9. Implizit definierte Funktionen

Ziel: Sei $(x,y) \mapsto F(x,y) \in \mathbb{R}$ „hinreichend glatte" Fkt. mit

Nullstellenmenge $N := \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$

Frage: $\exists$ glatte Fkt. $x \mapsto g(x)$, so dass $(x, g(x)) \in N$,

d.h. durch Auflösen von $F(x,y) = 0$ nach y?

Zur Vorbereitung:

9.1. Banachscher Fixpunktsatz

9.1. Definition (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f: X \to Y$

- f Lipschitz-stetig $:\Leftrightarrow$ $\exists L \in]0,\infty[: \forall x, x' \in X:$

  $d_Y(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_X(x,x')$

  ↑ Lipschitz-Konstante

[klar: Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ stetig]

- f Kontraktion $:\Leftrightarrow$ f Lipschitz-stetig mit $L \in]0,1[$

9.2. Banachscher Fixpunktsatz

Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum und $f: X \to X$ eine Kontraktion. Dann gilt:

(a) $\exists!\, \xi \in X$ mit $f(\xi) = \xi$; d.h. f hat genau einen Fixpkt.

(b) Sei $x_0 \in X$ bel., und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq X$ def. durch

$$x_{n+1} := f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Dann gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \xi$.

9.3. Bemerkung

- mächtiges, vielseitiges Werkzeug; insbes. auch, da konstruktiv (wegen (b)).
- Fundament der Theorie der gewöhnlichen Differential-gleichungen (Picard-Lindelöf).
- Typische Anwendung: sichert Existenz der Lösung einer Gleichung, wenn diese als Fixpunkt interpretierbar.

Beweis von Satz 9.2.

(i) Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (b) konvergiert.

Sei $x_0 \in X$ bel.

Beh.: $d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

per Induktion:
- $n=0$ klar
- $n-1 \to n$: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $d(x_n, x_{n-1}) \leq L^{n-1} d(x_1, x_0)$ (*)

$$\Rightarrow \quad d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \underset{f \text{ Lipschitz}}{\leq} L\, d(x_n, x_{n-1}) \overset{(*)}{\leq} L^n d(x_1, x_0). \quad \checkmark$$

$\Rightarrow \quad \forall m \in \mathbb{N}$:

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \sum_{\mu=0}^{m-1} \underbrace{d(x_{n+\mu+1}, x_{n+\mu})}_{\leq L^{n+\mu} d(x_1,x_0) \text{ Beh (oben)}}$$

$$\leq L^n d(x_1, x_0) \underbrace{\sum_{\mu=0}^{m-1} L^\mu}_{\leq \sum_{\mu\in\mathbb{N}_0} L^\mu} \underset{L<1 \,!}{\leq} \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0) \quad (*)$$

Wiederum, da $L < 1 \Rightarrow (x_n)_n$ ist Cauchy.

X vollst.

$$\Rightarrow \quad \xi := \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{existiert}.$$

(ii) ξ ist Fixpunkt

$$f(\xi) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{x_{n+1}} = \xi \quad \checkmark$$

(iii) Eindeutigkeit

Seien $\xi_1, \xi_2 \in X$ Fixpunkte von f

$$\Rightarrow \quad d(\xi_1,\xi_2) = d(f(\xi_1), f(\xi_2)) \leq L\, d(\xi_1,\xi_2)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{d(\xi_1,\xi_2)}_{\geq 0}\underbrace{(1-L)}_{>0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad d(\xi_1,\xi_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_1 = \xi_2 \quad \blacksquare$$

Es folgt, aus (*) mit $m \to \infty$:

$\forall x_0 \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$d(\xi, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d(f(x_0), x_0) \quad \text{(Fehlerabschätzung)}$$
