet d'éviter, en particulier, la non-unicité provenant de l'existence de valeurs propres. Dans le cas du premier ordre, elle exclut toute application du théorème 4.1 à des équations du type lois de conservation qui ne rentrent pas du tout dans le cadre de la théorie que nous présentons.

L'hypothèse (H2) est moins classique. Nous remarquons tout d'abord que, si H est une fonction lipschitzienne en x pour tout $u \in I\!R$ et pour tout $p \in I\!R^N$, (H2) est satisfaite si :

$$|\frac{\partial H}{\partial x}(x,u,p)| \leq C_R(1+|p|) \ ,$$

où $C_R > 0$, pour tout $x \in \mathcal{O}$, $-R \leq u \leq R$ et $p \in I\!R^N$ $(\forall\, 0 < R < +\infty)$. Cette version de (H2) est sans doute plus parlante.

Pour justifier (H2), considérons le cas de l'équation de transport

$$-b(x).Du + \gamma u = f(x) \quad \text{dans } \mathcal{O} \ . \tag{24}$$

Il est clair que l'hypothèse (H1) est satisfaite si $\gamma > 0$. Quant à (H2), il faut, d'une part, que b soit un champ de vecteurs lipschitzien sur $\mathcal{O}$ et, d'autre part, que la fonction f soit uniformément continue sur $\mathcal{O}$.

Dans cet exemple, l'hypothèse de lipschitz sur b est la plus restrictive et la plus importante pour avoir (H2) : nous verrons dans la preuve du théorème 4.1 le rôle central du terme $|x-y|.|p|$ dans (H2) qui provient justement de cette hypothèse. Or il est bien connu que les propriétés de l'équation (24) sont liées à celles du système dynamique

$$\dot{x}(t) = b(x(t)) \ . \tag{25}$$

En effet, on peut théoriquement calculer les solutions de (24) en résolvant cette équation différentielle ordinaire : il s'agit de la *méthode des caractéristiques*. L'hypothèse de lipschitz sur b, qui est naturelle pour avoir existence et surtout unicité pour (25), apparaît donc comme naturelle pour avoir unicité pour (24) – bien qu'à ma connaissance aucun contre-exemple à l'unicité n'existe si b n'est pas lipschitzien –.

Remarque 4.1 : *Dans le théorème* 4.1*, aucune hypothèse n'est faite sur le comportement de H en p (si on excepte les restrictions provenant de* (H2)*). Par exemple, on a un résultat d'unicité pour l'équation*

$$H(Du) + \gamma u = f(x) \quad \textit{dans } \mathcal{O} \; ,$$

si $\gamma > 0$ et si f est uniformément continue sur $\mathcal{O}$, pour toute fonction continue H.

Le théorème 4.1 comporte de nombreuses variantes en jouant sur (H2) et la régularité des solutions comme l'énoncé du Théorème 4.1 le laisse présager.

Un corollaire classique et très utile du théorème 4.1 est le :

Corollaire 4.1 : *Sous les hypothèses du théorème* 4.1*, si $u, v \in C(\overline{\mathcal{O}})$ sont respectivement sous et sursolutions de* (23) *alors :*

$$\max_{\overline{\mathcal{O}}} (u-v)^+ \leq \max_{\partial\mathcal{O}} (u-v)^+ \; .$$

De plus, le résultat reste vrai si on remplace (H2) *par "$u \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$" ou par "$v \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$".*

La preuve du Corollaire est immédiate en remarquant simplement que si on pose $C = \max\limits_{\partial\mathcal{O}} (u-v)^+$, $v + C$ est encore une sursolution de (23) grâce à (H1) et $u \leq v + C$ sur $\partial\mathcal{O}$. Le théorème 4.1 implique alors $u \leq v + C$ sur $\overline{\mathcal{O}}$, ce qui est le résultat désiré.

Remarque 4.2 : *Comme le montre la preuve ci-dessus, ce type de corollaires est une conséquence immédiate de tout résultat d'unicité dès que H est croissant (au sens large) par rapport à u. Il doivent être vus comme accompagnant de manière automatique chaque résultat d'unicité.*

Passons maintenant à la

Preuve du théorème 4.1 : Si $R = \mathrm{Max}(||u||_\infty, ||v||_\infty)$, on pose $\gamma = \gamma_R$ où γ_R est donné par (H1) et $m = m_R$ où m_R est donné par (H2).

Le but de la preuve est de montrer que $M = \max\limits_{\overline{\mathcal{O}}} (u-v)$ est négatif. Supposons, par l'absurde, que $M > 0$: comme $u \leq v$ sur $\partial\mathcal{O}$, le maximum ne peut être atteint sur le bord.

Comme u et v ne sont pas régulières, on a besoin d'un argument nous permettant de nous ramener à la définition : cet argument est le "dédoublement de variables". On introduit la "fonction-test" :

$$\psi_\varepsilon(x,y) = u(x) - v(y) - \frac{|x-y|^2}{\varepsilon^2}\ .$$

A cause du terme de "pénalisation" $\dfrac{|x-y|^2}{\varepsilon^2}$ qui impose aux points de maximum (x,y) de ψ_ε de vérifier $x \sim y$ si ε est petit, on peut penser que le maximum de ψ_ε, noté M_ε , ressemble au maximum de $u - v$.

Cette idée est justifiée par le :

Lemme 4.1 : *Les propriétés suivantes ont lieu :*

1. $M_\varepsilon \to M$ *quand* $\varepsilon \to 0$.
2. *Si* $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ *est un point de maximum de* ψ_ε*, on a :*

$$\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \to 0 \quad \text{quand } \varepsilon \to 0\ ,$$

$$u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \to M \quad \text{quand } \varepsilon \to 0\ .$$

3. x_ε , $y_\varepsilon \in \mathcal{O}$ *si* ε *est suffisamment petit.*

Nous n'avons énoncé dans ce lemme que les propriétés dont nous aurons besoin pour conclure et qui resteront vraies dans le cas de solutions bornées discontinues.

Terminons la preuve du théorème en utilisant le lemme. On se place dans le cas où ε est suffisamment petit pour que le point 3. du lemme ait lieu. Comme $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ est un point de maximum de ψ_ε, x_ε est un point de maximum de la fonction :

$$x \mapsto u(x) - \varphi^1_\varepsilon(x)\ ,$$

où :

$$\varphi^1_\varepsilon(x) = v(y_\varepsilon) + \frac{|x-y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\ ;$$

or u est sous-solution de viscosité de (23) et $x_\varepsilon \in \mathcal{O}$, donc :

$$H\left(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), D\varphi^1_\varepsilon(x_\varepsilon)\right) = H\left(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), \frac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right) \leq 0\ .$$

De même, y_ε est un point de maximum de la fonction :

$$y \mapsto -v(y) + \varphi^2_\varepsilon(y) \ ,$$

où :

$$\varphi^2_\varepsilon(x) = u(x_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y|^2}{\varepsilon^2} \ ;$$

donc y_ε est un point de minimum de la fonction $v - \varphi^2_\varepsilon$; or v est sursolution de viscosité de (23) et $y_\varepsilon \in \mathcal{O}$, donc :

$$H\left(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon), D\varphi^2_\varepsilon(y_\varepsilon)\right) = H\left(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon), \frac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right) \geq 0 \ .$$

On soustrait alors les deux inégalités de viscosité obtenues :

$$H\left(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), \frac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right) - H\left(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon), \frac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right) \leq 0 \ .$$

On peut remarquer qu'une preuve formelle où l'on supposerait que u et v sont de classe C^1 et où l'on pourrait directement considérer un point de maximum de $u - v$ nous conduirait à une situation tout à fait analogue, le terme $p_\varepsilon = \dfrac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}$ jouant ici le rôle de "$Du = Dv$" au point de maximum : notons que le fait de conserver cette égalité est une propriété essentielle dans la preuve.

La seule différence – d'importance! – est celle du point courant : x_ε pour u, y_ε pour v. On fait apparaître dans l'inégalité ci-dessus le terme $H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon), p_\varepsilon)$ en l'ajoutant et en le retranchant; l'inégalité se réécrit alors :

$$H(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), p_\varepsilon) - H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon), p_\varepsilon) \leq H(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon), p_\varepsilon) - H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon), p_\varepsilon) \ .$$

Il reste à appliquer (H1) au membre de gauche et (H2) à celui de droite :

$$\gamma(u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)) \leq m(|x_\varepsilon - y_\varepsilon|(1 + |p_\varepsilon|)) \ .$$

Et donc :

$$\gamma M_\varepsilon \leq m\left(|x_\varepsilon - y_\varepsilon| + \frac{2|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\right) - \gamma\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \ .$$

On fait tendre alors ε vers 0 en utilisant le lemme, ce qui conduit à :

$$\gamma M \leq 0 \ ,$$

une contradiction, ce qui termine la preuve.

Nous prouvons maintenant le Lemme 4.1. Comme $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ est un point de maximum de ψ_ε, on a, pour tout $x, y \in \overline{\mathcal{O}}$:

$$u(x) - v(y) - \frac{|x-y|^2}{\varepsilon^2} \leq u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} = M_\varepsilon \ .$$

On choisit $x = y$ dans le premier membre :

$$u(x) - v(x) \leq M_\varepsilon \ , \quad \forall\, x \in \overline{\mathcal{O}} \ ,$$

et donc en passant au maximum sur x, on obtient l'inégalité $M \leq M_\varepsilon$.

Comme u, v sont bornés, on a aussi en procédant de manière analogue :

$$M \leq u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \leq 2R - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \ .$$

En se rappelant que l'on a supposé $M > 0$, on en déduit :

$$\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \leq 2R \ .$$

On introduit alors m_v un module de continuité de v dont on rappelle qu'il peut être défini par :

$$m_v(t) = \sup_{|x-y| \leq t} |v(x) - v(y)| \ .$$

Comme v est continu et donc uniformément continu sur $\overline{\mathcal{O}}$ qui est compact, $m_v(t) \to 0$ quand $t \to 0$. On utilise ce module de continuité de la manière suivante :

$$\begin{aligned} M \leq M_\varepsilon = u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \quad &\leq \quad u(x_\varepsilon) - v(x_\varepsilon) + m_v(|x_\varepsilon - y_\varepsilon|) \\ &\leq \quad M + m_v(|x_\varepsilon - y_\varepsilon|) \ , \end{aligned}$$

les deux dernières inégalités étant obtenues grâce à la positivité du terme de pénalisation et grâce au fait que $M = \max_{\overline{\mathcal{O}}} (u - v)$.

De l'estimation du terme de pénalisation qui équivaut à :

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \leq \sqrt{2R}\,\varepsilon \ ,$$

et de la croissance de m_v, on déduit :

$$M \leq M_\varepsilon \leq M + m_v(\sqrt{2R}\,\varepsilon) \ .$$

Le premier point du lemme est ainsi prouvé.

Alors, l'inégalité :

$$M_\varepsilon = u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \leq u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \leq M + m_v(\sqrt{2R}\,\varepsilon)\,,$$

montre en premier lieu que $u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)$ tend vers M car M_ε et $M + m_v(\sqrt{2R}\,\varepsilon)$ tendent vers M. Comme $M_\varepsilon = u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \dfrac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}$ et $u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)$ tendent vers M, forcément $\dfrac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}$ doit tendre vers 0.

Enfin, supposons, par exemple, que x_ε appartient à $\partial\mathcal{O}$, on aurait alors

$$u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \leq u(x_\varepsilon) - v(x_\varepsilon) + m_v(|x_\varepsilon - y_\varepsilon|) \leq m_v(\sqrt{2R}\,\varepsilon) \ ,$$

car $u \leq v$ sur $\partial\mathcal{O}$. Comme $u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)$ converge vers $M > 0$, on a une contradiction pour ε suffisamment petit. Et on raisonne de manière analogue pour le cas $y_\varepsilon \in \partial\mathcal{O}$. Ce qui termine la preuve du lemme.

Exercice :

1. *Montrer que l'on a l'estimation plus précise du terme de pénalisation :*

$$\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \leq m_v(|x_\varepsilon - y_\varepsilon|) \ .$$

2. *En déduire l'hypothèse "naturelle" que l'on doit utiliser à la place de* (H2) *pour avoir un résultat d'unicité dans* $C^{0,\alpha}(\mathcal{O})$.

Nous terminons par la preuve de la deuxième partie du théorème. On va détailler la preuve dans le cas où $u \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$, l'autre cas se traite de façon analogue. Cette preuve consiste à montrer que l'on a :

$$|p_\varepsilon| \leq ||Du||_\infty \, .$$

Si ce résultat est acquis, on conclut facilement car la convergence vers 0 du terme $H(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon), p_\varepsilon) - H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon), p_\varepsilon)$ est une conséquence immédiate de l'uniforme continuité de H sur tout compact.

Montrons maintenant que cette estimation de $|p_\varepsilon|$ est vraie. Elle résulte du lemme suivant :

Lemme 4.2 : *Si u est une fonction lipschitzienne sur un ouvert Ω alors, quel que soit $x \in \Omega$, tout élément de $D^+u(x)$ et de $D^-u(x)$ a une norme plus petite que la constante de lipschitz de u.*

La preuve de ce lemme est laissée en exercice car elle ne présente aucune difficulté.

Pour l'appliquer à notre problème, on considère une boule B de centre x_ε, incluse dans $\mathcal{O}$. Sur B qui est convexe, la fonction u est lipschitzienne de constante de lipschitz $||Du||_\infty$ (il est à noter que ce n'est pas forcément le cas sur $\mathcal{O}$). Si u est de classe C^1, cette propriété n'est rien d'autre que le théorème des accroissements finis. Si u est seulement $W^{1,\infty}$, c'est un exercice de régularisation!!! On applique alors le lemme en remarquant que $p_\varepsilon \in D^+u(x_\varepsilon)$, ce qui découle de la preuve du théorème 2.2. La preuve du théorème 4.1 est alors complète.

Les arguments présentés dans les démonstrations ci-dessus sont fondamentaux : dans **TOUS** les résultats d'unicité, ils apparaissent de la même façon.

1. "Dédoublement des variables" : c'est un argument inévitable pour pouvoir utiliser que u et v sont respectivement sous et sursolution de viscosité; bien entendu, le terme "simple" de pénalisation $\dfrac{|x-y|^2}{\varepsilon^2}$ peut (et même doit) être remplacé par un terme plus adapté $\varphi_\varepsilon(x,y)$ dès que l'on veut prendre en compte des difficultés supplémentaires (domaines non bornés, autres types de conditions aux limites ...etc)

2. Convergence du maximum pénalisé vers le maximum de $u-v$: ce n'est généralement un obstacle que dans le cas de solutions discontinues.

3. Estimation sur $|D\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon)|$: c'est un point essentiel car il est relié à (H2). En effet, dans la preuve ci-dessus, la clé de voûte est la convergence vers 0 du terme $|x_\varepsilon - y_\varepsilon|.|D\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon)|$.

Ajoutons à cette mini-recette que l'on peut introduire d'autres paramètres en plus du paramètre de pénalisation ε : nous renvoyons, par exemple à [3] où, dans le cas d'ouverts non bornés, on utilise un paramètre de pénalisation de l'infini pour assurer l'existence de points de maximum dans ce domaine non compact. Il faut néanmoins être prudent quant à l'introduction d'autres paramètres : les points 2. et 3. peuvent alors générer de vraies difficultés voire être faux.

Remarque 4.3 : *Hélas! il existe un nombre important de variantes du Théorème 4.1 pour lesquelles nous renvoyons le lecteur à [3] : cas où H ne dépend pas de u (ou (H1) avec $\gamma_R \equiv 0$), variantes sur la régularité des solutions, sur l'hypothèse (H2), problèmes d'évolution...etc*

4.3 Résultats d'unicité pour les équations du deuxième ordre

La preuve d'unicité décrite dans la section précédente est tout à fait élémentaire. Malheureusement cela ne sera plus le cas pour les équations du deuxième ordre et ceci pour une raison très simple : supposons que l'on répète formellement les mêmes arguments que ci-dessus en introduisant d'abord la fonction :

$$\psi_\varepsilon(x,y) = u(x) - v(y) - \frac{|x-y|^2}{\varepsilon^2} \ ,$$

puis en considérant cette fonction comme une fonction de x seulement puis comme une fonction de y seulement; on est alors conduit formellement aux inégalités :

$$D^2u(x_\varepsilon) \leq \frac{2}{\varepsilon^2} Id \quad \text{et} \quad -\frac{2}{\varepsilon^2} Id \leq D^2v(y_\varepsilon) \ ,$$

et on a perdu l'inégalité $D^2u \leq D^2v$ au point de maximum.

Il est donc nécessaire de trouver un moyen pour récupérer cette inégalité naturelle. La solution est a priori simple : il “suffit” de considérer la fonction ψ_ε par rapport au couple de variables (x, y); on obtient formellement l'inégalité :

$$\begin{pmatrix} D^2u(x_\varepsilon) & 0 \\ 0 & -D^2v(y_\varepsilon) \end{pmatrix} \leq \frac{2}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} Id & -Id \\ -Id & Id \end{pmatrix} ,$$

ou, de manière équivalente :

$$(D^2u(x_\varepsilon)p, p) - (D^2v(y_\varepsilon)q, q) \leq \frac{2}{\varepsilon^2}|p - q|^2 ,$$

pour tous $p, q \in I\!R^n$ ce qui redonne :

$$D^2u(x_\varepsilon) \leq D^2v(y_\varepsilon) ,$$

en faisant $p = q$!

Evidemment, quand u et v sont seulement des fonctions continues, il convient de traduire précisément l'idée présentée ci-dessus; c'est l'objet du :

Lemme 4.3 : *Soient $u, v \in C(\overline{\mathcal{O}})$ et soit $\phi \in C^2(\overline{\mathcal{O}} \times \overline{\mathcal{O}})$. On suppose que $(\hat{x}, \hat{y}) \in \overline{\mathcal{O}} \times \overline{\mathcal{O}}$ est un point de maximum local de la fonction $(x, y) \mapsto u(x) - v(y) - \phi(x, y)$ sur $\overline{\mathcal{O}} \times \overline{\mathcal{O}}$. On pose $p_x = D_x\phi(\hat{x}, \hat{y})$, $p_y = -D_y\phi(\hat{x}, \hat{y})$ et $A = D^2\phi(\hat{x}, \hat{y})$. Pour tout $\alpha > 0$ tel que $\alpha A < Id$, il existe des matrices X, Y telles que $(p_x, X) \in \overline{D}^{2,+}u(\hat{x})$, $(p_y, Y) \in \overline{D}^{2,-}v(\hat{y})$ et telles que :*

$$-\frac{1}{\alpha}Id \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq (Id - \alpha A)^{-1}A . \qquad (26)$$

Grâce à ce lemme, on se retrouve (presque) dans une situation de solutions classiques, p_x, p_y, X, Y jouant respectivement le rôle de $Du(\hat{x})$, $Dv(\hat{y})$, $D^2u(\hat{x})$, $D^2v(\hat{y})$; en effet, si on pouvait prendre $\alpha = 0$, la deuxième inégalité de (26) serait exactement l'inégalité que l'on a obtenu ci-dessus en supposant que u et v étaient régulières.

Dans notre cas, il est clair que l'on doit appliquer ce lemme avec

$$\phi(x, y) = \frac{|x - y|^2}{\varepsilon^2} , \qquad (27)$$

ce qui donne, pour $\alpha < \dfrac{\varepsilon^2}{4}$, l'inégalité :

$$-\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq -\frac{2}{\varepsilon^2 - 4\alpha}\begin{pmatrix} Id & -Id \\ -Id & Id \end{pmatrix} . \tag{28}$$

La preuve du Lemme 4.3 est délicate car elle nécessite l'utilisation du principe du maximum d'Alexandrov (cf. les lemmes 1 et 2 de l'Appendice) et l'introduction de quelques idées supplémentaires. Nous esquisserons cette preuve dans le cas où ϕ est donné par (27) dans l'Appendice.

On déduit de ce Lemme le résultat d'unicité suivant pour l'équation (17).

Théorème 4.2 : *On suppose que F satisfait :*

(H1)' $\quad F(x,u,p,M) - F(x,v,p,M) \geq \gamma_R(u-v)$, $\qquad (\gamma_R > 0)$
pour tout $x \in \mathcal{O}$, $-R \leq v \leq u \leq R$, $p \in I\!R^N$ et $M \in \mathcal{S}^N$ ($\forall\, R < +\infty$),

et :

Pour tout $R > 0$, il existe une fonction $m_R : I\!R^+ \to I\!R$ telle que $m_R(t) \to 0$ quand $t \to 0$ et telle que :

(H2)' $\quad F(y,u,p,Y) - F(x,u,p,X) \leq m_R\left(|x-y| + \dfrac{|x-y|^2}{\varepsilon^2}\right)$

pour tout $x, y \in \mathcal{O}$, $|u| \leq R$, $p = \dfrac{2(x-y)}{\varepsilon^2}$ et $X, Y \in \mathcal{S}^N$ satisfaisant les inégalités (28) avec $\alpha = \dfrac{\varepsilon^2}{8}$. Alors on a un résultat d'unicité pour l'équation (8).

La preuve du Théorème 4.2 est très simple à partir du Lemme 4.3 qui en constitue la véritable difficulté.

La vraie question qui se pose concerne l'hypothèse (H2)' : comment vérifier cette hypothèse ? Ce qui revient à se demander comment utiliser (28)..., question non encore résolue de manière satisfaisante car, d'une part, cette inégalité est clairement assez subtile et, d'autre part, a dépend des cas...

Exemple 1 : Equations du premier ordre.

Dans ce cas, (H2)' se réduit essentiellement à (H2) mais, par exemple pour les termes linéaires du type $-b(x)\cdot p$, (H2) revient à dire que b est lipschitzien alors que (H2)' permet d'avoir $b = b_1 + b_2$ où b_1 est une fonction lipschitzienne et b_2 une fonction continue qui satisfait la propriété de monotonie :

$$(b_2(x) - b_2(y)) \cdot (x - y) \leq 0 \ ,$$

pour tous x et y. Typiquement, b_2 peut être le gradient d'une fonction concave C^1.

Exemple 2 : Equations semilinéaire.

$$F(x, u, p, M) = -\mathrm{Tr}\,[a(x)M] + \cdots$$

C'est le terme d'ordre 2 qui pose problème. On suppose que $a = \sigma\sigma^T$ où σ est une matrice $N \times p$ ($p \in \mathbb{N}$). Cette hypothèse est justifiée dans l'introduction grâce aux liens avec les équations différentielles stochastiques.

On rappelle tout d'abord que, si Q est une matrice $p \times p$, on a :

$$\mathrm{Tr}[Q] = \sum_{i=1}^{p} (Qe_i, e_i)$$

si $(e_i)_i$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$.

On réécrit ensuite l'inégalité matricielle sous la forme :

$$(Xr, r) - (Ys, s) \leq \frac{6}{\varepsilon^2}|r - s|^2$$

pour tout $r, s \in \mathbb{R}^N$ et on choisit successivement :

$$r = \sigma(x)e_i \quad , \quad s = \sigma(y)e_i$$

où $(e_i)_i$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$. On obtient alors, grâce à la propriété rappelée plus haut :

$$\mathrm{Tr}\,[a(x)X] - \mathrm{Tr}\,[a(y)Y] \leq \frac{4}{\varepsilon^2}\mathrm{Tr}\left[(\sigma(x) - \sigma(y))(\sigma(x) - \sigma(y))^T\right] \ .$$

L'hypothèse (H2)' est donc satisfaite dès que la matrice σ est une fonction lipschitzienne de x.

Exemple 3 : Equations quasilinéaires.

$$F(x, u, p, M) = -\mathrm{Tr}\,[a(p)M] + \cdots$$

où a est une fonction continue telle que :

$$a(p)\xi \cdot \xi \geq 0 \quad \forall \xi \in I\!R^N \ ,$$

pour tout $p \in I\!R^N$ pour avoir la condition d'ellipticité.

Dans ce cas, on voit facilement que cela marche toujours car on peut 1) supposer que $a(p)$ est symétrique car on ne change pas la trace si on change $a(p)$ en $\tilde{a}(p) = \dfrac{a(p) + a^T(p)}{2}$ et 2) comme $\tilde{a}$ est positive grâce à la condition d'ellipticité, on peut considérer $\tilde{a}^{1/2}$ et argumenter comme dans l'exemple 2 en choisissant successivement

$$r = s = \tilde{a}^{1/2}(p)e_i \quad (1 \leq i \leq N) \ .$$

En résumé : Equations quasilinéaires générales.

L'équation :

$$-\mathrm{Tr}\left(A(x, Du)D^2u\right) + H(x, u, Du) = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{O} \ ,$$

satisfait le principe du maximum (sous la forme classique décrite ci-dessus) si :

(i) La matrice $A(x,p)$ satisfait :

$$\frac{A(x,p) + A^T(x,p)}{2} = \sigma(x,p)\sigma^T(x,p) \ ,$$

pour tout $x \in \mathcal{O}$ et tout $p \in I\!R^N$, où σ est une fonction continue qui est lipschitzienne en x, uniformément par rapport à p.

(ii) La non-linéarité H satisfait (H1) et (H2).

Les premiers résultats d'unicité pour les équations du deuxième ordre (et donc les idées de base pour les obtenir) sont dues à R. Jensen[25, 26]. Outre les références incontournables mentionnées dans l'introduction, nous renvoyons également le lecteur à M.G. Crandall et H. Ishii[13], H. Ishii[22] et H. Ishii et P.L. Lions[24].

4.4 Quelques généralisations

1. Équations sans croissance stricte de l'hamiltonien par rapport à u.

Il s'agit d'équations pour lesquelles (H1) est satisfaite avec $\gamma_R \equiv 0$, typiquement celles où u n'intervient pas explicitement.

La stratégie standard consiste, par exemple, à construire une suite $(u_\delta)_\delta$ de fonctions continues sur $\overline{\mathcal{O}}$ telles que :

1. $u_\delta \leq v$ sur $\partial\mathcal{O}$,

2. Pour δ suffisamment petit, u_δ satisfait :

$$F(x, u_\delta, Du_\delta, D^2u_\delta) \leq -\eta(\delta) \quad \text{dans } \mathcal{O} \ ,$$

au sens de viscosité, pour un certain $\eta(\delta) > 0$,

3. $u_\delta \to u$ dans $C(\overline{\mathcal{O}})$ quand $\delta \to 0$.

En effet, si une telle suite existe, en examinant la preuve d'unicité, on voit facilement que l'inégalité de viscosité stricte satisfaite par u_δ suffit à obtenir la contradiction désirée et par conséquent, on sait comparer u_δ et v puisque l'on a la bonne inégalité sur le bord.

On a donc :

$$u_\delta \leq v \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \ ,$$

et on conclut en faisant tendre δ vers 0.

Une situation typique où une telle suite $(u_\delta)_\delta$ peut être aisément construite est celle où F est *convexe* en (u, p, M) et où il existe une sous-solution stricte régulière i.e. $\psi \in C^2(\mathcal{O}) \cap C(\overline{\mathcal{O}})$ telle que :

$$F(x, \psi, D\psi, D^2\psi) \leq -\eta < 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \ .$$

En effet, on pose $u_\delta = (1-\delta)u + \delta(\psi - K)$: si $K > ||(\psi - v)^+||_\infty$, la propriété 1. a lieu et les autres se vérifient aisément grâce, en particulier, à la propriété de convexité de F.

2. Équations uniformément elliptiques.

Pour les équations uniformément elliptiques qui satisfont des “propriétés de croissance naturelles”, H. Ishii et P.L Lions[24] ont montré grâce à une étape préliminaire de la preuve que l'on a :

$$u(x) - v(y) \leq K|x - y| \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \times \overline{\mathcal{O}} \ ,$$

cette inégalité reflétant l'existence pour une telle équation d'une solution lipschitzienne, localement ou globalement (voir [19]).

Cette propriété permet une meilleure estimation du terme de pénalisation car on peut démontrer que $p_\varepsilon = \dfrac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}$ est borné indépendamment de ε. On obtient ainsi des résultats sous une hypothèse plus faible que (H2)' sur l'équation car on se retrouve dans une situation analogue à celle de la preuve du Théorème 4.1 quand on suppose que “$u \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$ ou $v \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$”. Nous renvoyons à [24] pour les détails.

3. Équations posées dans des domaines non bornés.

Les résultats ci-dessus s'étendent au cas de solutions *uniformément continues* à condition de supposer que F est uniformément continu par rapport à toutes les variables dès que u, p et M sont bornés (voir [14]).

4. Équations d'évolution.

Les conditions sont essentiellement les mêmes hormis le fait que dans (H1) γ_R peut être négatif (mais on dispose pour contrer cette difficulté des changements de fonctions du type $u \to e^{\gamma t}u$) et le fait que (H2) ne doit être satisfait que pour la variable x car la continuité de F en t est en général suffisante.

L'inégalité $u \leq v$ sur le bord doit être bien entendu comprise comme étant satisfaite sur le bord parabolique $\mathcal{O} \times \{0\} \cup \partial\mathcal{O} \times [0, T]$.

Enfin, l'équation qui a priori n'est satisfaite au sens de viscosité que dans $\mathcal{O} \times (0, T)$, s'étend en fait jusqu'en T i.e. si le point de maximum local (ou de minimum local) est de la forme (x, T) avec $x \in \mathcal{O}$ alors l'inégalité de viscosité a également lieu.

Ces quelques modifications et le Théorème 8.3 du User's guide [14] (qui remplace dans ce cas le Lemme 4.3) permettent d'étendre assez aisément la preuve.

5 Solutions de viscosité discontinues : présentation et définition

On s'intéresse à des équations qui de manière peu habituelle sont posées sur des fermés; plus précisément, des équations du type :

$$G(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \tag{29}$$

où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $I\!R^N$; la fonction G n'est plus supposée continue mais seulement localement bornée sur $\overline{\mathcal{O}} \times I\!R \times I\!R^n \times \mathcal{S}^N$. Par contre, on suppose toujours que G satisfait la condition d'ellipticité.

La première justification de ce choix concerne la prise en compte des conditions aux limites. Par exemple, pour le problème de Dirichlet :

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \ ,$$

$$u = \varphi \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \ ,$$

on définit la fonction G par :

$$G(x, u, p, M) = \begin{cases} F(x, u, p, M) & \text{si } x \in \mathcal{O} \ , \\ u - \varphi & \text{si } x \in \partial\mathcal{O} \ . \end{cases}$$

On considère donc la condition aux limites comme une simple partie de l'équation. Il est clair sur cet exemple que G est une fonction discontinue.

Plus généralement, pour une condition aux limites quelconque :

$$L(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \ ,$$

on a:

$$G(x, u, p, M) = \begin{cases} F(x, u, p, M) & \text{si } x \in \mathcal{O} \ , \\ L(x, u, p, M) & \text{si } x \in \partial\mathcal{O} \ . \end{cases}$$

Evidemment cette convention est pour l'instant stérile mais elle sera justifiée par le résultat de stabilité discontinue présenté plus loin. Avant cela nous devons étendre la notion de solutions de viscosité à des équations avec des non-linéarités discontinues mais aussi pour des solutions discontinues.

Pour ce faire, nous utiliserons les notations suivantes : si C est une partie de $I\!R^d$ et si $z : C \to I\!R$ est une fonction localement bornée, on note respectivement z^* et z_* ses enveloppes s.c.s et s.c.i qui sont données par :

$$z^*(x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in C}} z(y) \quad ; \quad z_*(x) = \liminf_{\substack{y \to x \\ y \in C}} z(y) \ ,$$

pour tout $x \in C$.

Définition 5.1 : Solutions de viscosité discontinues
Une fonction localement bornée s.c.s u est une sous-solution de viscosité de (29) si et seulement si :
$\forall \phi \in C^2(\overline{\mathcal{O}})$, *si* $x_0 \in \overline{\mathcal{O}}$ *est un point de maximum local de* $u - \phi$, *on a :*

$$G_*(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0 \; .$$

Une fonction localement bornée s.c.i v est une sursolution de viscosité de (29) si et seulement si :
$\forall \phi \in C^2(\overline{\mathcal{O}})$, *si* $x_0 \in \overline{\mathcal{O}}$ *est un point de minimum local de* $v - \phi$, *on a :*

$$G^*(x_0, v(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \geq 0 \; .$$

Selon les auteurs, une <u>solution</u> est soit une fonction continue qui est à la fois sur et sous-solution ou une fonction discontinue dont les enveloppes s.c.i et s.c.s sont respectivement sur et sous-solution.

Retour sur la formulation des conditions aux limites :

Pour le problème de Dirichlet :
• si $x \in \mathcal{O}$, on a :

$$G_*(x,u,p,M) = G^*(x,u,p,M) = F(x,u,p,M)$$

• si $x \in \partial\mathcal{O}$:

$$G_*(x,u,p,M) = \min(F(x,u,p,M), u - \varphi) \; ,$$
$$G^*(x,u,p,M) = \max(F(x,u,p,M), u - \varphi) \; ,$$

en supposant que F et φ sont continues.
Les conditions aux limites s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \min(F(x,u,Du,D^2u), u-\varphi) \leq 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O} \; , \\ \\ \max(F(x,u,Du,D^2u), u-\varphi) \geq 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

Pour une condition aux limites quelconque :

$$L(x,u,Du,D^2u) = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \; ,$$

où L est une fonction continue; cette condition aux limites devra désormais être comprise comme :

$$\min(F(x,u,Du,D^2u), L(x,u,Du,D^2u)) \leq 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \; ,$$
$$\max(F(x,u,Du,D^2u), L(x,u,Du,D^2u)) \geq 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \; .$$

6 Semi-limites relaxées et stabilité

Pour l'instant, la définition de solutions de viscosité discontinues que nous avons introduite ainsi que le point de vue consistant à regrouper équation et condition aux limites, n'ont eu aucune réelle justification. Dans cette section, nous énonons le théorème de stabilité discontinue qui est LA justification de tout ce qui a été dit dans la section précédente.

Pour énoncer ce résultat, nous avons besoin de la notation suivante : si $(z_\varepsilon)_\varepsilon$ est une suite de fonctions uniformément localement bornées, on note :

$$\limsup{}^* \ z_\varepsilon(x) \ = \ \limsup_{\substack{y \to x \\ \varepsilon \to 0}} z_\varepsilon(y) \ ,$$

et :

$$\liminf{}_* \ z_\varepsilon(x) \ = \ \liminf_{\substack{y \to x \\ \varepsilon \to 0}} z_\varepsilon(y) \ .$$

Ces opérations combinent donc passage à la limite ponctuelle (limite simple) et passage à l'enveloppe s.c.s ou s.c.i suivant le cas.

Théorème 6.1 : *On suppose que, pour $\varepsilon > 0$, u_ε est une sous-solution s.c.s (resp. une sursolution s.c.i) de l'équation :*

$$G_\varepsilon(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon, D^2 u_\varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \ ,$$

où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $I\!R^N$ et $(G_\varepsilon)_\varepsilon$ est une suite de fonctions uniformément localement bornées dans $\overline{\mathcal{O}} \times I\!R \times I\!R^N \times \mathcal{S}^N$ satisfaisant la condition d'ellipticité. On suppose que les fonctions $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ sont uniformément localement bornées sur $\overline{\mathcal{O}}$. Alors $\overline{u} = \limsup^* \ u_\varepsilon$ (resp. $\underline{u} = \liminf_* \ u_\varepsilon$) est une sous-solution (resp. une sursolution) de l'équation:

$$\underline{G}(x, u, Du, D^2 u) = 0 \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \ ,$$

où $\underline{G} = \liminf_* \ G_\varepsilon$ (resp. de l'équation

$$\overline{G}(x, u, Du, D^2 u) = 0 \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \ ,$$

où $\overline{G} = \limsup^* \ G_\varepsilon$).

Ce résultat signifie que les notions de sous-solutions et sursolution de viscosité discontinues introduites dans la section précédente sont extrêmement stables puisque une borne L^∞ uniforme suffit pour passer à la limite. Mais, en contrepartie, on n'a pas seulement une limite mais deux objets $\overline{u}$ et $\underline{u}$ qu'il faudra savoir relier si on veut obtenir un résultat.

C'est la **Méthode des semi-limites relaxées :**

1. On prouve que les u_ε sont bornés (localement ou globalement) dans L^∞, uniformément par rapport à $\varepsilon > 0$.

2. On applique le résultat de stabilité discontinue.

3. Par définition, $\underline{u} \leq \overline{u}$ sur $\overline{\mathcal{O}}$.

4. On utilise un résultat d'**unicité forte** i.e un résultat du type principe du maximum pour des sur et sous-solutions *discontinues* qui donne :

$$\overline{u} \leq \underline{u} \quad \text{dans} \;\; \mathcal{O} \text{ (ou sur } \;\overline{\mathcal{O}}\,)$$

5. On en déduit que $\overline{u} = \underline{u}$ dans $\mathcal{O}$ (ou sur $\overline{\mathcal{O}}$) et on montre facilement que cette égalité implique d'une part la continuité de $u := \overline{u} = \underline{u}$ (car $\overline{u}$ est s.c.s et $\underline{u}$ est s.c.i), le fait que u est *l'unique solution* de l'équation limite et la convergence de u_ε vers u dans $C(\mathcal{O})$ (ou dans $C(\overline{\mathcal{O}})$).

7 Un panorama des résultats d'unicité forte disponibles

Les résultats du type "unicité forte" peuvent prendre des formes légèrement différentes suivant que l'on considère des problèmes où les conditions aux limites au sens de viscosité jouent un rôle important ou pas mais surtout donner lieu à des preuves de difficultés très variables.

1. Principe du Maximum "classique" :

Il s'agit de problèmes pour lesquels on sait que la sous-solution est plus petite que la sursolution sur le bord comme dans le Section 4 ou bien des problèmes posés dans $I\!R^N$. Pour les problèmes posés dans $I\!R^N$, nous précisons qu'il n'y a pas de comportement prescrits à l'infini pour les sur et sous-solutions (existence de limite...etc) mais seulement des restrictions sur leurs croissances à l'infini (par exemple, solutions bornées ou à croissance linéaire).

Il serait trop fastidieux de tenter de faire une liste de ces résultats. Nous renvoyons au "User's guide" [14] pour un large panorama (quoiqu'encore incomplet!) de ce qui existe. Mais nous pouvons préciser que, dans la plupart des cas, les résultats d'unicité valables pour les solutions continues s'étendent sans grandes difficultés en des résultats d'unicité forte. Par exemple ceux de la Section 4.

Il faut insister sur le fait que le Lemme 4.3 s'étend sans en changer une virgule au cas où u est s.c.s et v s.c.i, et c'est le point essentiel.

2. Problèmes de type Neumann :

On peut ici avoir des conditions aux limites assez différentes, linéaires ou non linéaires. Pour en donner une idée, quelques exemples :

- les conditions de **Neumann** classiques :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{ sur } \partial\mathcal{O} \ ,$$

- les conditions de type **dérivée oblique**:

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} = g \quad \text{ sur } \partial\mathcal{O} \ ,$$

où γ est une fonction continue sur $\partial\mathcal{O}$ telle que : $\gamma(x).n(x) \geq \nu > 0$ sur $\partial\mathcal{O}$.

- les conditions de **capillarité**:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \theta\sqrt{1+|Du|^2} \quad \text{ sur } \partial\mathcal{O} \ ,$$

où $\theta < 1$ est une fonction continue sur $\partial\mathcal{O}$.

- les conditions du **contrôle de processus réfléchis**:

$$\sup_{v\in V}\{\gamma(x,v).Du + \lambda u - g(x,v)\} = 0 \quad \text{ sur } \partial\mathcal{O} \ ,$$

où $\gamma(x,v).n(x) \geq \nu > 0$ sur $\partial\mathcal{O}$, pour tout $v \in V$ (ν indépendant de v).

Toutes ces conditions aux limites s'écrivent sous la forme :

$$L(x,u,Du)=0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}$$

où L satisfait les propriétés caractéristiques d'une **condition de Neumann non linéaire** :

(H3) $\qquad L(x,u,p+\lambda n(x))-L(x,u,p)\geq \nu_R\lambda\ ,\ (\nu_R>0)$

pour tout $\lambda>0$, $x\in\partial\mathcal{O}$, $-R\leq u\leq R$ et $p\in I\!\!R^N$. $(\forall 0<R<+\infty)$.
et:

(H4) $\qquad |L(x,u,p)-L(x,u,q)|\leq n_R(|p-q|)\ ,$

où $n_R(t)\to 0$ quand $t\to 0^+$, pour tout $x\in\partial\mathcal{O}$, $-R\leq u\leq R$ et $p,q\in I\!\!R^N$. $(\forall 0<R<+\infty)$.

Pour obtenir des résultats d'unicité pour des problèmes avec des conditions aux limites, on a besoin de renforcer un peu l'hypothèse (H2)' car, tout simplement, la fonction-test $\dfrac{|x-y|^2}{\varepsilon^2}$ doit être remplacée par une fonction $\phi_\varepsilon(x,y)$ plus compliquée. Cette nouvelle hypothèse peut s'écrire :

Pour tous $R,K>0$, il existe une fonction $m_{R,K}:I\!\!R^+\to I\!\!R$ telle que $m_{R,K}(t)\to 0$ quand $t\to 0$ et telle que, pour tout $\eta>0$:

(H2)" $\qquad F(y,u,p,Y)-F(x,u,p,X)\leq m_{R,K}\left(\eta+|x-y|(1+|p|)+\dfrac{|x-y|^2}{\varepsilon^2}\right)$

pour tout $x,y\in\mathcal{O}$, $|u|\leq R$, $p\in I\!\!R^N$ et pour toutes matrices $X,Y\in\mathcal{S}^N$ satisfaisant les inégalités :

$$-\frac{K}{\varepsilon^2}Id\leq\begin{pmatrix} X & 0\\ 0 & -Y\end{pmatrix}\leq\frac{K}{\varepsilon^2}\begin{pmatrix} Id & -Id\\ -Id & Id\end{pmatrix}+\eta Id\ , \tag{30}$$

Le résultat d'unicité forte pour les conditions de Neumann est le suivant :

Théorème 7.1 : *On suppose que $\partial\mathcal{O}$ est de classe $W^{3,\infty}$. On a unicité forte pour le problème de Neumann non linéaire si (H1)', (H2)", (H3), (H4) ont lieu et si F est uniformément continu en p et M au voisinage de $\partial\mathcal{O}$.*

Pour la preuve de ce résultat, nous renvoyons à G. Barles[4]. Un résultat légèrement différent avec des hypothèses plus faibles sur la régularité du bord mais plus forte sur L est démontré dans H. Ishii[23].

3. Problèmes de type Dirichlet :

On s'intéresse dans cette section aux conditions de Dirichlet :

$$u = \varphi \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}\,,$$

où φ est une fonction continue. Bien entendu, cette condition aux limites devra être comprise au sens de viscosité, ce qui signifie que, si u est une sous-solution du problème, on n'aura pas forcément $u \leq \varphi$ sur $\partial\mathcal{O}$ et, de même, si v est une sursolution du problème, on n'aura pas forcément $v \geq \varphi$ sur $\partial\mathcal{O}$. C'est ce phénomène dont la conséquence évidente est que la solution ne sera pas nécessairement égale à φ sur le bord, que nous appellerons perte de condition aux limites.

Pour les conditions de Neumann, bien que des pertes de condition aux limites puissent apparaître (cf. l'exemple 4 de la Section 8), on a un résultat très général et très naturel; ce ne sera pas du tout le cas pour les conditions aux limites de Dirichlet. Contrairement aux conditions de Neumann, on a besoin d'une analyse de la perte de conditions aux limites qui fait intervenir à la fois des propriétés du bord et la forme de l'équation. Nous renvoyons le lecteur aux Chapitres 14 et 16 du D. Gilbarg et N.S. Trudinger[19] où de telles questions sont abordées dans le but d'étudier si le problème de Dirichlet "classique" admet une solution ou pas.

Il n'est pas question ici d'essayer de donner une idée plus précise de ces difficultés et des méthodes (assez nombreuses) mises en oeuvre dans le cadre des solutions de viscosité pour les résoudre. Mais nous allons donner quelques exemples de tels résultats ainsi qu'un mini-état de l'art.

Sont connus :

• **Le cas des équations du premier ordre :**

On a des résultats optimaux (cf. G. Barles et B. Perthame[6]). Un exemple :

Théorème 7.2 : *On suppose que $\partial\mathcal{O}$ est de classe $W^{2,\infty}$. On a unicité forte pour le problème de Dirichlet si φ est continu, si (H1), (H2) ont lieu,* *si H est uniformément continu en p au voisinage de $\partial\mathcal{O}$ et si H satisfait l'hypothèse dite de "non-dégénérescence" :*

$$H(x,t,p+\lambda n(x)) \to +\infty \quad \textit{quand } \lambda \to \pm\infty\ .$$

• **Le cas du deuxième ordre :**

On a des résultats optimaux dans le cas semi-linéaire. Décrivons brièvement un résultat dans le cas semi-linéaire extrait de G. Barles et J. Burdeau[5] :

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + H(x,u,Du) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}\,,$$

où $(a_{i,j})_{i,j} = \sigma\sigma^T$, σ étant une fonction lipschitzienne.

On a le résultat suivant :

Théorème 7.3 : *On suppose que $\partial\mathcal{O}$ est de classe $W^{3,\infty}$. On a unicité forte pour le problème de Dirichlet si φ est continu, si H est uniformément continu en p au voisinage de $\partial\mathcal{O}$ et vérifie (H1), (H2). On suppose de plus que les conditions de "non-dégénéréscence" suivantes ont lieu :*

$$\mu \mapsto \frac{1}{2}\mu \mathrm{Tr}\left[a(x)D^2 d(x)\right] + H(x,u,p+\mu n(x))$$

est une fonction croissante pour $\mu \geq C_R(1+|p|)$ et :

$$\mu \mapsto \frac{1}{2}\mu \mathrm{Tr}\left[a(x)D^2 d(x)\right] + H(x,u,p+\mu n(x))$$

est décroissante pour $\mu \leq -C_R(1+|p|)$, pour tout $-R \leq u \leq R$, $p \in I\!\!R^n$ et x dans un voisinage de :

$$\Sigma_d = \{x \in \partial\mathcal{O}\ t.q\ \sigma^T(x)n(x) = 0\}$$

qui est une réunion de composantes connexes de $\partial\mathcal{O}$.

Un exemple où ces hypothèses sont satisfaites :

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + K|Du| + u = f(x) \quad \text{dans } \mathcal{O}$$

si $K > \dfrac{1}{2}\left|\mathrm{Tr}\left[a(x)D^2d(x)\right]\right|$ sur $\partial\mathcal{O}$.
Ces hypothèses de type "non-dégénéréscence" sur l'équation sont <u>nécessaires</u> et <u>naturelles</u> du point de vue du contrôle optimal (déterministe ou stochastique).

Depuis peu, on a également des résultats dans le cas fortement non-linéaire du contrôle stochastique et donc des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman (cf. Barles et Rouy[7]).

8 Quelques exemples d'applications de la méthode des semi-limites relaxées

Exemple 1 : Méthode de pénalisation

On considère le problème :

$$G(Du_\varepsilon) + u_\varepsilon - f(x) + \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+ = 0 \quad \text{dans } I\!\!R^N$$

où G est une fonction continue telle que $G(0) = 0$ et où $\psi, f \in BUC(I\!\!R^N)$, l'espace des fonctions bornées, uniformément continues sur $I\!\!R^N$. On pose $M = \max\left(||f||_\infty, ||\psi||_\infty\right)$.

Il existe une unique solution $u_\varepsilon \in BUC(I\!\!R^N)$ de ce problème qui vérifie :

$$-M \le u_\varepsilon \le M \quad \text{dans } I\!\!R^N \,.$$

Ce résultat peut, par exemple, être obtenu en utilisant la méthode de Perron.

Si on voulait passer à la limite au moyen du Théorème 3.1, il faudrait obtenir une estimation uniforme sur les modules de continuité des u_ε. C'est faisable (surtout sur cet exemple modèle) mais un peu pénible.

Comme on sait déjà que les u_ε sont uniformément bornées, il suffit d'examiner les :

$$F_\varepsilon(x,t,p) = G(p) + t - f(x) + \frac{1}{\varepsilon}(t - \psi(x))^+ \,.$$

Il est clair que les F_ε ne sont pas uniformément localement bornés mais on peut se passer de cette hypothèse (se souvenir que pour les solutions de viscosité seul le signe compte donc 1 et $+\infty$, c'est la même chose!). On calcule alors $\overline{F}$ et $\underline{F}$:

$$\overline{F}(x,t,p) = \begin{cases} G(p) + t - f(x) & \text{si } t < \psi(x), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et :

$$\underline{F}(x,t,p) = \begin{cases} G(p) + t - f(x) & \text{si } t \leq \psi(x), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les inégalités $\overline{F} \geq 0$ et $\underline{F} \leq 0$ sont équivalentes pour $\overline{u}$ et $\underline{u}$ à être respectivement sous et sursolutions du problème de l'obstacle :

$$\max(G(Du) + u - f(x), u - \psi) = 0 \quad \text{dans } I\!R^N .$$

Cette équation a une non-linéarité qui satisfait (H1), (H2) et qui est uniformément continue par rapport à toutes les variables dès que p est dans un borné; grâce à ces trois propriétés, on a un résultat d'unicité forte pour cette équation. On en déduit que :

1. Par le résultat d'unicité forte, $\overline{u} = \underline{u}$ dans $I\!R^N$. Donc si on note u la valeur commune de ces deux fonctions u est continu puisque $\overline{u}$ est s.c.s et $\underline{u}$ est s.c.i. De plus, u est solution de l'équation puisque $\overline{u}$ est sous-solution et $\underline{u}$ est sursolution.

2. u est *l'unique solution bornée* de l'équation (toujours par le résultat d'unicité forte).

3. $u_\varepsilon \to u$ uniformément sur tout compact de $I\!R^N$.

Exemple 2 : Méthode de régularisation elliptique
Problème de Neumann régularisé :

$$-\varepsilon \Delta u_\varepsilon - \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + H(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) = 0 \text{ dans } \mathcal{O}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}$$

Le problème limite est ici :

$$\mathcal{L}u = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + H(x, u, Du) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}$$

$$\min\left(\mathcal{L}u\,,\,\frac{\partial u}{\partial n}-g\right)\leq 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}$$

$$\max\left(\mathcal{L}u\,,\,\frac{\partial u}{\partial n}-g\right)\geq 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}$$

On est dans le cadre d'un problème de Neumann et on a donc sous les hypothèses rappelées ci-dessus (et qui sont naturelles) unicité forte sur $\overline{\mathcal{O}}$. Si on peut démontrer que les u_ε sont uniformément bornées sur $\overline{\mathcal{O}}$ alors on aura convergence uniforme sur $\overline{\mathcal{O}}$.

Exemple 3 : Méthode de régularisation elliptique
Problème de Dirichlet régularisé :

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon - \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + H(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}$$

$$u_\varepsilon = \varphi \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}$$

Le problème limite est ici :

$$\mathcal{L}u = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + H(x, u, Du) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}$$

$$\min\left(\mathcal{L}u\,,\, u-\varphi\right)\leq 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}$$

$$\max\left(\mathcal{L}u\,,\, u-\varphi\right)\geq 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}$$

Dans ce cas, l'unicité forte n'a en général lieu que sur $\mathcal{O}$ à cause des phénomènes de couches-limites dues aux pertes éventuelles de conditions au bord pour le problème limite. On n'obtiendra dans ce cas que la convergence uniforme sur tout compact de l'ouvert $\mathcal{O}$.

Exemple 4 : Grandes Déviations

Tournons-nous vers un problème moins académique qui va nous permettre de démontrer notre assertion du début de l'introduction : les exemples intéressants ne rentrent pas dans la théorie... mais presque.

On considère le problème linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \dfrac{\varepsilon^2}{2} \displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j}(x) \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} = 0 & \text{dans } \mathcal{O} \times (0,T) \ , \\ \qquad\qquad u_\varepsilon(x,0) = 0 & \text{sur } \overline{\mathcal{O}}, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \gamma} = 1 & \text{sur } \partial\mathcal{O} \times (0,T), \end{cases}$$

où γ est une fonction lipschitzienne sur $\partial\mathcal{O}$ telle que $\gamma(x) \cdot n(x) \ge \eta > 0$ sur $\partial\mathcal{O}$ et les $a_{i,j}$ sont des fonctions lipschitziennes sur $\overline{\mathcal{O}}$ satisfaisant la condition d'uniforme ellipticité (3).

Formellement au moins ou mieux en utilisant la méthode des semi-limites relaxées, il est facile de se convaincre que $u_\varepsilon \to 0$ uniformément sur $\overline{\mathcal{O}} \times [0,T]$. On peut d'ailleurs observer sur cet exemple une perte de condition aux limites car la fonction nulle ne satisfait plus la condition de dérivée oblique.

Cet exemple est tiré de la théorie des Grandes Déviations des processus de diffusion – estimation asymptotique des coûts de réflexion oblique –. Nous avons renoncé à en présenter la formulation probabiliste car ce n'était pas l'objet de notre propos. Le but de la théorie des Grandes Déviations est de donner une estimation de quantités "petites" car elles sont liées à des évènements rares, c'est-à-dire intervenant avec une faible probabilité. Cette estimation est généralement exponentielle et c'est à ce type de convergence que l'on s'attend pour les u_ε. Ici la difficulté provient a priori de la dérivée oblique, en tout cas du point de vue probabiliste.

Supposons pour simplifier que les u_ε sont des fonctions régulières dans $C^2(\overline{\mathcal{O}})$ (ce qui semble raisonnable puisque le problème est uniformément parabolique); le principe du maximum fort nous indique alors que $u_\varepsilon > 0$ sur $\overline{\mathcal{O}} \times (0,T)$. On est alors tenté de poser :

$$I_\varepsilon(x,t) = -\varepsilon^2 \log(u_\varepsilon(x,t)) \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \times (0,T) \ .$$

En effet, si on parvient à prouver que la limite des I_ε est strictement positive, on aura démontré la convergence exponentiellement rapide de u_ε vers 0.

Le problème associé à I_ε est le suivant :

$$\frac{\partial I_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 I_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j}(x) \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial x_j} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \times (0,T) \ ,$$

$$I_\varepsilon(x,0) = +\infty \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \ ,$$
$$\frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \gamma} + \varepsilon^2 \exp\left(\frac{I_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right) = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \times (0,T) \ .$$

Quant au problème limite, en tenant compte du fait que $I_\varepsilon \geq o(1)$ sur $\overline{\mathcal{O}} \times [0,T]$ puisque u_ε converge uniformément vers 0, une application formelle du Théorème 6.1 et une réinterprétation des inégalités que l'on obtient à la limite montre qu'il est donné par :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}(x) \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_j} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \times (0,T)$$
$$I(x,0) = +\infty \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \ , \tag{31}$$
$$I(x,t) = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \times (0,T) \ .$$

Tout semble découler de la méthode des semi-limites relaxées grâce à laquelle le passage à la limite dans la condition de dérivée oblique ne pose aucun problème mais...

1. Les I_ε ne sont clairement pas uniformément bornés,
2. l'équation limite de (31) ne satisfait pas (H2),
3. la prise en compte de la donnée initiale ne paraît pas évidente.

Ici la stratégie va être un peu différente : d'abord on utilise le changement de variable
$$I_\varepsilon^A(x,t) = -\varepsilon^2 \log(u_\varepsilon(x,t) + e^{-\frac{A}{\varepsilon^2}}) \ .$$
Comme u_ε converge uniformément vers 0 sur $\overline{\mathcal{O}} \times [0,T]$, on a :

$$o(1) \leq I_\varepsilon^A \leq A \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \times [0,T] \ .$$

On s'est donc ramené au cas où les I_ε sont uniformément bornés.

De plus si on note $\overline{I}^A = \limsup^* I_\varepsilon^A$ et $\underline{I}^A = \liminf_* I_\varepsilon^A$, on prouve aisément que :

$$\overline{I}^A = \min(\limsup{}^* \ I_\varepsilon, A) \quad , \quad \underline{I}^A = \min(\liminf{}_* \ I_\varepsilon, A) \ .$$

Le passage à la limite dans les équations satisfaites par les I_ε^A s'effectue sans grande difficulté et on montre que $\overline{I}^A$ et $\underline{I}^A$ sont respectivement sous- et sursolution d'un problème analogue à (31) mais où $+\infty$ est remplacé par A.

Comme la matrice $(a_{i,j})_{i,j}$ est non dégénérée, on montre que la condition de sous-solution sur $\partial\mathcal{O}$ se réduit à la propriété classique :

$$\overline{I}^A \leq 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} ,$$

(cf. le Lemme 7.1 de [3]) et donc, comme $0 \leq \underline{I}^A \leq \overline{I}^A$ sur $\overline{\mathcal{O}} \times [0,T]$, on a :

$$\underline{I}^A = \overline{I}^A = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \times (0,T) .$$

La condition de Dirichlet est satisfaite au sens classique, de même d'ailleurs que la prise en compte de la donnée initiale.

Enfin, comme la comparaison directe de $\underline{I}^A$ et $\overline{I}^A$ est délicate à cause de leurs discontinuités sur $\partial\mathcal{O} \times \{0\}$, on introduit la fonction I^A définie sur $\overline{\mathcal{O}} \times (0,T)$ par:

$$I^A(x,t) = \inf\{\int_t^{\tau_x \wedge \theta} \frac{1}{2}|\sigma^{-1}(y_x(t))\Big(\dot{y}_x(t) - b(y_x(t))\Big)|^2 dt + A.1_{\{\theta \leq \tau_x\}} ;\\ y_x \in H^1_{loc}(0,+\infty, I\!R^N) , y_x(t) = x , \ t \leq \theta \leq T \},$$

qui est, par des arguments de contrôle optimal, la "bonne" solution du problème (ce que l'on vérifie facilement). De plus, I^A est continue sur $\overline{\mathcal{O}} \times (0,T)$ et I^A satisfait au sens classique la condition de Dirichlet $I^A = 0$ sur $\partial\mathcal{O} \times (0,T)$; enfin, I^A est continu aux points de $\mathcal{O} \times \{0\}$ où il vaut A.

On commence par comparer, pour $h > 0$ petit, la sous-solution $\overline{I}^A(.,.+h)$ et la sursolution I^A puis la sous-solution $I^A(.,.+h)$ et la sursolution $\underline{I}^A$. Pour cela on utilise ici seulement un résultat du type principe du maximum du type "classique" puisque les conditions aux limites ont lieu elles aussi au sens classique.

On a donc :

$$\overline{I}^A(x,t+h) \leq I^A(x,t) \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \times (0,T-h) ,$$

et :

$$I^A(x,t+h) \leq \underline{I}^A(x,t) \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \times (0,T-h) .$$

En faisant tendre h vers 0 (la continuité de I^A est cruciale ici), on obtient :

$$\overline{I}^A(x,t) = \underline{I}^A(x,t) = I^A(x,t) \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \times (0,T)\ ,$$

et la convergence uniforme des I_ε^A vers I^A, puis celle des I_ε vers $I = \lim\limits_{A\to\infty} I^A$ qui est l'unique solution continue sur $\overline{\mathcal{O}} \times (0,T)$ de (31).

Exemple 5 : Comportement en temps grands de la solution d'une équation de Hamilton-Jacobi (d'après G. Namah et J.M. Roquejoffre[28]).

On considère l'exemple simplifié suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + H(Du) & = & f(x) & \text{dans } I\!\!R^N \times (0,\infty)\ , \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{dans } I\!\!R^N\ , \end{array}\right. \tag{32}$$

où f et u_0 sont dans $W^{1,\infty}(I\!\!R^N)$ et H est une fonction continue.

On va supposer de plus que :

- H est convexe, $H(0) = 0$, $H(p) \geq 0$ pour tout $p \in I\!\!R^N$ et H est "coercif" i.e.
$$H(p) \to +\infty \quad \text{quand } |p| \to +\infty\ .$$
- $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I\!\!R^N$, $\mathcal{Z} = \{x \in I\!\!R^N;\ f(x) = 0\}$ est un sous-ensemble compact non vide de $I\!\!R^N$ et :
$$\liminf_{|x|\to\infty} f(x) > 0\ . \tag{33}$$

Sous ces hypothèses, le résultat est le suivant :

$$u(x,t) \to v(x) \quad \text{quand } t \to +\infty\ ,$$

uniformément sur tout compact de $I\!\!R^N$ où v est UNE solution de l'équation :

$$H(Dv) = f(x) \quad \text{dans } I\!\!R^N. \tag{34}$$

Il faut d'abord remarquer que ces problèmes de comportement en temps grands des solutions d'une équation de Hamilton-Jacobi ne sont pas du tout simples et ils sont, d'ailleurs, assez mal compris. Pour avoir un résultat "naturel" comme celui-ci, il faut par exemple éviter des comportements du type suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \quad \text{dans } I\!\!R \times (0,\infty) \; , \\ u(x,0) & = & \sin(x) \quad \text{dans } I\!\!R \; , \end{array} \right. \tag{35}$$

où la solution est donnée par $u(x,t) = \sin(x-t)$. Ceci justifie au moins partiellement les hypothèses sur H et f.

Mais plus que le résultat, l'application de la méthode des semi-limites relaxées est ici à la fois exemplaire et simplificatrice. Décrivons-en les étapes essentielles :

1. La solution u de (32) existe et vérifie :

$$-||u_0||_\infty \leq u(x,t) \leq ||u_0||_\infty + K|x-x_0| \quad \text{dans } I\!\!R^N \times (0,\infty) \; ,$$

où $x_0 \in \mathcal{Z}$ et K satisfait :

$$H(p) \geq ||f||_\infty \quad \text{si } |p| \geq K \; .$$

(K existe grâce à l'hypothèse de coercivité sur H.) En effet, $-||u_0||_\infty$ et $||u_0||_\infty + K|x-x_0|$ sont respectivement sous- et sursolution de (32).

2. En comparant les solutions $u(x,t)$ et $u(x,t+h)$ pour $h>0$, on obtient :

$$||u(x,t+h) - u(x,t)||_\infty \leq ||u(x,h) - u(x,0)||_\infty \; ,$$

et le second membre est estimé par Ch pour une constante $C>0$ assez grande car :

$$u_0(x) - Ct \leq u(x,t) \leq u_0(x) + Ct \quad \text{dans } I\!\!R^N \times (0,\infty) \; ,$$

par le même argument de sous-et sursolution qu'au point 1. On en déduit :

$$||\frac{\partial u}{\partial t}||_\infty \leq C \; ,$$

puis grâce à l'équation et à la coercivité de H :

$$||Du||_\infty \leq C' \; .$$

3. Si $x \in \mathcal{Z}$, l'application $t \mapsto u(x,t)$ est décroissante; grâce aux estimations des points 1 et 2 et en utilisant le théorème de Dini, on a :

$$u(x,t) \to \varphi(x) \ ,$$

uniformément sur $\mathcal{Z}$ où φ est une fonction lipschitzienne.
4. Comment passer à la limite globalement? Grâce aux estimations ci-dessus et au théorème d'Ascoli, on pourrait envisager d'utiliser le théorème de stabilité continue. Mais on sait seulement qu'il existe une suite $(t_n)_n$ qui converge vers $+\infty$ et telle que $u(x,t_n)$ converge localement uniformément sur $I\!R^N$; alors que faire avec le terme $\dfrac{\partial u}{\partial t}$?

Pour $\varepsilon > 0$, on pose :

$$u_\varepsilon(x,t) := u(x, \frac{t}{\varepsilon}) \quad \text{dans } I\!R^N \times (0,\infty) \ , \ .$$

La fonction u_ε est solution de :

$$\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + H(Du_\varepsilon) = f(x) \quad \text{dans } I\!R^N \times (0,\infty) \ . \tag{36}$$

On applique la méthode des semi-limites relaxées en introduisant comme d'habitude $\overline{u}(x,t) = \limsup^* u_\varepsilon(x,t)$ et $\underline{u}(x,t) = \liminf_* u_\varepsilon(x,t)$. On en déduit que, pour tout $t > 0$, $\overline{u}(\cdot,t)$ et $\underline{u}(\cdot,t)$ sont respectivement sous- et sursolution de (34). Il est à noter ici que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont lipschitziennes en x bien que l'exemple (35) montre qu'elles peuvent être très différentes.
5. MAIS on n'a pas d'unicité, pas plus "faible" que forte pour (34) et, en général, pas seulement à cause du fait que, si v est solution, $v + c$ est également solution pour toute constante c. On va contourner cette difficulté grâce à deux ingrédients :

- d'après 3, on connaît le comportement de u_ε sur $\mathcal{Z}$.

- en dehors de $\mathcal{Z}$, $f > 0$ et on a (localement) une sous-solution stricte (la fonction nulle!). C'est pour ce point que la condition (33) est nécessaire.

On a donc unicité forte (principe du maximum classique) pour le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} H(Du) = f(x) & \text{dans } \mathcal{O} := I\!R^N \backslash \mathcal{Z} \ , \\ u(x) = \varphi(x) & \text{sur } \partial\mathcal{O} \ . \end{cases}$$

6. Il suffit de recoller les différents morceaux pour conclure et cela ne comporte aucune difficulté grâce aux estimations de lipschitz en x.

Pour conclure cette revue d'applications, il nous paraît indispensable d'évoquer des applications d'une part à la convergence de schémas numériques (essentiellement tout schéma numérique stable, consistant et monotone est convergent pourvu que l'équation limite possède une propriété d'unicité forte (voir G. Barles et P.E. Souganidis[8])) et d'autre part à des problèmes plus complexes où l'équation limite ne s'obtient pas de manière aussi directe que dans les quatres exemples ci-dessus. L'exemple le plus typique est sans doute celui des problèmes d'homogénéisation où l'hamiltonien de l'équation limite est obtenu grâce à la résolution d'un "problème cellulaire". Ces exemples peuvent être traités (en général) par la méthode des semi-limites relaxées en utilisant un raffinement dû à L.C. Evans[16], appelée "méthode de la fonction-test perturbée" et qui en est donc un complément indispensable...

9 Appendice

Dans cet Appendice, nous esquissons la preuve du Lemme 4.3 dans le cas où $\phi(x,y) = \dfrac{|x-y|^2}{\varepsilon^2}$. Cette preuve, donnée en détails et dans le cas général dans [14], est basée sur le principe du maximum d'Alexandrov qui décrit les propriétés particulières des fonctions convexes et semi-convexes (la somme d'une fonction convexe et d'une fonction régulière) au regard du principe du maximum.

Commenons par le :

Lemme 1 : *Une fonction convexe bornée sur un ouvert de $I\!R^N$ est deux fois différentiable presque partout.*

Ce lemme peut surprendre car il dit en particulier qu'une fonction croissante de $I\!R$ dans $I\!R$ est différentiable p.p. ce qui n'est pas tout à fait trivial. Nous continuons par le :

Lemme 2 : *Soit $\varphi : \mathcal{O} \to I\!R$ une fonction semi-convexe. Si φ a un point de maximum local en $z \in \mathcal{O}$, il existe une suite $(z_\varepsilon)_\varepsilon$ de points de $\mathcal{O}$ qui converge vers z et telle que :*

$$D\varphi(z_\varepsilon) \to 0 \quad , \quad D^2\varphi(z_\varepsilon) \to M \leq 0 \; .$$

(En particulier, φ est deux fois différentiable aux points z_ε .)

Nous admettons, bien entendu, ces lemmes qui ne semblent pour l'instant – hormis un vague rapport avec le principe du maximum – n'avoir aucun rapport avec le Lemme 4.3. Pour introduire des fonctions semi-convexes et semi-concaves, on va régulariser nos sur- et sous-solutions.

Avant cela, on simplifie l'approche en se ramenant au cas où $\mathcal{O} = I\!R^N$. Si la propriété de maximum local a lieu dans $\overline{B}(\hat{x}, r) \times \overline{B}(\hat{y}, r)$, on pose :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in B(\hat{x}, r) \cap \overline{\mathcal{O}} \\ -C & \text{sinon} \end{cases} \quad , \quad \tilde{v}(y) = \begin{cases} v(y) & \text{si } y \in B(\hat{y}, r) \cap \overline{\mathcal{O}} \\ C & \text{sinon} \end{cases}$$

où C est une constante positive assez grande.

Les fonctions $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont respectivement s.c.s et s.c.i sur $I\!R^N$ et la propriété de maximum devient globale sur $I\!R^N$. Les notions de sur et sous-différentiels étant locales, le surdifférentiel de $\tilde{u}$ au point $\hat{x}$ est le même que celui de u et de même pour le sous-différentiel de $\tilde{v}$ (on s'en convaincra même si $\hat{x}$ ou $\hat{y}$ est sur le bord).

On s'est donc ramené au cas où $\mathcal{O} = I\!R^N$ et on utilisera désormais les notations u et v au lieu de $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$. Passons à l'étape de régularisation.

Inf et Sup-convolutions :

On pose, pour $\alpha > 0$ (petit) :

$$u^\alpha(x) = \sup_{y \in I\!R^N} \{ u(y) - \frac{|x-y|^2}{2\alpha} \} .$$

et :

$$v_\alpha(x) = \inf_{y \in I\!R^N} \{ v(y) + \frac{|x-y|^2}{2\alpha} \} .$$

Nous renvoyons le lecteur à J.M. Lasry et P.L. Lions[27] pour une description des principales propriétés de ces opérations.

Le lemme suivant montre les liens entre inf-sup convolutions et notre problème. On note :

$$M_\varepsilon = \max_{I\!R^N \times I\!R^N} \left(u(x) - v(y) - \frac{|x-y|^2}{\varepsilon^2} \right) .$$

Lemme 3 : *Les fonctions u^α et v_α sont respectivement semi-convexe et semi-concave :*

$$D^2u^\alpha \geq -\frac{1}{\alpha}Id \quad , \quad D^2v_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}Id\,.$$

De plus, si $4\alpha < \varepsilon^2$ et si $\eta = \varepsilon^2 - 4\alpha$, alors :

$$M_\varepsilon = \max_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \left(u^\alpha(\overline{x}) - v_\alpha(\overline{y}) - \frac{|\overline{x}-\overline{y}|^2}{\eta} \right)\,.$$

Enfin, si le maximum du membre de droite est atteint en $(\tilde{x},\tilde{y})$ alors :

$$u^\alpha(\tilde{x}) = u(\hat{x}) - \frac{|\hat{x}-\tilde{x}|^2}{2\alpha} \quad , \quad v_\alpha(\tilde{y}) = v(\hat{y}) + \frac{|\hat{y}-\tilde{y}|^2}{2\alpha}\,,$$

$$Du^\alpha(\tilde{x}) = Dv_\alpha(\tilde{y}) = \frac{(\tilde{x}-\tilde{y})}{\eta} = p = \frac{2(\hat{x}-\hat{y})}{\varepsilon^2}$$

La preuve du Lemme 3 est facile et laissée au lecteur.

On applique maintenant le Lemme 2 à :

$$\Psi(x,y) = u^\alpha(\overline{x}) - v_\alpha(\overline{y}) - \frac{|\overline{x}-\overline{y}|^2}{\eta}\,.$$

Il existe une suite $(\tilde{x}^n,\tilde{y}^n) \to (\tilde{x},\tilde{y})$ telle que :

1. u^α et v_α sont deux fois différentiables en $\tilde{x}^n$ et $\tilde{y}^n$ respectivement.

2. Quand $n\to\infty$, $D^2u^\alpha(\tilde{x}^n) \to X$, $D^2v_\alpha(\tilde{y}^n) \to Y$

3. X et Y vérifient :

$$\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \frac{2}{\eta}\begin{pmatrix} Id & -Id \\ -Id & Id \end{pmatrix}\,,$$

ce qui est exactement l'estimation annoncée.

Il reste à démontrer le :

Lemme 4 : *(p,X) et (p,Y) appartiennent respectivement aux ensembles $\overline{D}^{2,+}u(\hat{x})$ et $\overline{D}^{2,-}v(\hat{y})$.*

Pour la preuve de ce lemme, il suffit d'appliquer le Lemme 2.1 d'une part à la fonction u^α et au couple (p, X) et d'autre part à la fonction v_α et au couple (p, Y) (car ce lemme peut être formulé en terme de $D^{2,-}$ et de minimum local) et de voir comment les propriétés de maximum ou de minimum local données par le lemme se combinent avec les "sup" et "inf" des sup et inf-convolutions.

Et le Lemme 4.3 est prouvé.

References

[1] L. Alvarez, F. Guichard, P.-L. Lions and J.-M. Morel, Axioms and fundamental equations of Image Processing, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **123** (1992), 199–257.

[2] M. Bardi, M.G. Crandall, L.C. Evans, H.M. Soner et P.E. Souganidis: VISCOSITY SOLUTIONS ET APPLICATIONS. Lecture notes in Mathematics 1660, Fondazionze CIME, Springer-Verlag 1997.

[3] G. Barles: SOLUTIONS DE VISCOSITE DES EQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI. Collection "Mathematiques et Applications" de la SMAI, n°17, Springer-Verlag (1994).

[4] G. Barles: *Fully nonlinear Neumann type boundary conditions for second-order elliptic and parabolic equations.* J. Diff. Equations, Vol. 106, N∘. 1, (1993), pp 90-106.

[5] G. Barles et J. Burdeau: *The Dirichlet Problem for Semilinear Second-Order Degenerate Elliptic Equations and Applications to Stochastic Exit Time Control Problems.* Soumis à Comm. in PDE.

[6] G. Barles et B. Perthame: *Comparison principle for Dirichlet type Hamilton-Jacobi Equations and singular perturbations of degenerated elliptic equations.* Appl. Math. and Opt., 21, 1990, pp 21-44.

[7] G. Barles et E. Rouy: *A Strong Comparison Result fot the Bellman Equations arising in Stochastic Exit Time Control Problems and its Applications.* Submitted to CPDE.

[8] G. Barles et P.E Souganidis: *Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations.* Asymptotic Analysis 4, (1991), pp 271-283.

[9] G. Barles et P.E Souganidis: *A new approach to front propagation problems : theory and applications.* A paraître dans Arch. Rat. Mech. Anal.

[10] A. Brandt: *Interior estimates for second-order elliptic differential (or finite difference) equations via the maximum principle.* Israel J. Math. **7**, 95-121 (1969).

[11] A. Brandt: *Interior Schauder estimates for parabolic differential- (or difference-) equations via the maximum principle.* Israel J. Math. **7**, 254-262 (1969).

[12] M.G Crandall, L.C Evans et P.L Lions: *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984) pp 487-502.

[13] M.G Crandall et H. Ishii: *The Maximum Principle for semicontinuous functions.* Differential and Integral Equations **3** (1990), pp 1001-1014.

[14] M.G Crandall, H.Ishii et P.L Lions: *User's guide to viscosity solutions of second order Partial differential equations.* Bull. Amer. Soc. **27** (1992), pp 1-67.

[15] M.G Crandall et P.L Lions: *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**, (1983), pp 1-42.

[16] L.C Evans: *The perturbed test function technique for viscosity solutions of partial differential equations.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **111** (1989), pp 359-375.

[17] W.H Fleming et H.M Soner: CONTROLLED MARKOV PROCESSES AND VISCOSITY SOLUTIONS. Applications of Mathematics, Springer-Verlag, New-York, 1993.

[18] M.I Freidlin: FUNCTIONAL INTEGRATION AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. Annals of Math. Studies, N° 109, Princeton University Press, 1985.

[19] D.Gilbarg et N.S Trudinger: ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND-ORDER. Springer, New-York (1983).

[20] H. Ishii: *Hamilton-Jacobi Equations with discontinuous Hamiltonians on arbitrary open sets.* Bull. Fac. Sci. Eng. Chuo Univ. **28** (1985), pp 33-77.

[21] H. Ishii: *Perron's method for Hamilton-Jacobi Equations.* Duke Math. J. **55** (1987), pp 369-384.

[22] H. Ishii: *On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDE's.* Comm. Pure and Appl. Math. **42** (1989), pp 14-45.

[23] H. Ishii: *Fully nonlinear oblique derivative problems for nonlinear second-order elliptic PDE's.* Duke Math. J. **62** (1991), pp 663-691.

[24] H. Ishii et P.L Lions: *Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations.* J. Diff. Equations **83** (1990), pp 26-78.

[25] R. Jensen: *The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second-order partial differential equations*, Archive Rat. Mech. Anal. **101** (1988), pp 1-27.

[26] R. Jensen: *Uniqueness criteria for viscosity solutions of fully nonlinear elliptic partial differential equations*, Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), pp 629-667.

[27] J.M Lasry et P.L Lions: *A remark on regularization in Hilbert spaces.* Isr. J. Math. **55** (1986) pp 257-266.

[28] G. Namah et J.M. Roquejoffre: *Remarks on the long time behaviour of the solutions of Hamilton-Jacobi Equations.* Préprint.

[29] D.W Strook et S.R.S. Varadhan: *On degenerate elliptic-parabolic operators of second order and their associated diffusions.* Comm. Pure and Applied Math., Vol XXV, 1972, pp 651-713.