9. Implizit definierte Funktionen

Ziel: Sei $(x,y) \mapsto F(x,y) \in \mathbb{R}$ „hinreichend glatte" Fkt. mit

Nullstellenmenge $N := \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$

Frage: $\exists$ glatte Fkt. $x \mapsto g(x)$, so dass $(x, g(x)) \in N$,
d.h. durch Auflösen von $F(x,y) = 0$ nach y?

Zur Vorbereitung:

9.1. Banachscher Fixpunktsatz

9.1. Definition (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$

- f Lipschitz-stetig $:\Leftrightarrow$ $\exists L \in]0,\infty[: \forall x, x' \in X :$
$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \underset{\uparrow \text{ Lipschitz-Konstante}}{L} \cdot d_X(x, x')$$

[klar: Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ stetig]

- f Kontraktion $:\Leftrightarrow$ f Lipschitz-stetig mit $L \in]0,1[$

9.2. Banachscher Fixpunktsatz

Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion. Dann gilt:

(a) $\exists!\, \xi \in X$ mit $f(\xi) = \xi$; d.h. f hat genau einen Fixpkt.

(b) Sei $x_0 \in X$ bel., und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq X$ def. durch
$$x_{n+1} := f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$
Dann gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \xi$.

9.3. Bemerkung

- mächtiges, vielseitiges Werkzeug; insbes. auch, da konstruktiv (wegen (b)).
- Fundament der Theorie der gewöhnlichen Differential-gleichungen (Picard-Lindelöf).
- Typische Anwendung: sichert Existenz der Lösung einer Gleichung, wenn diese als Fixpunkt interpretierbar.

Beweis von Satz 9.2.

(i) Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (b) konvergiert.

Sei $x_0 \in X$ bel.

Beh.: $d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

per Induktion:
- $n = 0$ klar
- $n-1 \to n$: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $d(x_n, x_{n-1}) \leq L^{n-1} d(x_1, x_0)$ (*)

$$\Rightarrow \quad d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \underset{f \text{ Lipschitz}}{\leq} L\, d(x_n, x_{n-1}) \overset{(*)}{\leq} L^n d(x_1, x_0). \quad ✓$$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}$:

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \sum_{\mu=0}^{m-1} \underbrace{d(x_{n+\mu+1}, x_{n+\mu})}_{\leq L^{n+\mu} d(x_1, x_0) \text{ Beh (oben)}}$$

$$\leq L^n d(x_1, x_0) \underbrace{\sum_{\mu=0}^{m-1} L^\mu}_{\leq \sum_{\mu\in\mathbb{N}_0} L^\mu} \underset{L<1\,!}{\leq} \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0) \quad (*)$$

Wiederum, da $L < 1 \Rightarrow (x_n)_n$ ist Cauchy.

$\mathbb{X}$ vollst. $\Rightarrow \quad \xi := \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert.

(ii) ξ ist Fixpunkt

$$f(\xi) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{x_{n+1}} = \xi \quad ✓$$

(iii) Eindeutigkeit

Seien $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{X}$ Fixpunkte von f

$\Rightarrow \quad d(\xi_1,\xi_2) = d(f(\xi_1), f(\xi_2)) \leq L\, d(\xi_1,\xi_2)$

$\Rightarrow \quad \underbrace{d(\xi_1,\xi_2)}_{\geq 0}\, \underbrace{(1-L)}_{> 0} \leq 0$

$\Rightarrow \quad d(\xi_1,\xi_2) = 0 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2$ ∎

Es folgt, aus (*) mit $m \to \infty$:

$\forall x_0 \in \mathbb{X}, \ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$d(\xi, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d(f(x_0), x_0) \quad \text{(Fehlerabschätzung)}$$

9.2. Satz über implizite Funktionen

9.4. Satz (über implizite Fkt.'en)

Seien $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathbb{R}^\nu$ offen und sei

- $F: \begin{array}{l} \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^\nu \\ (x,y) \longmapsto F(x,y) \end{array}$ stetig diff.bar
- $(a,b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ mit $F(a,b) = 0$
- Für $D_{(y)}F := \dfrac{\partial(F_1,\dots,F_\nu)}{\partial(y_1,\dots,y_\nu)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_\nu} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_\nu}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_\nu}{\partial y_\nu} \end{pmatrix}$

gelte: $(D_{(y)}F)(a,b)$ sei invertierbar.

Dann $\exists$ Umgebungen $V_1 \subseteq \mathcal{U}_1$ von a, $V_2 \subseteq \mathcal{U}_2$ von b und $\exists\, g: V_1 \to V_2$ stetig diff.bar mit

(i) $g(a) = b$

(ii) $F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in V_1$

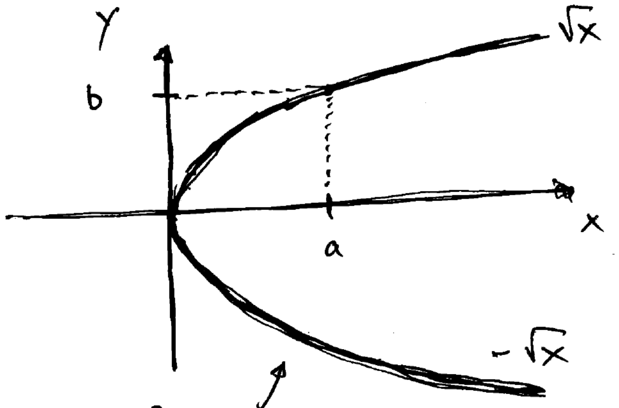
(iii) ist $(x,y) \in V_1 \times V_2$ mit $F(x,y) = 0 \implies y = g(x)$

(iv) $(D_{(y)}F)(x, g(x))$ ist invertierbar $\forall x \in V_1$

und

$$\underbrace{(Dg)(x)}_{\nu \times d\text{-Matrix}} = -\underbrace{\left[(D_{(y)}F)(x,g(x))\right]^{-1}}_{\nu \times \nu\text{-Matrix}} \underbrace{(D_{(x)}F)(x,g(x))}_{\nu \times d\text{-Matrix}}$$

9.5. Beispiel: $U_1 = U_2 = \mathbb{R}$ $\quad F(x,y) = x - y^2 \in \mathbb{R}$



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}$

- $b \underset{(<)}{>} 0 \Rightarrow g(x) = \underset{(-)}{+}\sqrt{x}$
- Voraussetzung $(D_{(y)}F)(a,b)$ invertierbar wesentlich, da für $(a,b) = (0,0)$ gilt:
  $$D_{(y)}F(0,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0 \text{ und}$$
  $\nexists$ Umgebung V_1 von 0 und $g : V_1 \to \mathbb{R}$ diff. bar mit
  $$F(x, g(x)) = 0.$$

- Verkleinerung von U_1 zu V_1 im Satz wesentlich; hier: $V_1 \cap]-\infty, 0] = \emptyset$
- Verkleinerung von U_2 zu V_2 wesentlich für (iii) in Satz 9.4.: für $0 < a \in V_1$ und $b = \underset{(-)}{+}\sqrt{a}$ muss gelten
  $$V_2 \cap \{\underset{(+)}{-}\sqrt{x} : x \in V_1\} = \emptyset.$$

<u>Beweis von Satz 9.4.</u> o.E. $(a,b) = (0,0)$ [sonst verschieb F]

<u>1. Akt.: Formulierung von $F(x,y) = 0$ als Fixpkt.problem</u>

Setz $Y := (D_{(y)}F)(0,0) \overset{\text{n.V.}}{\in} GL(\nu, \mathbb{R})$

$$G : \begin{array}{l} U_1 \times U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^\nu \\ (x,y) \longmapsto G(x,y) := y - Y^{-1}F(x,y) \end{array}$$

somit G stetig diff. bar mit

$$(D_{(y)}G)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_\nu} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial G_\nu}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_\nu}{\partial y_\nu} \end{pmatrix}(x,y) = \mathbb{I} - Y^{-1}(D_{(y)}F)(x,y)$$

und $F(x,y) = 0 \iff G(x,y) = y$ (0)

Weiterhin: (1) $G(0,0) = 0$

(2) $(D_{(y)}G)(0,0) = 0$

(3) $\exists\, W_1 \subseteq \mathcal{U}_1$, Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^d$,
$\exists\, W_2 \subseteq \mathcal{U}_2$, " " " " $\mathbb{R}^\nu$, so dass

$$\|(D_{(y)}G)(x,y)\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in W_1 \times W_2$$

(denn: $\frac{\partial G_j}{\partial y_k}$ stetig in (x,y), und (2))

(4) $\exists\, r > 0$ mit $V_2 := \{ y \in \mathbb{R}^\nu : \|y\| \leq r \} \subseteq W_2$
abgeschlossen!

und, wegen (1) und G stetig,
$\exists\, V_1 \subseteq W_1$, Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^d$:

$$\sup_{x \in V_1} \|G(x,0)\| \leq \frac{r}{2}$$

(5) Sei $x \in V_1$ bel., fest. $\Rightarrow \forall y, y' \in V_2$ gilt

$$\|\underbrace{G(x,y) - G(x,y')}_{\int_0^1 (D_{(y)}G)(x,\, y'+t(y-y'))\,dt\,(y-y')}\| \overset{(3)}{\leq} \frac{1}{2}\|y-y'\|$$

HDI, Satz 8.23

(6) Sei $x \in V_1$ bel., fest $\Rightarrow \forall y \in V_2$

$$\|G(x,y)\| \leq \underbrace{\|G(x,y) - G(x,0)\|}_{\overset{(5)}{\leq} \frac{r}{2}} + \underbrace{\|G(x,0)\|}_{\overset{(4)}{\leq} \frac{r}{2}} \leq r$$

aus (5) & (6): $\forall x \in V_1$ ist $G(x,\cdot) : \begin{array}{l} V_2 \to V_2 \\ y \mapsto G(x,y) \end{array}$

eine Kontraktion auf dem <u>vollst.</u> (!) metr. Raum V_2 (vgl. Üb.)

$\Rightarrow$ Banachscher Fixpkt.satz: $\exists!$ Fixpunkt $g(x) \in V_2$ von $G(x,\cdot)$, d.h. $G(x, g(x)) = g(x) \overset{(0)}{\Leftrightarrow} F(x, g(x)) = 0$
$\Rightarrow$ Beh. (ii)

- da Fixpunkt $g(x) \in V_2$ eindeutig $\Rightarrow$ Beh (iii) ✓
- (1) & Eindeutigkeit $\Rightarrow g(0) = 0$; also Beh. (i) ✓

Definiere Fkt. $g: V_1 \to V_2, \ x \mapsto g(x)$

2. Akt: Stetigkeit von g:

aus erneuter Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, diesmal mit <u>vollst.</u> (!) metrischem Raum (vgl. Übung)

$$Z := \{\varphi : V_1 \to V_2 \text{ stetig}\}$$

mit Metrik $\displaystyle d_\infty(\varphi_1, \varphi_2) := \sup_{x \in V_1} \|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$

(NB: V_2 beschr. $\Rightarrow \varphi \in Z$ beschränkt, da $\operatorname{diam} \varphi(V_1) \leq \operatorname{diam}(V_2) < \infty$)

Betrachte $\Phi: \begin{array}{l} Z \to Z \\ \varphi \mapsto \Phi(\varphi), \ (\Phi(\varphi))(x) := G(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in V_1 \end{array}$

- $\Phi(\varphi)$ stetig, da G u. φ stetig
- $\forall x \in V_1: \|(\Phi(\varphi))(x)\| \underset{(6),\ \varphi(x) \in V_2}{\leq} r$

$\Bigg\} \Rightarrow \Phi$ wohldef. da $\Phi(\varphi) \in Z$

- Φ Kontraktion, da $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in Z$:

$$d_\infty(\Phi(\varphi_1), \Phi(\varphi_2)) = \sup_{x \in V_1} \|\underbrace{(\Phi(\varphi_1))(x) - (\Phi(\varphi_2))(x)}_{G(x,\varphi_1(x)) - G(x, \varphi_2(x))}\|$$

$$\underset{(5),\ \varphi_{1/2}(x) \in V_2}{\leq} \frac{1}{2} \sup_{x \in V_1} \|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| = \frac{1}{2} d_\infty(\varphi_1, \varphi_2)$$

$\Rightarrow$ Banachscher Fixpktsatz $\exists!\ \tilde{\varphi} \in Z$ mit

$$\Phi(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi} \iff \forall x \in V_1 : G(x, \tilde{\varphi}(x)) = \tilde{\varphi}(x)$$

1. Abt $\Rightarrow$ Fixpkt $g(x)$ eindeutig in V_2 $\forall x \in V_1$ $\Rightarrow$ $\tilde{\varphi} = g$
$\Rightarrow$ g stetig.

3. Abt: Diff. barkeit von g

(a) NB: $M \in Mat(\nu \times \nu, \mathbb{R})$ invertierbar $\iff \det(M) \neq 0$ (7)

u. V. ist
- $\Delta : \begin{array}{l} V_1 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \det\big((D_{(y)}F)(x, g(x))\big) \end{array}$ stetig

  da alle Einträge der Matrix stetig ($D_{(y)}F$ stetig, g stetig) und „det" ist Polynom in den Einträgen
- $\Delta(0) \neq 0$ ($b = g(a=0) = 0$).

$\Rightarrow \exists V_1' \subseteq V_1$ Umgebung von $a = 0$,

so dass $\Delta(x) \neq 0 \quad \forall x \in V_1'$

$\overset{(7)}{\Rightarrow} (D_{(y)}F)(x, g(x))$ invertierbar $\forall x \in V_1'$ (8)

o. E. sei V_1 bereits so klein, dass (8) wahr $\forall x \in V_1$

(b) Sei $x \in V_1$ bel. fix und $\xi \in \mathbb{R}^d$ bel., so dass $x + \xi \in V_1$,

$$A := (D_{(x)}F)(x, g(x)) \in Mat(\nu \times d; \mathbb{R})$$

$$B := (D_{(y)}F)(x, g(x)) \in GL(\nu; \mathbb{R}) \quad \text{wegen (a)}$$

F diff. bar in $(x, g(x)) \in V_1 \times V_2 \subset U_1 \times U_2$:

$$\Rightarrow \quad 0 \overset{(ii)}{=} F(x+\xi, \underbrace{g(x+\xi)}_{=:\, g(x) + \delta g_x(\xi)}) = \underbrace{F(x, g(x))}_{0} + \underbrace{\overbrace{(A \,\vdots\, B)}^{(DF)(x,g(x))} \begin{pmatrix} \xi \\ \delta g_x(\xi) \end{pmatrix}}_{A\xi + B\delta g_x(\xi)} + \underbrace{\varphi(\xi, \delta g_x(\xi))}_{o\left(\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \delta g_x(\xi) \end{pmatrix} \right\|\right)}$$

$$\Rightarrow \quad g(x+\xi) - g(x) = \delta g_x(\xi)$$

$$= -B^{-1}A\xi - \underbrace{B^{-1}\varphi(\xi, \delta g_x(\xi))}_{=:\, \psi(\xi)} \qquad (9)$$

(c) Zeige $\psi(\xi) = o(\|\xi\|)$ $\big(\Rightarrow g$ diff-bar in x und $(Dg)(x) = -B^{-1}A$, also (iv)$\big)$.

Fixiere $x \in V_1$.

$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ x+\xi \in V_1$, gilt:

- $$\frac{\|\psi(\xi)\|}{\|\xi\|} \le \|B^{-1}\| \underbrace{\frac{\left\|\binom{\xi}{\delta g_x(\xi)}\right\|}{\|\xi\|}}_{=:T_1(\xi)} \underbrace{\frac{\|\varphi(\xi, \delta g_x(\xi))\|}{\left\|\binom{\xi}{\delta g_x(\xi)}\right\|}}_{=:T_2(\xi)}$$

- $$\Big\|\underbrace{\binom{\xi}{\delta g_x(\xi)}}_{\binom{\xi}{0}+\binom{0}{\delta g_x(\xi)}}\Big\|_{\mathbb{R}^{d+\nu}} \le \|\xi\|_{\mathbb{R}^d} + \|\delta g_x(\xi)\|_{\mathbb{R}^\nu} \qquad (10)$$

- g stetig in $x \Rightarrow \lim\limits_{\xi \to 0} \binom{\xi}{\delta g_x(\xi)} = \binom{0}{0} \in \mathbb{R}^{d+\nu}$

$$\Rightarrow \limsup_{\mathbb{R}^d \ni \xi \to 0} T_2(\xi) \le \limsup_{\mathbb{R}^{d+\nu} \ni z \to 0} \frac{\|\varphi(z)\|}{\|z\|} \underset{\varphi(z) = o(\|z\|)}{=} 0 \qquad (11)$$

also folgt $\psi(\xi) = o(\|\xi\|)$ aus:

(12): $\exists K, \rho > 0$ mit $B_\rho(x) \subseteq V_1$ und $\forall \xi \in B_\rho(0) : \|\delta g_x(\xi)\| \le K \|\xi\|$

denn dann ist $T_1(\xi) \le 1 + K$.

Bew von (12): Sei $0 \ne \xi \in \mathbb{R}^d$ mit $x + \xi \in V_1$ (für $\xi = 0$ ist (12) klar)

(9), (10) $\Rightarrow \|\delta g_x(\xi)\| \le \|B^{-1}A\| \cdot \|\xi\| + \|B^{-1}\| \big(\|\xi\| + \|\delta g_x(\xi)\|\big) T_2(\xi)$

(11) $\Rightarrow \exists \rho > 0$, so dass $B_\rho(x) \subseteq V_1$ und $\forall 0 \ne \xi \in B_\delta(0)$:

$$T_2(\xi) \le \frac{1}{2\|B^{-1}\|}$$

$$\Rightarrow \|\delta g_x(\xi)\| \le \underbrace{\left(\|B^{-1}A\| + \tfrac{1}{2}\right)}_{=:K/2} \|\xi\| + \tfrac{1}{2} \|\delta g_x(\xi)\| \quad ✓$$

4. Akt: g ist stetig diff-bar. Zeige: $\begin{array}{l} V_1 \to \mathrm{Mat}(\nu\times d, \mathbb{R}) \\ x \mapsto (Dg)(x) \end{array}$ stetig

Folgt aus Darstellung von Dg in (iv):

- g stetig $\Rightarrow$ $x \mapsto (D_{\#}F)(x, g(x))$ stetig, für $\# = (x)$ und (y)

- da $(D_{(y)}F)(x, g(x))$ invertierbar $\forall x \in V_1$ und Matrixinverse stetig (siehe unten) $\Rightarrow$ Beh. ∎

Beh.: $\begin{array}{l} GL(\nu; \mathbb{R}) \to GL(\nu; \mathbb{R}) \\ A \mapsto A^{-1} \end{array}$ stetig.

Bew: Gemäß der Cramerschen Regel ist

$$(A^{-1})_{jk} = \frac{1}{\det A} (-1)^{j+k} \det(\hat{A}_{kj}) \qquad \text{für } 1 \le j, k \le \nu$$

$\hat{A}_{kj}$: k-te Zeile und j'te Spalte von A gestrichen

Somit (da $\det A \neq 0$) eine stetige, da rationale, Funktion in den Matrixelementen von A. ∎

9.6. Korollar (Satz über die Umkehrfkt)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x_0 \in \mathcal{U}$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ stetig diff-bar und $(Df)(x_0)$ invertierbar. Dann $\exists\, \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, Umgebung von x_0, und $\exists\, V_0 \subseteq \mathbb{R}^d$, Umgebung von $f(x_0) =: y_0$, so dass

- $f: \mathcal{U}_0 \to V_0$ bijektiv
- $f^{-1}: V_0 \to \mathcal{U}_0$ stetig diff-bar, und $\forall y \in V_0$:

$$(Df^{-1})(y) = \left((Df)(x)\right)^{-1} \quad \text{wobei } x := f^{-1}(y).$$

Beweis: Sei $b := x_0$, $a := y_0$

Achtung: In der Anwendung von Satz 9.4, muss man die Rollen von x und y vertauschen!

Setzte $F: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d \\ (y,x) \mapsto y - f(x) \end{array}$

$\Rightarrow$
- stetig diff.bar
- $F(a,b)=0$
- $(D_{(x)}F)(a,b) = (-Df)(b)$ invertierbar n.V.

Satz 9.4.
$\Rightarrow$ $\exists$ Umgebungen V_1 von a und $V_2 \subseteq \mathcal{U}$ von b und $\exists g: V_1 \to V_2$ stetig diff.bar mit

(iii) ist $(y,x) \in V_1 \times V_2$ mit $y = f(x) \Rightarrow x = g(y)$

(iv) $(D_{(x)}F)(y,g(y)) = -(Df)(g(y))$ ist invertierbar $\forall y \in V_1$

und $(Dg)(y) = \left((Df)(g(y))\right)^{-1} \underbrace{(D_{(y)}F)(y,g(y))}_{\mathbb{1}_{d\times d}}$

Achtung: $g(V_1) \subsetneq V_2$ möglich,
deswegen verkleinern V_1 zu V_0 wie folgt:

$f(b) = a$ & f stetig $\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebung $\mathcal{U}_0 \subseteq V_2 \subseteq \mathcal{U}$ von b:
$$V_0 := f(\mathcal{U}_0) \subseteq V_1$$

Sei $x \in \mathcal{U}_0$ bel. $\underset{y:=f(x)\in V_1}{\overset{(iii)}{\Rightarrow}}$ $(g\circ f)(x) = x$

$\Rightarrow$ $f: \mathcal{U}_0 \to V_0$ bijektiv mit $g = f^{-1}: V_0 \to \mathcal{U}_0$ und $f = g^{-1}$. Insbes. $V_0 = g^{-1}(\mathcal{U}_0)$ offene Umgebung von a, da g stetig, $\mathcal{U}_0$ offen, und $g^{-1}(b) = a \in V_0$ ∎

9.3. Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

9.7. Definition Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, seien $f, h : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.

Sei $M_h := \{x \in \mathcal{U} : h(x) = 0\}$ und $a \in M_h$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ hat lok. Max. (bzw.} \\ \text{Min.) bei } a \text{ unter der} \\ \text{Nebenbed. (NB) } h=0 \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists \text{ Umgebung } V \subseteq \mathcal{U} \text{ von } a \\ \text{in } \mathbb{R}^d : \quad f(x) \leq f(a) \\ (\text{bzw. } \geq) \quad \forall x \in V \cap M_h \end{array}\right.$$

(Falls $V = \mathcal{U}$, so ist das Extremum unter der NB $h=0$ sogar global)

9.8. Beispiel

$\mathcal{U} = \mathbb{R}_> \times \mathbb{R}_>$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, $h(x_1, x_2) = 2(x_1 + x_2) - u$ für $u > 0$

Es gilt:

f hat glob. Max. bei $(x_1, x_2) = \left(\frac{u}{4}, \frac{u}{4}\right)$ unter der NB $h = 0$

denn: Quadrat hat größten Flächeninhalt unter allen Rechtecken mit gleichem Umfang u (sogar global!)

9.9. Satz (Notwendige Bedingung)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f, h : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar, f habe ein lok. Extremum bei $a \in M_h$ unter der NB $h = 0$ und sei $(\nabla h)(a) \neq 0$. Dann $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ (Lagrange-Multiplikator) so daß

$$(\nabla f)(a) - \lambda (\nabla h)(a) = 0$$

<u>Beweis</u>. o.E. sei $(\partial_d h)(a) \neq 0$ (sonst umnummerieren der Koordinatenachsen)

schreibe $a = (\underbrace{a_1, \ldots, a_{d-1}}_{=:a'}, a_d)$, analog für x;

NB lautet $h(x', x_d) = 0$; Ziel: $x_d = g(x')$ für $x = (x', x_d) \in M_h$

- $\exists\, \mathcal{U}_1 \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ Umgebung von a', $\exists\, \mathcal{U}_2 \subseteq \mathbb{R}$ Umgebung von a_d: $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}$, also $h: \begin{array}{l} \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \to \mathbb{R} \\ (x', x_d) \mapsto h(x', x_d) \end{array}$ stetig diff.bar
- $h(a', a_d) = 0$
- $(\partial_d h)(a', a_d) \neq 0$ (= invert. 1×1-Matrix)

Satz 9.4 $\Rightarrow$ $\exists$ Umgebungen $V_1 \subseteq \mathcal{U}_1$ von a' und $V_2 \subseteq \mathcal{U}_2$ von a_d und $g: V_1 \to V_2$ stetig diff.bar.:

(i) $g(a') = a_d$

(ii) $h(x', g(x')) = 0 \quad \forall x' \in V_1$

(iii) $(\partial_j g)(x') = -\dfrac{(\partial_j h)(x', g(x'))}{\underbrace{(\partial_d h)(x', g(x'))}_{\neq 0\ \forall x' \in V_1}} \quad \forall x' \in V_1,\ \forall j = 1, \ldots, d-1$

[entspricht Beh. (iv) von Satz 9.4]

setze $\varphi: \begin{array}{l} V_1 \to \mathbb{R} \\ x' \mapsto f(\underbrace{x', g(x')}_{\overset{(ii)}{\in} M_h}) \end{array}$ stetig diff.bar

u.V. hat φ lok. Extremum bei $x' = a'$.

Satz 8.34

$$\Rightarrow \quad \forall j=1,\dots,d-1: \quad 0=(\partial_j\varphi)(a') \overset{\text{Kettenregel}}{=} (\partial_j f)(\underbrace{a',g(a')}_{\overset{(i)}{=} a}) + (\partial_d f)(\underbrace{a',g(a')}_{a})(\partial_j g)(a')$$

Elimination von $(\partial_j g)(a')$ mittels (iii) für $x'=a'$

$$\Rightarrow \quad \forall j=1,\dots,d-1: \quad (\partial_j f)(a) = \lambda(\partial_j h)(a) \qquad (*)$$

$$\text{mit} \qquad \lambda := \frac{(\partial_d f)(a)}{(\partial_d h)(a)} \in \mathbb{R}$$

offensichtlich gilt (*) auch für $j=d$ $\Rightarrow$ Beh. ∎

9.10. Satz (Hinreichende Bed.)

Sei $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^d$ offen, $f,h:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$. Für $\lambda\in\mathbb{R}$ sei $g_\lambda := f-\lambda h$. Es gebe $\lambda_0\in\mathbb{R}$, so dass g_{λ_0} hat lok./glob. Max. (oder Min.) bei $a\in M_h$. Dann hat f ein lok./glob. Max. (oder Min) bei a unter der NB $h=0$.

Beweis: o.E. nur für Min. (für Max. analog).
n.V. $\exists$ Umgebung $V\subseteq\mathcal{U}$ von a: $g_{\lambda_0}(x)\geq g_{\lambda_0}(a)\ \forall x\in V$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{g_{\lambda_0}(x)}_{\overset{\|}{f(x)}} \geq \underbrace{g_{\lambda_0}(a)}_{\overset{\|}{f(a)}} \ \forall x\in V\cap M_h \qquad (\text{auf } M_h)$$

$V=\mathcal{U}$ im Fall eines globales Extremums ∎

9.11. Bemerkung

- Moral: – Bestimme Extrema von $g_\lambda := f-\lambda h$
  – wähle λ geg.falls so, dass Extremalstelle $\in M_h$
- Verallg. auf mehrere NB $h_1(x)=0,\dots,h_n(x)=0$ $(n\in\mathbb{N})$:

$$\text{diskutiere} \quad f-\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu h \quad \text{mit } \lambda_\nu\in\mathbb{R}$$

für $\nu=1,\dots,n$

9.12. Beispiel: Sei $A \in \mathrm{Mat}(d\times d;\mathbb{R})$ symmetrisch, $U = \mathbb{R}^d$

$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle x, Ax\rangle \end{array}$ NB: $\|x\| = 1$, dazu wähle $h: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|^2 - 1 \end{array}$

$g_\lambda := f - \lambda h$; $g_\lambda(x) = \langle x, B_\lambda x\rangle + \lambda$; $B_\lambda := A - \lambda \mathbb{1}_{d\times d}$

(i) notw. Bed. für lok. Extremum von g_λ (Satz 8.34):

$0 \overset{!}{=} (\nabla g_\lambda)(x) \overset{8.16}{=} 2 B_\lambda x$, also x ist Eigenvektor von A zum E.W. λ; damit $x \in M_h$: normieren x

(ii) hinr. Bed. für lok. Extremum von g_λ (2 mal stetig diff.-bar. $\Rightarrow$ Satz 8.38 anwendbar)

(i) $\nabla g_\lambda(x) = 0 \Rightarrow \lambda$ ist EW von A (s.o.)

(ii) Strikte Definitheit von B_λ (8.38 & $(D^2 g)(x) = 2B_\lambda$)

Seien $\alpha_1 \le \ldots \le \alpha_d$ die EW von A mit zug. norm. EV's $v_1, \ldots, v_d$

Leider: B_{α_j} indefinit oder semidef. für $j = 2, \ldots, d-1$
(Kor. 8.37) pos. semidef. (also nicht strikt pos.) für $j = 1$
neg. semidef. (" " " neg.) für $j = d$

$\Rightarrow$ Satz 8.38 nicht anwendbar ☹

(iii) dennoch gilt: g_{α_d} (bzw. g_{α_1}) hat globales Max. (bzw. Min) bei $x = v_d$ (bzw. $x = v_1$)

denn
$\overset{\text{Satz 8.36}}{\Longrightarrow}$ $\langle x, B_{\alpha_d} x\rangle \le 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$ mit "=" für $x = v_d$

(bzw. $\langle x, B_{\alpha_1} x\rangle \ge 0$ mit "=" für $x = v_1$)

(iv) v_d (bzw. v_1) normiert, also $\in M_h$

(iii) & Satz 9.10
$\Longrightarrow$ f hat globales Max. (bzw. Min.) bei v_d (bzw. v_1) unter der NB $h = 0$ (d.h. $\|x\| = 1$) ∎