Math. Seminar „Variationsrechnung" | Spezielle Variationsprobleme (Mein Vortrag)

Erinnerung: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\Omega :=]a,b[\subseteq \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ $(= \mathbb{R}^n, n=1)$

$x \in \bar\Omega = [a,b]$, $u : \bar\Omega \to \mathbb{R}$ (*)

(**) $f : \bar\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, u, \xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ (besser (?): $(x,y,\xi) \mapsto f(x,y,\xi)$)

$\nabla f = (D_1 f, D_2 f, D_3 f) =: (f_x, f_u, f_\xi)$ (von (x,u,ξ))

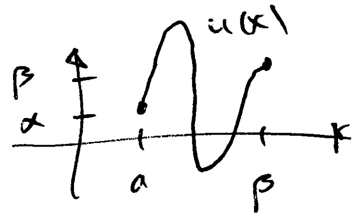
Mit u (*) & f (**) bilde $\bar\Omega \ni x \mapsto f(x, u(x), u'(x)) \equiv g(x)$

und $$I(u) := \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx$$

Brauche: $u'(x)$ macht Sinn; nehme: $u \in C^1(\bar\Omega) = C^1([a,b])$

Möchte I minimieren mit Nebenbedingung;

hier: $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegeben).



D.h., sei $X := \{u \in C^1(\bar\Omega) \mid u(a) = \alpha, u(\beta) = \beta\}$

und

(P) $$m := \inf\{I(u) \mid u \in X\} = \inf_{u \in X} I(u) = \inf_{u \in X}\left\{ I(u) = \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx \right\}$$

Fragen:

(a) Ist $m > -\infty$?

(b) Wenn, bestimme m

(c) $\exists ?\ \bar u \in X : I(\bar u) = m$ (min angenommen; sagen: „$\bar u$ löst (P)")

(d) Bestimme alle $\bar u$, so daß $I(\bar u) = m$

(e) etc. etc.

Satz: $\bar u \in X \cap C^2(\bar\Omega)$ & $I(\bar u) = m$ & $f \in C^2$

$\Downarrow$

$\bar u$ löst

(E-L) $\frac{d}{dx}\left[f_\xi(x, \bar u(x), \bar u'(x)) \right] = f_u(x, \bar u(x), \bar u'(x))$, $x \in]a,b[$

&

(D-R) $\frac{d}{dx}\left[f(x,\bar u(x),\bar u'(x)) - \bar u'(x) f_\xi(x, u(x), \bar u'(x)) \right]$

$= f_x(x, \bar u(x), \bar u'(x))$.

2. Ordn. Gew. DGL.

<u>Bsp.</u> Sei $f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 - u$

(egl.: $\exists\, h = h(u,\xi)$ s.d. $f(x,u,\xi) = h(u,\xi)$ $\forall (x,u,\xi)$

i.e. f unabh von x!

Dann (E-L) $\bar{u}''(x) = -1$

(D-R) $-\bar{u}'(x)\,[\,\bar{u}''(x)+1\,] = 0$

$\bar{u} \equiv 1$ lösst (D-R) aber nicht (E-L) (also kein Minimum!)

Programm: (1) Löse (E-L) (oder (D-R)) mit $u(a)=\alpha$, $u(b)=\beta$

(2) Zeige, Lösung (!) ist Minimierer

Satz: $\bar{u} \in X \cap C^2(X)$ & $\bar{u}$ lösst (E-L) & $f \in C^2$ & $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ konvex $\forall x \in [a,b]$

(1) $\Downarrow$ $I(\bar{u}) = m$ (d.h. $\bar{u}$ löst (P))

(2) Wenn auch $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ strikt konvex: Min von (P) (d.h. Lösung) eindeutig

---

Heute: "Spezielle Variationsprobleme" oder "Beispiele, Sonderfälle, Problematiken"

(A) $\boxed{f(x,u,\xi) \equiv f(\xi)}$ (i.e. unabh. von x,u: $I(u) = \int_a^b f(u'(x))\,dx$)

(E-L):

$\frac{d}{dx}[f'(u'(x))] = 0$, so $f'(u'(x)) = \text{Konst}\ \forall x$

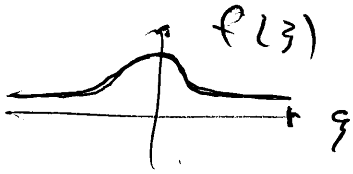
auch: $u(a)=\alpha$, $u(b)=\beta$

$\Downarrow$ (A) $\bar{u}(x) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a)+\alpha$ ($= Ax+B$, affin, C^2)

(i) NICHT immer Minimierer: Letztes mal:

(kein Existenz!)

("nicht Zielführend")



Bsp: $f(\xi) = e^{-\xi^2}$ (nicht konvex!) $\quad a=0,\ b=1$

$$I(u) = \int_0^1 e^{-(u'(x))^2}\,dx \geq 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \quad m \geq 0$

$\exists \{u_\nu\}_\nu \subseteq X : \ 0 \leq I(u_\nu) \to 0, \ \nu \to \infty$

$\Rightarrow \quad m = 0 \ ; \quad I(u) = 0$ unmöglich (aus $(*)$)

($\bar{u} \equiv 0$ ist Max.: $I(0) = 1 \geq I(u) \quad \forall u \in X$).

(Natürlich hat $-I$ dann kein Maximierer, weil $\bar{u} \equiv 0$ als Minimierer)

(ii) Wenn aber $f(\xi)$ konvex ($\Rightarrow (u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ konvex $\forall x$)

dann (Satz!) $\bar{u}$ aus (A) Minimierer

NB: Auch richtig wenn nur $f \in C^0$ (ohne Satz):

Prop: Für $\bar{u}(x) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a)+\alpha$, $f = f(\xi) \in C^0$ konvex gilt:

$$(\#) \quad I(\bar{u}) \leq I(u) \quad \forall u \in X$$

Bew: Jensen's Ungl: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen & beschr, $u \in L^1(\Omega)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u(x))\,dx$$

Dann: $\forall u \in X$:

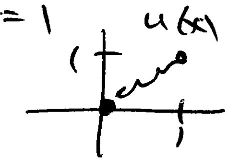
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u'(x))\,dx \overset{\text{Jensen}}{\geq} f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u'(x)\,dx\right)$$

$$\overset{\text{HDI}}{=} f\left(\frac{u(b)-u(a)}{b-a}\right) \overset{u \in X}{=} f\Big(\underbrace{\frac{\beta-\alpha}{b-a}}_{\text{Zahl}}\Big) \overset{\text{Def. } \bar{u}}{=} f(\bar{u}'(x))$$

$$\overset{\text{Lin.}\int}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\bar{u}'(x))\,dx \quad \Rightarrow \quad (\#) \qquad \blacksquare$$

NB: Wenn f nicht strikt konvex: Kann es andere Min. geben

Bsp. $a=0, \ \alpha=0, \ b=1, \ \beta=1$ ($u(0)=0, \ u(1)=1$)



$$I(u) = \int_0^1 |u'(x)|\,dx \quad (f(\xi) = |\xi| \notin C^2, \ (\in C^0) \ \text{konvex, nicht strikt})$$

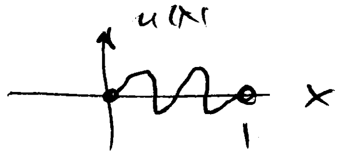
$m := \inf_{u \in X} I(u)$; $u_n(x) := x^n$; $u_n \in X \cap C^2$; $I(u_n) = 1 = m$

(iii) Problematik: Wahl von X ??

Bsp. $f(\xi) = (\xi^2-1)^2 \ge 0$; $I(u) = \int_0^1 f(u'(x))\,dx \ge 0$

$a=0,\ b=1$ $\qquad m_X := \inf_{u\in X} I(u) \ge 0$

$X = \{u \in C^1([0,1]) \mid u(0)=u(1)=0\}$

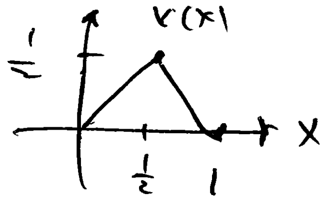


Auch:

$X_{piec} = \{u \in C^1_{piec}([0,1]) \mid u(0)=u(1)=0\}$

$m_{X_{piec}} := \inf_{u\in X_{piec}} I(u) \ge 0$

$X \subsetneq X_{piec} \Rightarrow m_X \ge m_{X_{piec}} \ge 0$



$m_{X_{piec}} = 0$: $\quad v(x) := \begin{cases} x, & x\in[0,\frac12] \\ 1-x, & x\in[\frac12,1]. \end{cases}$

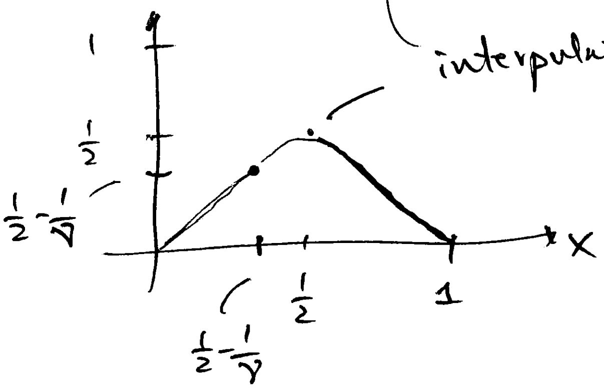
$v \in X_{piec}$ & $f(v'(x)) \equiv 0\ \forall x \Rightarrow I(v)=0 \Rightarrow m_{X_{piec}} = 0$
& $v\in X_{piec}$ Minimierer.

Beh:
(1) $m_X = 0$ (auch)
(2) $I(u) > 0\ \forall u \in X$ (kein Minimierer auf X!)

Bew:
(a) $m_X \ge 0$
(b) $\exists \{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset X$: $0 \le I(u_\nu) \to 0,\ \nu\to\infty$

$$u_\nu(x) = \begin{cases} x & x\in[0,\frac12-\frac1\nu] \\ -2\nu^2(x-\frac12)^2-4\nu(x-\frac12)-x+1 & x\in(\frac12-\frac1\nu,\frac12] \\ 1-x & x\in(\frac12,1] \end{cases}$$

interpolation s.d. $u_\nu \in C^1([0,1])$



NB: (E-L) $\frac{d}{dx}\left[u'(x)\left(u'(x)^2-1\right)\right]=0$

$\bar u \equiv 0$ Lösung ($\bar u \in X$)

aber $I(0) = 1 > 0 = m_X$

Bem.:

$I(u)=0 \Rightarrow (u'(x)^2-1)^2 = 0\ \forall x \Rightarrow |u'(x)| = 1\ \forall x$

$u\in X \Rightarrow (u\in C^1 \wedge u(0)=u(1)=0) \Rightarrow u'(x) = 1$ oder $-1\ \forall x$ ↯ mit $u(0)=u(1)=0$

(B) $\boxed{f(x,u,\xi) = f(x,\xi)}$ (d.h. unabh. von u)

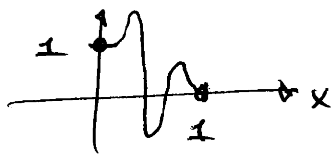
(E-L) $\frac{d}{dx}\left[f_\xi(x,u'(x))\right] = 0$ d.h. $f_\xi(x,u'(x)) = \text{Konst}$.

Bsp. (Weierstraß) $f(x,\xi) = x\xi^2$ $(\in C^2)$ | „Wahl von X"

$a=0,\ b=1,$

$$I(u) = \int_0^1 f(x,u'(x))\,dx = \int_0^1 x\,u'(x)^2\,dx \geq 0$$

$u(x)$



$X = \{u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = 1,\ u(1) = 0\}$

$m_X := \inf_{u\in X} I(u) \geq 0$

und X_{piec}, $m_{X_{piec}}$ wie früher ($u \in C^1_{piec}$);

$0 \leq m_{piec} \leq m_X$

Beh: (1) $m_X = m_{X_{piec}} = 0$

Bew: $\exists \{u_\nu\}_\nu \subseteq X$: $0 \leq I(u_\nu) \to 0,\ \nu \to \infty$

Dann: $\Rightarrow m_X = 0 \Rightarrow m_{X_{piec}} = 0$ (Konstr. u_ν: Buch

Auch: $\{u_\nu\}_\nu \subseteq X_{piec}$, $I(u_\nu) \to 0,\ \nu \to \infty$

(2) $\forall u \in X_{piec}: I(u) > 0 = m_{X_{piec}}$

($\Rightarrow$ Kein Minimierer, weder auf X noch auf X_{piec}) (!)

Bew: $I(u) = 0$, $u \in X_{piec}$

$\Rightarrow x\,u'(x)^2 = 0$ f.ü. $[0,1]$ $\Rightarrow$ $u'(x) = 0$ f.ü. $(0,1)$ (∇)

NB: $u \in X_{piec} \Rightarrow u$ stetig & $u(1) = 0$

$\overset{(\nabla)}{\Rightarrow} u \equiv 0$ ↯ $u(0) = 1$ ($u \in X_{piec}$).

Kein Minimierer, nicht einmal auf X_{piec} !

Was mit (E-L) ??

d

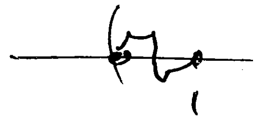
$\boxed{f(x,u,\xi) = f(u,\xi)}$ d.h., unabh. von x

Nach (E-L):

$$f(u(x), u'(x)) - u'(x) f_\xi(u(x), u'(x)) \equiv \text{konst.} \quad \forall x \in]a,b[$$

Immernoch kompliziert im allg.

Buch: konkrete (wichtige) Beispiele:



(1) $f_\lambda(u,\xi) = \frac{\xi^2 - \lambda^2 u^2}{2}$, $\lambda \geq 0$; $m_\lambda = \inf_{u \in X} I_\lambda(u)$

$\alpha = \beta = 0$, $a=0$, $b=1$

$\boxed{\lambda \leq \pi:}$ $m_\lambda = 0$

$\Rightarrow \int_0^1 u'(x)^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 u(x)^2 dx$ | $\boxed{\text{Poincaré-Wirtinger Ungl.}}$

$\forall u \in C^1([a,b])$, $u(0) = u(1) = 0$

$\lambda < \pi$: $u_0 \equiv 0$ eindeut. Min.

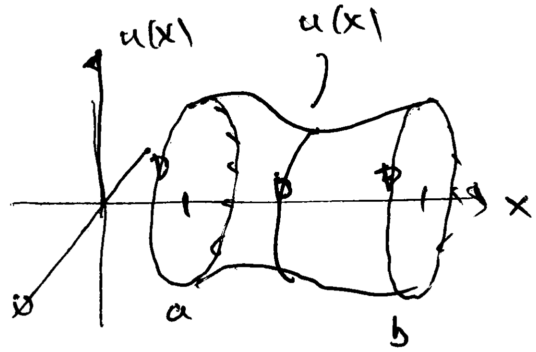
$\lambda = \pi$: ∞-viele Min. $u_\alpha(x) = \alpha \sin(\pi x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\lambda > \pi:}$ $m_\lambda = -\infty$ (kein Min).

(2) $f(u,\xi) = 2\pi u \sqrt{1+\xi^2}$

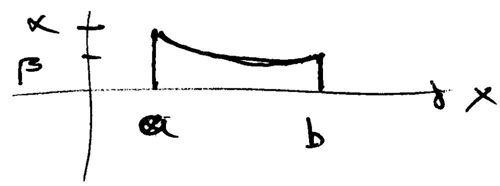
Areal von Rotationsfläche minimieren:

Lösung (wenn exist.; von a, b, α, β & λ abh.!)



$$u(x) = \lambda \cosh\left(\frac{x}{\lambda} + \mu\right), \quad \mu \in \mathbb{R}$$

"Kettenlinie"



(E-L) $(x\,u'(x))' = 0 \Rightarrow u'(x) = \frac{c}{x} \Rightarrow \underbrace{u(x) = c \log x + d}$

Nicht möglich (c & d so zu wählen, dass) : $x \in]0,1[$

$u(0) = 1$ & $u(1) = 0$

$(c = 0)$ $(d = 0)$

$d = 1$

Die Folgen $\{u_\nu\}_\nu$ oben sind "gebastellt" aus u oben ("abgeschnitten")
