9.2. Satz über implizite Funktionen

9.4. Satz (über implizite Fkt.'en)

Seien $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathbb{R}^\nu$ offen und sei

- $F: \begin{array}{l} \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^\nu \\ (x,y) \longmapsto F(x,y) \end{array}$ stetig diff.bar
- $(a,b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ mit $F(a,b) = 0$
- Für $D_{(y)}F := \dfrac{\partial(F_1,\dots,F_\nu)}{\partial(y_1,\dots,y_\nu)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_\nu} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_\nu}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_\nu}{\partial y_\nu} \end{pmatrix}$

gelte: $(D_{(y)}F)(a,b)$ sei invertierbar.

Dann $\exists$ Umgebungen $V_1 \subseteq \mathcal{U}_1$ von a, $V_2 \subseteq \mathcal{U}_2$ von b und $\exists g: V_1 \to V_2$ stetig diff.bar mit

(i) $g(a) = b$

(ii) $F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in V_1$

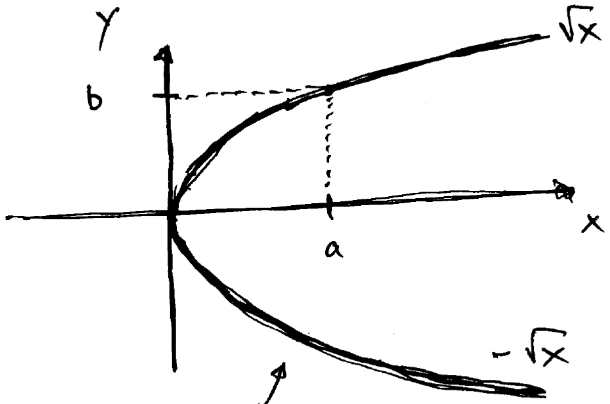
(iii) ist $(x,y) \in V_1 \times V_2$ mit $F(x,y) = 0 \Rightarrow y = g(x)$

(iv) $(D_{(y)}F)(x, g(x))$ ist invertierbar $\forall x \in V_1$

und

$$\underbrace{(Dg)(x)}_{\nu \times d\text{-Matrix}} = -\underbrace{\left[(D_{(y)}F)(x,g(x))\right]^{-1}}_{\nu \times \nu\text{-Matrix}} \underbrace{(D_{(x)}F)(x,g(x))}_{\nu \times d\text{-Matrix}}$$

9.5. Beispiel: $U_1 = U_2 = \mathbb{R}$ $\quad F(x,y) = x - y^2 \in \mathbb{R}$



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}$

- $b \underset{(<)}{>} 0 \Rightarrow g(x) = \underset{(-)}{+}\sqrt{x}$
- Voraussetzung $(D_{(y)}F)(a,b)$ invertierbar wesentlich, da für $(a,b) = (0,0)$ gilt:
  $$D_{(y)}F(0,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0 \text{ und}$$
  $\nexists$ Umgebung V_1 von 0 und $g: V_1 \to \mathbb{R}$ diff.bar mit
  $$F(x, g(x)) = 0.$$

- Verkleinerung von U_1 zu V_1 im Satz wesentlich; hier: $V_1 \cap]-\infty, 0] = \emptyset$
- Verkleinerung von U_2 zu V_2 wesentlich für (iii) in Satz 9.4.: für $0 < a \in V_1$ und $b = \underset{(-)}{+}\sqrt{a}$ muss gelten
  $$V_2 \cap \{\underset{(+)}{-}\sqrt{x} : x \in V_1\} = \emptyset.$$

Beweis von Satz 9.4. o.E. $(a,b) = (0,0)$ [sonst verschieb F]

1. Akt: Formulierung von $F(x,y) = 0$ als Fixpkt.problem

Setz $Y := (D_{(y)}F)(0,0) \overset{\text{n.V.}}{\in} GL(\nu, \mathbb{R})$

$$G: \begin{array}{l} U_1 \times U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^\nu \\ (x,y) \longmapsto G(x,y) := y - Y^{-1}F(x,y) \end{array}$$

somit G stetig diff.bar mit

$$(D_{(y)}G)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_\nu} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial G_\nu}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_\nu}{\partial y_\nu} \end{pmatrix}(x,y) = \mathbb{I} - Y^{-1}(D_{(y)}F)(x,y)$$

und $F(x,y) = 0 \iff G(x,y) = y$ (0)

Weiterhin: (1) $G(0,0) = 0$

(2) $(D_{(y)}G)(0,0) = 0$

(3) $\exists W_1 \subseteq \mathcal{U}_1$, Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^d$,
$\exists W_2 \subseteq \mathcal{U}_2$, " " " " $\mathbb{R}^\nu$, so dass

$$\|(D_{(y)}G)(x,y)\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in W_1 \times W_2$$

(denn: $\frac{\partial G_j}{\partial y_k}$ stetig in (x,y), und (2))

(4) $\exists r > 0$ mit $V_2 := \{ y \in \mathbb{R}^\nu : \|y\| \leq r \} \subseteq W_2$
abgeschlossen!

und, wegen (1) und G stetig,
$\exists V_1 \subseteq W_1$, Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^d$:

$$\sup_{x \in V_1} \|G(x,0)\| \leq \frac{r}{2}$$

(5) Sei $x \in V_1$ bel., fest. $\Rightarrow \forall y, y' \in V_2$ gilt

$$\|\underbrace{G(x,y) - G(x,y')}_{\int_0^1 (D_{(y)}G)(x, y'+t(y-y'))dt\,(y-y')}\| \overset{(3)}{\leq} \frac{1}{2}\|y-y'\|$$

HDI, Satz 8.23

(6) Sei $x \in V_1$ bel., fest $\Rightarrow \forall y \in V_2$

$$\|G(x,y)\| \leq \underbrace{\|G(x,y) - G(x,0)\|}_{\overset{(5)}{\leq} \frac{r}{2}} + \underbrace{\|G(x,0)\|}_{\overset{(4)}{\leq} \frac{r}{2}} \leq r$$

aus (5) & (6): $\forall x \in V_1$ ist $G(x,\cdot): \begin{matrix} V_2 \to V_2 \\ y \mapsto G(x,y) \end{matrix}$

eine Kontraktion auf dem vollst. (!)
metr. Raum V_2 (vgl. Üb.)

$\Rightarrow$ Banachscher Fixpkt.satz: $\exists!$ Fixpunkt $g(x) \in V_2$ von $G(x,\cdot)$, d.h. $G(x,g(x)) = g(x) \overset{(0)}{\Longleftrightarrow} F(x,g(x)) = 0$
$\Rightarrow$ Beh. (ii)

- da Fixpunkt $g(x) \in V_2$ eindeutig $\Rightarrow$ Beh (iii) ✓
- (1) & Eindeutigkeit $\Rightarrow g(0) = 0$; also Beh. (i) ✓

Definiere Fkt. $g: V_1 \to V_2$, $x \mapsto g(x)$

2. Abt: Stetigkeit von g:

aus erneuter Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, diesmal mit vollst. (!) metrischen Raum (vgl. Übung)

$$Z := \{\varphi: V_1 \to V_2 \text{ stetig}\}$$

mit Metrik $d_\infty(\varphi_1, \varphi_2) := \sup_{x\in V_1} \|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$

(NB: V_2 beschr. $\Rightarrow \varphi \in Z$ beschränkt, da $\operatorname{diam}\varphi(V_1) \le \operatorname{diam}(V_2) < \infty$)

Betrachte $\Phi: Z \to Z$
$\varphi \mapsto \Phi(\varphi)$, $(\Phi(\varphi))(x) := G(x,\varphi(x))\quad \forall x \in V_1$

- $\Phi(\varphi)$ stetig, da G u. φ stetig
- $\forall x \in V_1: \|(\Phi(\varphi))(x)\| \underset{(6),\ \varphi(x)\in V_2}{\le} r$

$\Rightarrow \Phi$ wohldef. da $\Phi(\varphi) \in Z$

- Φ Kontraktion, da $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in Z$:

$$d_\infty(\Phi(\varphi_1), \Phi(\varphi_2)) = \sup_{x\in V_1} \|\underbrace{(\Phi(\varphi_1))(x) - (\Phi(\varphi_2))(x)}_{G(x,\varphi_1(x)) - G(x,\varphi_2(x))}\|$$

$$\underset{(5),\ \varphi_{1/2}(x)\in V_2}{\le} \frac{1}{2} \sup_{x\in V_1} \|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| = \frac{1}{2} d_\infty(\varphi_1, \varphi_2)$$

$\Rightarrow$ Banachscher Fixpktsatz $\exists!\, \tilde{\varphi} \in Z$ mit

$$\Phi(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi} \iff \forall x \in V_1 : G(x, \tilde{\varphi}(x)) = \tilde{\varphi}(x)$$

1. Abt $\Rightarrow$ Fixpkt $g(x)$ eindeutig in V_2 $\forall x \in V_1$ $\Rightarrow$ $\tilde{\varphi} = g$
$\Rightarrow$ g stetig.

3. Abt: Diff.barkeit von g

(a) NB: $M \in Mat(\nu \times \nu, \mathbb{R})$ invertierbar $\iff \det(M) \neq 0$ (7)

u.V. ist
- $\Delta : \begin{array}{l} V_1 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \det\left((D_{(y)}F)(x, g(x))\right) \end{array}$ stetig

da alle Einträge der Matrix stetig ($D_{(y)}F$ stetig, g stetig) und „det" ist Polynom in den Einträgen
- $\Delta(0) \neq 0$ $\quad (b = g(a=0) = 0)$.

$\Rightarrow \exists V_1' \subseteq V_1$ Umgebung von $a = 0$,
so dass $\Delta(x) \neq 0$ $\forall x \in V_1'$
$\overset{(7)}{\Rightarrow}$ $(D_{(y)}F)(x, g(x))$ invertierbar $\forall x \in V_1'$ (8)

o.E. sei V_1 bereits so klein, dass (8) wahr $\forall x \in V_1$

(b) Sei $x \in V_1$ bel. fix und $\xi \in \mathbb{R}^d$ bel., so dass $x + \xi \in V_1$,

$$A := (D_{(x)}F)(x, g(x)) \in Mat(\nu \times d; \mathbb{R})$$
$$B := (D_{(y)}F)(x, g(x)) \in GL(\nu; \mathbb{R}) \quad \text{wegen (a)}$$

F diff.bar in $(x, g(x)) \in V_1 \times V_2 \subset U_1 \times U_2$:

$$\Rightarrow \quad 0 \overset{(ii)}{=} F(x+\xi, \underbrace{g(x+\xi)}_{=: g(x) + \delta g_x(\xi)}) = \underbrace{F(x, g(x))}_{0} + \underbrace{\overbrace{(A \,\vdots\, B)}^{(DF)(x,g(x))} \begin{pmatrix} \xi \\ \delta g_x(\xi) \end{pmatrix}}_{A\xi + B\delta g_x(\xi)} + \underbrace{\varphi(\xi, \delta g_x(\xi))}_{o\left(\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \delta g_x(\xi) \end{pmatrix} \right\|\right)}$$

$$\Rightarrow \quad g(x+\xi) - g(x) = \delta g_x(\xi)$$
$$= -B^{-1}A\xi - \underbrace{B^{-1}\varphi(\xi, \delta g_x(\xi))}_{=: \psi(\xi)} \qquad (9)$$

(c) Zeige $\psi(\xi) = o(\|\xi\|)$ ($\Rightarrow g$ diff-bar in x und $(Dg)(x) = -B^{-1}A$, also (iv)).

Fixiere $x \in V_1$.

$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ x+\xi \in V_1$, gilt:

- $$\frac{\|\psi(\xi)\|}{\|\xi\|} \le \|B^{-1}\| \underbrace{\frac{\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \delta g_x(\xi) \end{pmatrix} \right\|}{\|\xi\|}}_{=:T_1(\xi)} \underbrace{\frac{\|\varphi(\xi, \delta g_x(\xi))\|}{\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \delta g_x(\xi) \end{pmatrix} \right\|}}_{=:T_2(\xi)}$$

- $$\Big\| \underbrace{\begin{pmatrix} \xi \\ \delta g_x(\xi) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta g_x(\xi) \end{pmatrix}} \Big\|_{\mathbb{R}^{d+\nu}} \le \|\xi\|_{\mathbb{R}^d} + \|\delta g_x(\xi)\|_{\mathbb{R}^\nu} \qquad (10)$$

- g stetig in $x \Rightarrow \lim_{\xi \to 0} \begin{pmatrix} \xi \\ \delta g_x(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+\nu}$

$$\Rightarrow \limsup_{\mathbb{R}^d \ni \xi \to 0} T_2(\xi) \le \limsup_{\mathbb{R}^{d+\nu} \ni z \to 0} \frac{\|\varphi(z)\|}{\|z\|} \underset{\varphi(z) = o(\|z\|)}{=} 0 \qquad (11)$$

also folgt $\psi(\xi) = o(\|\xi\|)$ aus:

(12): $\exists K, \rho > 0$ mit $B_\rho(x) \subseteq V_1$ und $\forall \xi \in B_\rho(0): \|\delta g_x(\xi)\| \le K \|\xi\|$

denn dann ist $T_1(\xi) \le 1 + K$.

Bew von (12): Sei $0 \ne \xi \in \mathbb{R}^d$ mit $x + \xi \in V_1$ (für $\xi = 0$ ist (12) klar)

$$(9), (10) \Rightarrow \|\delta g_x(\xi)\| \le \|B^{-1}A\| \cdot \|\xi\| + \|B^{-1}\| \left(\|\xi\| + \|\delta g_x(\xi)\|\right) T_2(\xi)$$

(11) $\Rightarrow \exists \rho > 0$, so dass $B_\rho(x) \subseteq V_1$ und $\forall 0 \ne \xi \in B_\delta(0)$:

$$T_2(\xi) \le \frac{1}{2\|B^{-1}\|}$$

$$\Rightarrow \|\delta g_x(\xi)\| \le \underbrace{\left(\|B^{-1}A\| + \tfrac{1}{2}\right)}_{=:K/2} \|\xi\| + \tfrac{1}{2} \|\delta g_x(\xi)\| \quad ✓$$

4\. Abt: g ist stetig diff.-bar. Zeige: $\begin{array}{l} V_1 \to \mathrm{Mat}(\nu \times d, \mathbb{R}) \\ x \mapsto (Dg)(x) \end{array}$ stetig

Folgt aus Darstellung von Dg in (iv):

- g stetig $\Rightarrow$ $x \mapsto (D_{\#}F)(x, g(x))$ stetig, für $\# = (x)$ und (y)

- da $(D_{(y)}F)(x, g(x))$ invertierbar $\forall x \in V_1$ und Matrixinverse stetig (siehe unten) $\Rightarrow$ Beh. ∎

Beh.: $\begin{array}{l} GL(\nu; \mathbb{R}) \to GL(\nu; \mathbb{R}) \\ A \mapsto A^{-1} \end{array}$ stetig.

Bew: Gemäß der Cramerschen Regel ist

$$(A^{-1})_{jk} = \frac{1}{\det A} (-1)^{j+k} \det(\hat{A}_{kj}) \qquad \text{für } 1 \le j, k \le \nu$$

k-te Zeile und j'te Spalte von A gestrichen

Somit (da $\det A \neq 0$) eine stetige, da rationale, Funktion in den Matrixelementen von A. ∎

9.6. Korollar (Satz über die Umkehrfkt)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x_0 \in \mathcal{U}$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ stetig diff.-bar und $(Df)(x_0)$ invertierbar. Dann $\exists\, \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, Umgebung von x_0, und $\exists\, V_0 \subseteq \mathbb{R}^d$, Umgebung von $f(x_0) =: y_0$, so dass

- $f: \mathcal{U}_0 \to V_0$ bijektiv
- $f^{-1}: V_0 \to \mathcal{U}_0$ stetig diff.-bar, und $\forall y \in V_0$:

$$(Df^{-1})(y) = \big((Df)(x)\big)^{-1} \quad \text{wobei } x := f^{-1}(y).$$

Beweis: Sei $b := x_0$, $a := y_0$

Achtung: In der Anwendung von Satz 9.4, muss man die Rollen von x und y vertauschen!

Setzte $F: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d \\ (y,x) \mapsto y - f(x) \end{array}$

$\Rightarrow$
- stetig diff-bar
- $F(a,b)=0$
- $(D_{(x)}F)(a,b) = (-Df)(b)$ invertierbar u.V.

Satz 9.4.

$\Rightarrow$ $\exists$ Umgebungen V_1 von a und $V_2 \subseteq \mathcal{U}$ von b und $\exists g: V_1 \to V_2$ stetig diff-bar mit

(iii) ist $(y,x) \in V_1 \times V_2$ mit $y = f(x) \Rightarrow x = g(y)$

(iv) $(D_{(x)}F)(y, g(y)) = -(Df)(g(y))$ ist invertierbar $\forall y \in V_1$

und $(Dg)(y) = \left((Df)(g(y))\right)^{-1} \underbrace{(D_{(y)}F)(y, g(y))}_{\mathbb{1}_{d \times d}}$

Achtung: $g(V_1) \subsetneq V_2$ möglich, deswegen verkleinern V_1 zu V_0 wie folgt:

$f(b)=a$ & f stetig $\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebung $\mathcal{U}_0 \subseteq V_2 \subseteq \mathcal{U}$ von b:

$$V_0 := f(\mathcal{U}_0) \subseteq V_1$$

Sei $x \in \mathcal{U}_0$ bel. $\underset{y := f(x) \in V_1}{\overset{(iii)}{\Rightarrow}}$ $(g \circ f)(x) = x$

$\Rightarrow f: \mathcal{U}_0 \to V_0$ bijektiv mit $g = f^{-1}: V_0 \to \mathcal{U}_0$ und $f = g^{-1}$. Insbes. $V_0 = g^{-1}(\mathcal{U}_0)$ offene Umgebung von a, da g stetig, $\mathcal{U}_0$ offen, und $g^{-1}(b) = a \in V_0$ ∎