

Ich: "Allgemeiner Existenzsatz"

(1)

Satz (Thm. 3.3 S. 92 & S. 96-97)Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen & beschr, $\partial\Omega$ Lip. Sei $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ (M_0)mit (H_1) $(u, z) \mapsto f(x, u, z)$ konvex $\forall x \in \bar{\Omega}$ $f = f(x, u, z)$ (H_2) $\exists p > 1, \alpha_1 > 0, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(x, u, z) \geq \alpha_1 |z|^p + \alpha_2 \quad \forall (x, u, z) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

 (H_3) $\exists \beta \geq 0$:

$$|f_u(x, u, z)|, |f_z(x, u, z)| \leq \beta(1 + |u|^{p-1} + |z|^{p-1}) \quad \forall (x, u, z) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Sei

$$(P) \inf \left\{ I(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx \mid u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\} =: m$$

mit $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ so dass (!) $I(u_0) < \infty$.Dann: (1) $\exists \bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ Minimierer von (P)
(i.e. $I(\bar{u}) \leq I(u) \quad \forall u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$)(2) Falls $(u, z) \mapsto f(x, u, z)$ strikte konvex $\forall x \in \Omega$:Die ^{auch} Minimierer $(\bar{u})$ ist eindeutig:

$$I(\bar{u}) < I(u) \quad \forall u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega), u \neq \bar{u}.$$

Beweis: Idee / Struktur / Taktik zu erst (dann auch Erweiterungen).(A) "Kompaktheit": $\forall (u_\nu)_\nu$ Minimierende Folge

$$(i.e. (u_\nu)_\nu \subseteq u_0 + W_0^{1,p}(\Omega), I(u_\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \inf \{ I(u) \} = m)$$

(B) gilt: $\exists K > 0: \|u_\nu\|_{W^{1,p}} \leq K$ ("beschr. in Norm") $\leadsto \exists$ Teilfolge (auch $(u_\nu)_\nu$) $\& \bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$u_\nu \rightarrow \bar{u} \text{ in } W^{1,p}(\Omega), \nu \rightarrow \infty \quad (*)$$

("Kompaktheit": Banach-Alaoglu
+ Details (" $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}$ ")
(Ex. 1.4.5))

(2)

(B) "Folgen-schwach-unten-Halbstetigkeit" :

$$(*) (*) (w_v \rightarrow \bar{w} \text{ in } W^{1,p}) \Rightarrow \liminf_{v \rightarrow \infty} I(w_v) \geq I(\bar{w})$$

(unabh. von "Minimierende Folge")

(C) Konklusion : Aus (*) & (*) folgt : (Immer!)

$$m := \inf \{ I(u) \} = \lim_{v \rightarrow \infty} I(u_v) = \liminf_{v \rightarrow \infty} I(u_v) \geq I(\bar{u}) \geq m$$

$\uparrow$
 $(u)_v$ Min. Folge

$m = \inf$
 $\leftarrow$

$$\Rightarrow I(\bar{u}) = m$$

 $\uparrow$
 $u_v \rightarrow \bar{u}$ & Folgen-schwach-unten-Halbstet
Bem. & Bsp.(a) Der Satz wird allg. behauptet, aber nur zum Teil bewiesen (siehe unten)(b) Voraus. OK für

$$f(x, u, z) = f(z) = \frac{1}{2} |z|^2 \quad (p = 2 > 1)$$

(letztes Mal!)

und für Kerallg.

$$f(x, u, z) = \frac{1}{p} |z|^p + g(x, u) \quad (p > 1),$$

g "schön" (C^1 z.B.) & $g \geq 0$
 & konvex (siehe unten)

(c) Nicht OK ist

$$f(x, u, z) = f(z) = \sqrt{1 + |z|^2} \quad \text{weil nur für } p=1$$

(Minimalflächen, Kap. 5)

(d) Ander Gegenbeispiel S. 94-96 (evt. später).

(3)

[Satz] (Allgem.; behauptet, kein Beweis) Result gilt auch unter:

(H₀) f Carathéodory Fkt.: $x \mapsto f(x, u, \xi)$ messbar $\forall (u, \xi)$
 $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ stet. für f.a. $x \in \bar{\Omega}$

(H₁) $\xi \mapsto f(x, u, \xi)$ konvex $\forall (x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$

(H₂) $\exists p > q \geq 1, \alpha_1 > 0, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ s.d.

$$f(x, u, \xi) \geq \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3 \quad \forall (x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Bem (1) Beweis in "grosses Dacorogna" ("direct methods...")

(2) werden sehen, wie mit (H₂) geht.

(3) Gegenbeispiel bei $p=q$ in (H₂):

Poincaré - Wirtinger Ungl.: $n=1, \lambda > \pi^2$ &

$$f(x, u, \xi) = f(u, \lambda) = \frac{1}{2} (\xi^2 - \lambda^2 u^2)$$

Dann $m = \inf \{I(u)\} = -\infty$.

(4) (H₀) erlaubt es den Fall (z.B.)

$$f(x, u, \xi) = \frac{1}{2} |\xi|^2 - h(x)u, \quad h \in \underline{L^2(\Omega)}$$

zu behandeln (E-L Gl: Poisson Gl. $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$).

(4)

Beweis (Details) von (A) "Kompaktheit"

Verwendet: (H_{2+}) (nicht $(H_0), (H_{2+}), (H_3)$; siehe später)

n.v.: $I(u_0) < \infty, u_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$

und $u_0 = u_0 + 0 \in W_0^{1,p}(\mathbb{R})$ ($0 \in W_0^{1,p}(\mathbb{R})$!)

so $-\infty < m := \inf \{I(u)\} \leq I(u_0) < \infty$

Sei $(u_v)_v$ Minimierende Folge für (P):

$I(u_v) \rightarrow m, v \rightarrow \infty$, d.h. $m+1 \geq I(u_v)$
"für v groß genug"

Von (H_{2+}) :

$$\begin{aligned} I(u_v) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, u_v(x), \nabla u_v(x)) dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} [\alpha_1 |\nabla u_v(x)|^p + \alpha_3] dx \\ &= \alpha_1 \|\nabla u_v\|_{L^p}^p + \alpha_3 |\mathbb{R}| \quad (\text{Mass von } \mathbb{R} < \infty) \\ &\geq \alpha_1 \|\nabla u_v\|_{L^p}^p - |\alpha_3| \cdot |\mathbb{R}| \end{aligned}$$

D.h., $\frac{1}{\alpha_1} (m+1 + |\alpha_3| \cdot |\mathbb{R}|) \geq \|\nabla u_v\|_{L^p}^p$ für v groß genug

so: $\exists \alpha_4 > 0: \|\nabla u_v\|_{L^p} \leq \alpha_4$, (+ ... unwichtig)

Poincaré ($\exists \gamma > 0: \|u\|_{W^{1,p}} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R})$)

& " $u_v \in u_0 + W_0^{1,p}(\mathbb{R})$ " bringt (letztes Mal!)

$\exists \alpha_5, \alpha_6 > 0:$
 $\alpha_4 \geq \|\nabla u_v\|_{L^p} \geq \alpha_5 \|u_v\|_{W^{1,p}} - \alpha_6 \|u_0\|_{W^{1,p}}$

so dass:

(#) ($k=$) $\alpha_7 := \frac{1}{\alpha_5} (\alpha_4 + \alpha_6 \|u_0\|_{W^{1,p}}) \geq \|u_v\|_{W^{1,p}} \quad \forall v$

in (A).

(später: Erweiterung!).

bis hier
Tafel

Dieser Satz mündlich / sehr oberflächlich (5)

Beweis (Details) von (B) "Stetigkeit" (Folgen-schwach-nutzen)

Verwendet: $(H_0) + (H_{1+}) + (H_3)$ (nicht (H_{2+}) ; siehe später)
(NB! Verwendet nicht "Min. Folge")

$(H_0) + (H_{1+})$ gibt

$$f(x, u_v, \nabla u_v) \geq f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) + f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \cdot (u_v - \bar{u}) \quad (\forall)$$

$$+ \angle f_z(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}); \nabla u_v - \nabla \bar{u} >$$

$(g \in C^1 \wedge \text{konvex} \Leftrightarrow g(x) \geq g(y) + \angle \nabla g(y); x - y > \underline{\forall x, y.})$
("Stützhyperebene" zur Graphen)

Beh: $(H_3) \wedge \bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$

$(\square\square) \Rightarrow f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \in L^{p'}(\Omega) \wedge f_z(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n), \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Aus $(\square\square)$ folgt: von Hölder's Ungl.:

$$\underbrace{f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \cdot (u_v - \bar{u})}_{\in L^p}, \underbrace{\angle f_z(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}); \nabla u_v - \nabla \bar{u}}_{\in L^{p'}} \in \underline{L^1(\Omega)}$$

so dass wir in $(\forall)$ integrieren können.

Bew. "Beh.":

$$\int_{\Omega} |f_u(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))|^{p'} dx \leq \beta^{p'} \int_{\Omega} \left(1 + |\bar{u}(x)|^{p-1} + |\nabla \bar{u}(x)|^{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} dx$$

$$\stackrel{(!)}{\leq} \beta_1 (1 + \|\bar{u}\|_{W^{1,p}}^p) < \infty.$$

($\frac{1}{p'} = \frac{p}{p-1}$)

(β_1 eine Kste) (A ähnlich für f_z).

Integrieren in $(\forall)$:

$$(\Delta) \quad I(u_v) \geq I(\bar{u}) + \int_{\Omega} \underbrace{f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})}_{\in L^{p'}} \underbrace{(u_v - \bar{u})}_{\in L^p} + \underbrace{\angle f_z(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})}_{\in L^{p'}} \underbrace{(\nabla u_v - \nabla \bar{u})}_{\in L^p} dx$$

Früh: $u_v \rightarrow \bar{u}$ in $W^{1,p}$ i.e. $u_v - \bar{u} \rightarrow 0$ in L^p .
 $\nabla u_v \rightarrow \nabla \bar{u} \rightarrow 0$

$$(\Delta) \Rightarrow \liminf_{v \rightarrow \infty} I(u_v) \geq I(\bar{u}) + 0 = I(\bar{u})$$

+

Beweis (Details) von (A1) "Kompaktheit" unter nur (H_2) (6)

$(H_2) \exists p > q \geq 1, \alpha_1 > 0, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ s.d.

$$f(x, u, z) \geq \alpha_1 |z|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3 \quad \forall (x, u, z) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

Beh: $\forall (u, v)_r$ Min. Folge für $(P1: \exists \gamma_q > 0: \|u, v\|_{W^{1,p}} \leq \gamma_q$
(rest gleich). $\forall v$

Bew: $I(u, v) \rightarrow m = \inf I(u) \Rightarrow m+1 \geq I(u, v), \forall \text{ g.w.p.}$

Nach (H_2) & int. über Ω :

$$m+1 \geq I(u, v) \geq \alpha_1 \|\nabla u, v\|_{L^p}^p - |\alpha_2| \|u, v\|_{L^q}^q - |\alpha_3| \cdot |\Omega| \quad (*)$$

Mit Hölder ($p > q$!)

$$(**) \|u, v\|_{L^q}^q = \int_{\Omega} |u, v|^q \leq \left(\int_{\Omega} |u, v|^p \right)^{q/p} \left(\int_{\Omega} 1 \, dx \right)^{p-q/p} = |\Omega|^{p-q/p} \|u, v\|_{L^p}^q$$

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{q}{p} + \frac{p-q}{p} = 1; \quad r > 1 \text{ da } q < p \right)$$

$(**) \wedge (*) \Rightarrow$

$$m+1 \geq \alpha_1 \|\nabla u, v\|_{L^p}^p - \gamma_1 \|u, v\|_{L^p}^q - \gamma_2 \geq \alpha_1 \|\nabla u, v\|_{L^p}^p - \gamma_1 \|u, v\|_{W^{1,p}}^q - \gamma_2$$

"Poincaré" wie früher & letztes Mal: $\Rightarrow$

$$m+1 \geq \gamma_3 \|u, v\|_{W^{1,p}}^p - \gamma_4 \|u, v\|_{W^{1,p}}^p - \gamma_1 \|u, v\|_{W^{1,p}}^q - \gamma_5$$

$$\text{s.d.} \quad m+1 \geq \gamma_3 \|u, v\|_{W^{1,p}}^p - \gamma_1 \|u, v\|_{W^{1,p}}^q - \gamma_6 \quad (\gamma_6 > 0 \text{ Krist'eu})$$

$$\mathbb{R}^+ \ni G(\|u, v\|_{W^{1,p}}), \quad G(X) := \gamma_3 X^p - \gamma_1 X^q - \gamma_6, \quad X \geq 0$$

G stetig & $G(X) \rightarrow +\infty, X \rightarrow +\infty$ (da $p > q$)

$$\text{so } (II) \Rightarrow \exists \gamma_q > 0: X = \|u, v\|_{W^{1,p}} \leq \gamma_q \quad \square$$

Bem: Für f auf dem Form

(7)

$$f(x, u, z) = g(x, u) + h(x, z)$$

wird in eine Aufgabe der Bedingung-

auf g bzgl. C^1 sehr schön abgeschwächt:

$$g \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}), \quad g \geq 0 \quad \& \quad 3 \text{ Fälle:}$$

$$\begin{aligned} p > n \quad (1) \quad & |g(x, u) - g(x, v)| \leq \gamma |u - v| \\ (\mathbb{R}^n) \quad & \forall x \in \bar{\Omega}, \forall u, v \in \mathbb{R} \text{ mit } |u|, |v| \leq R \wedge \gamma = \gamma(R) \end{aligned}$$

$$p = n \quad (2) \quad \dots$$

$$p < n \quad (3) \quad \dots$$

Der Beweis der Stetigkeit ("Kompaktheit" ist gleich)
verwendet dann sehr schön die kompakte
Sobolev-einbettung (Rellich-Kondrathe).

Var-Rech.

Sem. 2024

25/6/24

Mein

Vortrag: Allgem. Existenzsatz

Übersicht / Struktur

- 1) Satz (wie bewiesen - i.e. mit $(H_1), (H_2), (H_3), (G_1) \vdash$ ^{C^1} immer ✓
- 2) Fundamentale Beweisideen: Kompaktheit + ungeschaltet $\rightarrow$ Exist. ✓
(grob aufschreiben) (Erweitbarkeit.)
- 3) Erweiterungen / allgemeins (Formulieren: C^0 / Carathéodory
 $(H_1), (H_2), \gamma \vdash$ konvergiert)
- 4) Beweisdetails Satz. ✓
- 5) Kleine Erweiterungen: Aus Aufgaben 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4 wählen
(jeweils in Schema einpassen!)
- 6) Beispiele erwähnen (Details?!) - vielleicht auch früher