9.3. Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

9.7. Definition Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, seien $f, h : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.

Sei $M_h := \{x \in \mathcal{U} : h(x) = 0\}$ und $a \in M_h$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ hat lok. Max. (bzw.} \\ \text{Min.) bei } a \text{ unter der} \\ \text{Nebenbed. (NB) } h=0 \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists \text{ Umgebung } V \subseteq \mathcal{U} \text{ von } a \\ \text{in } \mathbb{R}^d : \quad f(x) \le f(a) \\ (\text{bzw.} \ge) \quad \forall x \in V \cap M_h \end{array}\right.$$

(Falls $V = \mathcal{U}$, so ist das Extremum unter der NB $h=0$ sogar global)

9.8. Beispiel

$\mathcal{U} = \mathbb{R}_> \times \mathbb{R}_>$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, $h(x_1, x_2) = 2(x_1 + x_2) - u$ für $u > 0$

Es gilt:

f hat glob. Max. bei $(x_1, x_2) = \left(\frac{u}{4}, \frac{u}{4}\right)$ unter der NB $h = 0$

denn: Quadrat hat größten Flächeninhalt unter allen Rechtecken mit gleichem Umfang u (sogar global!)

9.9. Satz (Notwendige Bedingung)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f, h : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar, f habe ein lok. Extremum bei $a \in M_h$ unter der NB $h = 0$ und sei $(\nabla h)(a) \neq 0$. Dann $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ (Lagrange-Multiplikator) so daß

$$(\nabla f)(a) - \lambda (\nabla h)(a) = 0$$

<u>Beweis</u>. o.E. sei $(\partial_d h)(a) \neq 0$ (sonst umnummerieren der Koordinatenachsen)

schreibe $a = (\underbrace{a_1, \dots, a_{d-1}}_{=:a'}, a_d)$, analog für x;

NB lautet $h(x', x_d) = 0$; Ziel: $x_d = g(x')$ für $x = (x', x_d) \in M_h$

- $\exists\, \mathcal{U}_1 \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ Umgebung von a', $\exists\, \mathcal{U}_2 \subseteq \mathbb{R}$ Umgebung von a_d: $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}$, also $h: \begin{array}{l} \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \to \mathbb{R} \\ (x', x_d) \mapsto h(x', x_d) \end{array}$ stetig diff.bar
- $h(a', a_d) = 0$
- $(\partial_d h)(a', a_d) \neq 0$ (= invert. 1×1-Matrix)

$\overset{\text{Satz 9.4}}{\Rightarrow}$ $\exists$ Umgebungen $V_1 \subseteq \mathcal{U}_1$ von a' und $V_2 \subseteq \mathcal{U}_2$ von a_d und $g: V_1 \to V_2$ stetig diff.bar.:

(i) $g(a') = a_d$

(ii) $h(x', g(x')) = 0 \quad \forall x' \in V_1$

(iii) $$(\partial_j g)(x') = -\frac{(\partial_j h)(x', g(x'))}{\underbrace{(\partial_d h)(x', g(x'))}_{\neq 0\ \forall x' \in V_1}} \quad \forall x' \in V_1,\ \forall j = 1, \dots, d-1$$

[entspricht Beh. (iv) von Satz 9.4]

setze $\varphi: \begin{array}{l} V_1 \to \mathbb{R} \\ x' \mapsto f(\underbrace{x', g(x')}_{\overset{(ii)}{\in} M_h}) \end{array}$ stetig diff.bar

u.V. hat φ lok. Extremum bei $x' = a'$.

Satz 8.34

$\Rightarrow \quad \forall j=1,\dots,d-1: \; 0=(\partial_j\varphi)(a') \overset{\text{Kettenregel}}{=} (\partial_j f)(\underbrace{a',g(a')}_{\overset{(i)}{=} a}) + (\partial_d f)(\underbrace{a',g(a')}_{a})(\partial_j g)(a')$

Elimination von $(\partial_j g)(a')$ mittels (iii) für $x'=a'$

$\Rightarrow \quad \forall j=1,\dots,d-1: \quad (\partial_j f)(a) = \lambda(\partial_j h)(a) \qquad (*)$

$$\text{mit} \qquad \lambda := \frac{(\partial_d f)(a)}{(\partial_d h)(a)} \in \mathbb{R}$$

offentsichtlich gilt (*) auch für $j=d$ $\Rightarrow$ Beh. ∎

$\boxed{9.10.\ \text{Satz}}$ (Hinreichende Bed.)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f,h: U \to \mathbb{R}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $g_\lambda := f-\lambda h$. Es gebe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, so dass g_{λ_0} hat lok./glob. Max. (oder Min.) bei $a \in M_h$. Dann hat f ein lok./glob. Max. (oder Min) bei a unter der NB $h=0$.

Beweis: o.E. nur für Min. (für Max. analog).
n.V. $\exists$ Umgebung $V \subseteq U$ von a: $g_{\lambda_0}(x) \geq g_{\lambda_0}(a) \; \forall x \in V$

$V=U$ im Fall eines globales Extremums

$$\Rightarrow \quad \underset{f(x)}{\underset{\|}{g_{\lambda_0}(x)}} \underset{\text{auf } M_h}{\geq} \underset{f(a)}{\underset{\|}{g_{\lambda_0}(a)}} \quad \forall x \in V \cap M_h$$

∎

9.11. Bemerkung

- Moral: – Bestimme Extrema von $g_\lambda := f-\lambda h$
  – wähle λ geg.falls so, dass Extremalstelle $\in M_h$.
- Verallg. auf mehrere NB $h_1(x)=0,\dots,h_n(x)=0$ $(n \in \mathbb{N})$:

$$\text{diskutiere} \quad f - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu h \quad \text{mit } \lambda_\nu \in \mathbb{R} \text{ für } \nu=1,\dots,n$$

9.12. Beispiel: Sei $A \in \mathrm{Mat}(d\times d;\mathbb{R})$ symmetrisch, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^d$

$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle x, Ax\rangle \end{array}$ NB: $\|x\| = 1$, dazu wähle $h: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|^2 - 1 \end{array}$

$g_\lambda := f - \lambda h$; $g_\lambda(x) = \langle x, B_\lambda x\rangle + \lambda$; $B_\lambda := A - \lambda \mathbb{1}_{d\times d}$

(i) notw. Bed. für lok. Extremum von g_λ (Satz 8.34):

$0 \overset{!}{=} (\nabla g_\lambda)(x) \overset{8.16}{=} 2B_\lambda x$, also x ist Eigenvektor von A zum E.W. λ; damit $x \in M_h$: normiere x

(ii) hinr. Bed. für lok. Extremum von g_λ (2 mal stetig diff.-bar. $\Rightarrow$ Satz 8.38 anwendbar)

(i) $\nabla g_\lambda(x) = 0 \quad \Rightarrow \lambda$ ist EW von A (s.o.)

(ii) Strikte Definitheit von B_λ (8.38 & $(D^2 g)(x) = 2B_\lambda$)

Seien $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_d$ die EW von A mit zug. norm. EV's $v_1, \ldots, v_d$

<u>Leider</u>: B_{α_j} indefinit oder semidef. für $j = 2, \ldots, d-1$
(Kor. 8.37) pos. semidef. (also nicht strikt pos.) für $j = 1$
neg. semidef. (" " " neg.) für $j = d$

$\Rightarrow$ Satz 8.38 <u>nicht</u> anwendbar ☹

(iii) <u>dennoch</u> gilt: g_{α_d} (bzw. g_{α_1}) hat globales Max. (bzw. Min) bei $x = v_d$ (bzw. $x = v_1$)

denn
$\overset{\text{Satz 8.36}}{\Longrightarrow}$ $\langle x, B_{\alpha_d} x\rangle \leq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^d$ mit "=" für $x = v_d$
(bzw. $\langle x, B_{\alpha_1} x\rangle \geq 0$ mit "=" für $x = v_1$)

(iv) v_d (bzw. v_1) normiert, also $\in M_h$

$\overset{\text{(iii) \& Satz 9.10}}{\Longrightarrow}$ f hat globales Max. (bzw. Min.) bei v_d (bzw. v_1) unter der NB $h = 0$ (d.h. $\|x\| = 1$) ∎