

Problem 

$$u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N) \\ u = u(x_1, \dots, x_n)$$

$$D_j = \partial_{x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\nabla u = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

Multindex

$$A_n = \{ a = (a_1, \dots, a_n) \mid a_j \in \mathbb{N}_0, \sum_{j=1}^n a_j = k \}$$

~~1/2~~

$$\text{Für } a \in A_n: D^a u = D_1^{a_1} D_2^{a_2} \dots D_n^{a_n} = \frac{\partial^{|a|} u}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}$$

$$\text{Und (!)} \quad \nabla^k u = (D^a u)_{a \in A_n} \quad (\text{die Menge aller})$$

$$\text{Ableitungen von Ordnung } k) \quad \begin{aligned} \text{supp } u &= \{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\} \\ & \quad (u \text{ stetig}) \\ C_0(\Omega) &= \{u \in C(\Omega) \mid \text{supp } u \text{ kompakt}\} \end{aligned}$$

Funktionsräume $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Menge

$$(1) \quad C^0(\Omega) = C(\Omega) : \text{stetige Funktion } u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left[C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) = C(\Omega; \mathbb{R}^N) : \text{stetige Funktion } u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \right. \\ \left. \text{i.e. } u = (u_1, \dots, u_N), \quad u_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \right]$$

$$C^0(\bar{\Omega}) = C(\bar{\Omega}) : \text{stetige, beschränkte Funktl. } u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{die eine stetige, beschränkte Fortsetzung} \\ \text{zu } \bar{\Omega} \text{ hat}$$

$$\|u\|_{C^0} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| \quad \text{ist norm auf}$$

$$C(\bar{\Omega}), \text{ weil } (C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^0}) \text{ ist Banachraum.}$$

~~Problem~~

Ähnlich:

(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$

$C^k(\Omega)$: $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ so dass $D^\alpha u$ existiert
und ist stetig für alle
 $\alpha \in A_m$, $0 \leq m \leq k$
(i.e. $\forall \alpha$, $|\alpha| \leq k$).

$C^k(\bar{\Omega})$: Wie oben, aber alle $D^\alpha u$ lassen sich
fortsetzen als stetige und beschränkte
Funktion auf $\bar{\Omega}$

Norm:

$$\|u\|_{C^k} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha u(x)|$$

auf $C^k(\bar{\Omega})$

$$= \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|u\|_\alpha, \quad \|u\|_\alpha = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha u(x)|$$

Äquivalente Norm (!)

$$\|u\|_{\tilde{C}^k} = \sum_{\substack{|\alpha|, \\ 0 \leq |\alpha| \leq k}} \|u\|_\alpha$$

(l_∞, l_1 resp. auf $A_k \dots$).($\tilde{C}^k, \|\cdot\|_{\tilde{C}^k}$) sind Banach. (!)

$$C_0^k(\Omega) = C^k \cap C_0, \quad C^\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega, \bar{\Omega}).$$

$$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty \cap C_0$$

{ $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ähnlich }

~~Problem~~ ☒

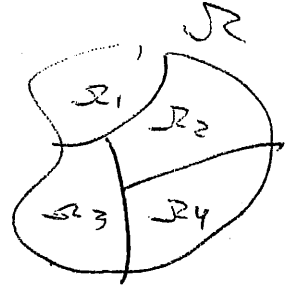
(3) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ~~open~~ offen

$C_{\text{piec}}(\bar{\Omega})$: $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig

$\exists$ offene Mengen $\Omega_i, i=1, \dots$
(endlich viele oder abzählbare)

$$\Omega_i \subseteq \Omega, \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^I \bar{\Omega}_i$$

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad i \neq j$$



$u|_{\bar{\Omega}_i}: \bar{\Omega}_i \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und stetig

$C_{\text{piec}}^k(\bar{\Omega})$: ähnlich (alle partielle Abl. in $C_{\text{piec}}(\bar{\Omega})$)

C^k 's sind "schlechte" Räume: In der
Regulartitätstheorie: $-\Delta u = f, \quad f \in C^k$
 $\Rightarrow u \in C^{k+2}$

(Grund: entspricht zu zeigen gewisse Operationen
 $C^{k+2} \rightarrow C^k$ oder $C^k \rightarrow C^{k+2}$ sind beschränkt
in C^k -norm - stimmt oft nicht!)

Besser: Hölder-Räume

(4) Für $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (allgemein) $u: D \rightarrow \mathbb{R}$,
 $0 < \alpha \leq 1$ (!)

$$[u]_{C^{0,\alpha}(D)} = \sup_{\substack{x, y \in D \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\}$$

(4)

Problem

(i.e. $|u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^\alpha$, $x, y \in D$)
 $C = [u]_{C^{0,\alpha}(D)}$ ($\alpha = 1$: Lipschitz !)

$$\underline{C^{0,\alpha}(\Omega)}: \quad u \in C(\bar{\Omega}) \quad \text{und} \\ [u]_{C^{0,\alpha}(K)} < \infty \quad \forall K \subset \bar{\Omega} \\ \text{kompakt}$$

$$\underline{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}: \quad \text{aber } [u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} < \infty$$

$$\text{norm: } \|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + [u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

(gibt Banachraum)

$$\underline{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})}: \quad u \in C^k(\bar{\Omega}) \text{ so dass}$$

$$\forall \alpha \in A_k: \quad [D^\alpha u]_{C^{0,\alpha}(K)} < \infty \quad \forall K \subset \bar{\Omega} \\ \text{kompakt}$$

$$\underline{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})}: \quad u \in C^k(\bar{\Omega}) \text{ s.d.}$$

$$[D^\alpha u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} < \infty$$

$$\forall \alpha \in A_k$$

$$\text{norm: } \|u\|_{C^{k,\alpha}} = \|u\|_{C^k} + \max_{\alpha \in A_k} [D^\alpha u]_{C^{0,\alpha}}$$

→ Banachraum!

$$(\text{wieder: auch } \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}} = \dots + \sum_{\alpha \in A_k} [D^\alpha u]_{C^{0,\alpha}}$$

äkr. norm.)

$$[C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)]$$

Problem ☒

(5)

Eigenschaften: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1 \quad k \geq 0$$

$$u, v \in C^{0, \alpha}(\bar{\Omega}) \Rightarrow u, v \in C^{0, \alpha}(\bar{\Omega})$$

(Algebra!)

$$C^k(\bar{\Omega}) \supset C^{k, \alpha}(\bar{\Omega}) \supset C^{k, \beta}(\bar{\Omega}) \supset C^{k, 1}(\bar{\Omega})$$

$$\Omega \text{ convex : } C^{k, 1}(\bar{\Omega}) \supset C^{k+1}(\bar{\Omega})$$

(alle stückt!).

$$u, v \in C^{k, \alpha}(\bar{\Omega}) \Rightarrow uv \in C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})$$

falls Ω "brav" (ex. vord. Lipschitz / glat.)

Beispiele in Aufgaben:

- u stetig, $u \notin C^{0, \alpha} \quad \forall \alpha \in (0, 1]$
- Beispiele $u \in C^\alpha$
- $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $u \notin C^{0, \alpha}(\bar{\Omega})$ für $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1]$
- Ω "brav" : $u \in C^{0, \alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, $v \in C^{0, \beta}(u(\bar{\Omega}))$
 $\Rightarrow uv \in C^{0, \alpha \wedge \beta}(\bar{\Omega})$

~~stetig~~ (??)

(6)

~~Problem~~ L^p -räume $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p \leq \infty$ $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar; $u \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow$

$$\|u\|_{L^p} < \infty \quad \text{wo}$$

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf \left\{ \alpha \mid |u(x)| \leq \alpha \text{ f.ü. } \Omega \right\}$$

$$\left[u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, u = (u^1, \dots, u^N), u^i \in L^p(\Omega) \right]$$

(Äquivalenzklassen von Funktionen; $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ f.ü.)Eigenschaften: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p \leq \infty$ (a) $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ ist Banach $(L^2, \|\cdot\|_{L^2})$ ist Hilbert, $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$

$$(b) \text{ Hölder: } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \left(p' = \frac{p}{p-1} \right)$$

$$1 \leq p \leq \infty, u \in L^p, v \in L^{p'}$$

$$\Rightarrow uv \in L^1, \|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}$$

(c) Dualraum $L^p(\Omega)$ ist $L^{p'}(\Omega)$:

$$(L^p(\Omega))' = (L^{p'}(\Omega)) \quad (" \cong ")$$

wenn ! $1 \leq p < \infty$ (nicht wenn $p = \infty$! $L' \subsetneq (L^\infty)'$).

~~Problem~~

D.h. $\varphi \in (L^p)'$, $1 \leq p < \infty$ (7)

$\Rightarrow \exists! u \in L^{p'}$:

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} u(x) f(x) dx \quad \forall f \in L^p_{\mathbb{R}}.$$

$$\text{und } \|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

(d) L^p separabel wenn $1 \leq p < \infty$

reflexiv wenn $1 < p < \infty$

$$((L^p)')' = L^p$$

rel $1 \leq p < \infty$: $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq L^p$ ist dicht

Stückweise constant ($\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$: "Treppenfkt")
dicht:

$$\forall u \in L^p \exists \{u_n\} \subseteq C_0^\infty:$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{L^p} = 0$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists u_\varepsilon \in C_0^\infty: \|u - u_\varepsilon\|_{L^p} < \varepsilon)$$

Konvergenz in L^p

$1 \leq p \leq \infty$: Starke Konvergenz: $u_n, u \in L^p$, $u_n \rightarrow u$ in L^p
(stark)
 $\Leftrightarrow \|u_n - u\|_{L^p} \rightarrow 0$

$1 \leq p < \infty$: Schwache Konvergenz: $u_n, u \in L^p$, $u_n \rightharpoonup u$ in L^p
 $\int (u_n - u) \varphi \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in L^{p'}$

(8)

Problem

$$[p = \infty] \quad u_n, u \in L^\infty, \quad u_n \xrightarrow{*} u \text{ in } L^\infty$$

(schwach - stern)

$$\text{dann} \quad \int (u_n - u) \varphi \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in L^1 \quad (\neq (L^\infty)')$$

~~Wichtig~~

- Grenzp. eindeutig

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^p \Rightarrow \begin{cases} u_n \rightarrow u \text{ in } L^p & 1 \leq p < \infty \\ u_n \xrightarrow{*} u \text{ in } L^\infty \end{cases}$$

(≠ : Beispiele).

Eigenschaften: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ~~offen~~ offen, beschränkt.

$$\text{a) } u_n \xrightarrow{*} u \text{ in } L^\infty \Rightarrow u_n \rightarrow u \text{ in } L^p$$

 $1 \leq p < \infty$

$$\text{b) } 1 \leq p < \infty, \quad u_n \rightarrow u \text{ in } L^p$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^p} = \lim_n \|u_n\|_{L^p}$$

(norm stetig - starke Konv.)

$$\text{c) } 1 \leq p < \infty, \quad u_n \rightarrow u \text{ in } L^p$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0: \|u_n\|_{L^p} \leq \delta$$

$$\text{und} \quad \|u\|_{L^p} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^p}$$

(schwach Halbstetig!)(auch wenn $u_n \xrightarrow{*} u \text{ in } L^\infty$)

Problem

(d) $1 < p < \infty$ (!)~~Sei~~ Sei $\gamma > 0$ s.d. $\|u_n\|_{L^p} \leq \gamma$ $\Rightarrow \exists \{u_{n_k}\}_k, u \in L^p$ s.d. $u_{n_k} \rightarrow u$ in L^p (beschränkte Folge habe schwach konv. Teilfolge)Def: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p \leq \infty$ $u \in L^p_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow u \in L^p(\Omega')$ $\forall \Omega'$ ~~offen~~ $\Omega' \subseteq \Omega$, $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, $\overline{\Omega'}$ KompaktSatz (Fundamental Lemma der Vari. Rech) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ off., $u \in L^1_{loc}$ s.d.

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

 $\Rightarrow$ ~~u~~ $u = 0$ fast überall in Ω

