8. Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

Im folgenden stets $U \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, offen

versehen mit $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$

Für $j \in \{1,\dots,d\}$ sei $e_j := (\dots,0,1,0,\dots) \in \mathbb{R}^d$

j'te Stelle

Einheitsvektor in j'te Koord. richtung

$f: U \to \mathbb{R}$, $x = (x_1,\dots,x_d) \mapsto f(x) = f((x_1,\dots,x_d)) =: f(x_1,\dots,x_d)$

8.1. Partielle Ableitungen

8.1. Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$

- Sei $x \in U$ und $j \in \{1,\dots,d\}$

  $\left.\begin{array}{l} f \text{ partiell diff. bar in} \\ x \text{ in Richtung } j \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Es existiert} \\ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ \in \mathbb{R}}} \dfrac{f(x+he_j) - f(x)}{h} =: (\partial_j f)(x) \end{array}\right.$

  alternative Schreibweise: $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} f\right)(x)$, $(D_j f)(x)$

- Richtungsableitung von f in Richtung $0 \neq v \in \mathbb{R}^d$ (in x): $(\partial_v f)(x) := \left.\dfrac{d}{dh} f(x+hv)\right|_{h=0}$ (falls existiert!)

- f partiell diff. bar $:\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall x \in U,\ \forall j \in \{1,\dots,d\} \\ (\partial_j f)(x) \text{ existiert} \end{array}\right.$

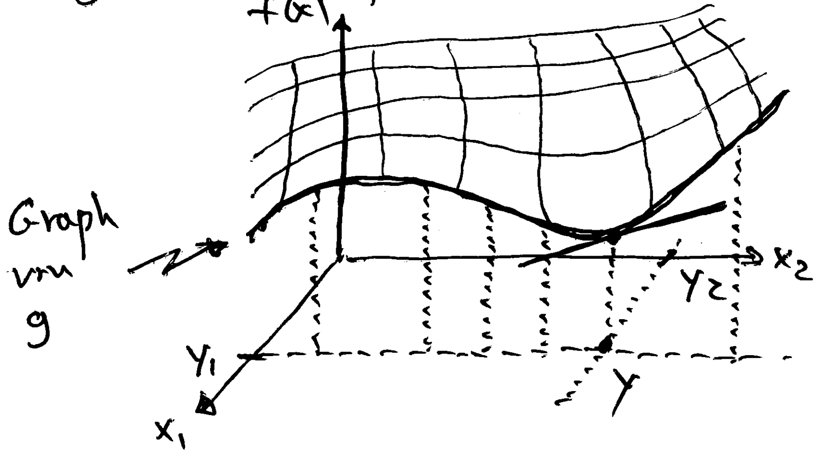
  In dem Fall: $\partial_j f: U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\partial_j f)(x)$ j'te part. Ableitung

- f stetig partiell diff. bar $:\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ partiell diff. bar} \\ \text{und } \partial_j f \text{ stetig} \\ \forall j = 1,\dots,d \end{array}\right.$

  ($f \in C^1(U)$)

8.2. Bemerkung: (a) Für $v = e_j$: $(\partial_v f)(x) = (\partial_j f)(x)$

(b) geom. Interpretation ($d = 2$)



Graph von f
$= \{(x, f(x)) : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^3$
„Gebirge über $\mathbb{R}^2$"
hier: angeschnitten von
Ebene $\{(x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = y_1\}$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\xi \mapsto f(y_1, \xi) := f((y_1, \xi))$$
– somit

$$(\partial_2 f)(y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(y_1, y_2 + h) - f(y_1, y_2)}{h} = g'(y_2)$$

Gilt analog für $d \geq 2$! Somit

- „part. Ableitungen in j-Richtung = gewöhnliche Ableitung bei Festhalten aller anderen Variablen $\neq j$"
- $\Rightarrow$ $\boxed{\text{selbe Rechenregeln für part. Ableitung wie für gew. Ableitung ! (z.B. 5.10, 5.12)}}$

8.3. Beispiele

(a) $U = \mathbb{R}^2$, $f : x \mapsto f(x) := x_1 \sin(x_1 + x_2^2)$

$\Rightarrow$ f stetig partiell diff.-bar mit

$$(\partial_1 f)(x) = \sin(x_1 + x_2^2) + x_1 \cos(x_1 + x_2^2)$$

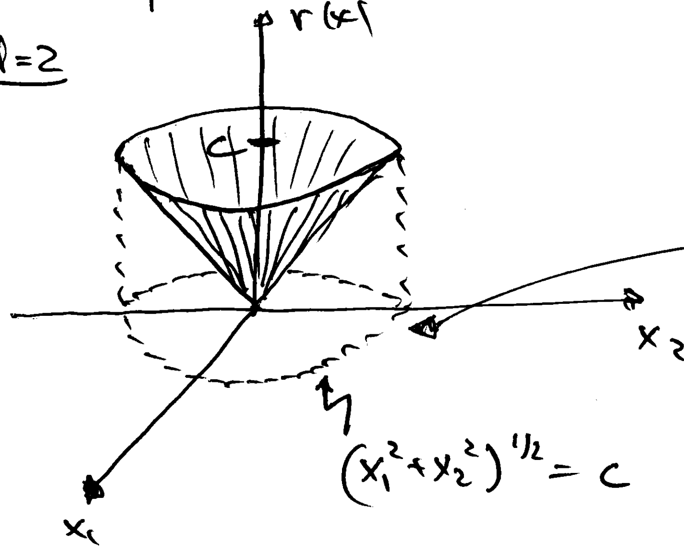
$$(\partial_2 f)(x) = 2x_1 x_2 \cos(x_1 + x_2^2)$$

(b) $r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
$x \mapsto \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow \boxed{(\partial_k r)(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{1/2}} \cdot 2x_k = \frac{x_k}{r(x)}} \quad \forall k \in \{1, .., d\} \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^d$$

nicht partiell diff-bar in 0: $\lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{r(he_k) - r(0)}{h}}_{\frac{|h| - 0}{h} = \operatorname{sgn}(h)}$ exist. nicht!

$d=2$



Höhen (Niveau-) linien

$N_c(f) := \{x \in U : f(x) = c\}$

- sind für $f = r$ Kreise!

Nun: Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ (stetig) diff-bar und setze

$$f \circ r : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (f \circ r)(x) = f(\|x\|) \end{array}$$

radialsymm. Fkt

$\Rightarrow$ $f \circ r$ (stetig) partiell diff. bar mit

$$(\partial_j (f \circ r))(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(\|x\|) = f'(\|x\|) \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = f'(\|x\|) \cdot \frac{x_j}{\|x\|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$$

(c) $U = \mathbb{R}^d$, $x_j : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x_j \end{array}$ (Koordinatenabbildung)

$$\Rightarrow \partial_k x_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

8.4. Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ (Skalarfeld), $A: U \to \mathbb{R}^d$ (Vektorfeld) d.h. für $j = 1, \ldots, d$ $\exists\, A_j : U \to \mathbb{R}$.
Seien f, A partiell diff-bar. (d.h. A_j part. diff-bar $\forall j = 1, \ldots, d$).

• Gradient: $\operatorname{grad} f := \nabla f : \begin{array}{l} U \to \mathbb{R}^d \\ x \mapsto ((\partial_1 f)(x), \ldots, (\partial_d f)(x)) \end{array}$

symbolischer Vektor: $\nabla := (\partial_1, \ldots, \partial_d)$ Nabla-Operator ($\nabla \alpha\beta\lambda\alpha$ = Harfe)

also: grad macht aus Skalarfeld ein Vektorfeld.

• Divergenz: $\operatorname{div} A := \sum_{j=1}^{d} \partial_j A_j =: \langle \nabla, A \rangle$

also: div macht aus Vektorfeld ein Skalarfeld.

• speziell für $d = 3$: Rotation

$$\operatorname{rot} A := \nabla \times A : \begin{array}{l} U \to \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto \big((\partial_2 A_3)(x) - (\partial_3 A_2)(x), -(\partial_1 A_3)(x) + (\partial_3 A_1)(x), (\partial_1 A_2)(x) - (\partial_2 A_1)(x)\big) \end{array}$$

also: rot macht aus Vektorfeld über $\mathbb{R}^3$ wieder ein solches.

Notation in Anlehnung an Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$:
(benutze Spaltennotation!)

$$\times : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Merkregel:

$$(x \times y)_1 = \begin{pmatrix} \cancel{x_1} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{y_1} \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

streichen
— "+"
---- "−"

$$(x \times y)_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cancel{x_2} \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \cancel{y_2} \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad (x \times y)_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cancel{x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cancel{y_3} \end{pmatrix}$$

Damit auch: $x \times y = \det \begin{vmatrix} e_1 & x_1 & y_1 \\ e_2 & x_2 & y_2 \\ e_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

8.5. Lemma (Rechenregeln)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f, g: U \to \mathbb{R}$ part. diff. bare Skalarfelder
$A: U \to \mathbb{R}^d$ " " Vektorfeld.

Dann gilt: (a) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$

(b) $\langle \nabla, Af \rangle = (\langle \nabla, A \rangle) f + \langle A, \nabla f \rangle$

Beweis: Übung!

8.6. Beispiele

(a) $U = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $f = \|\cdot\| = r$

$$\underset{\text{Bsp. 8.3(b)}}{\Rightarrow} \quad (\nabla r)(x) = \frac{x}{r(x)} = \frac{x}{\|x\|}$$

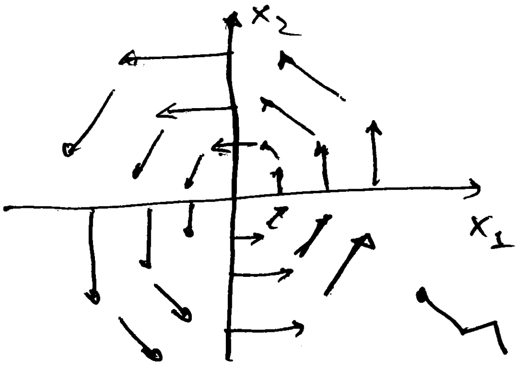
(b) $U = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $A(x) := \dfrac{x}{\|x\|}$

$$\Rightarrow \langle \nabla, A \rangle(x) = \sum_{j=1}^{d} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_j}{r(x)}}_{\frac{1}{r(x)} + x_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(r(x))^{-1}}_{-(r(x))^{-2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} r(x)}_{\frac{x_j}{r(x)}}}}$$

$$= \frac{d}{r(x)} - r(x)^{-3} \underbrace{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}_{(r(x))^2}$$

$$= \frac{d-1}{\|x\|} \qquad \left(= \operatorname{div} \frac{x}{\|x\|}\right)$$

(c) $d=3$, $U=\mathbb{R}^3$, $A: x \longmapsto (-x_2, x_1, 0)$



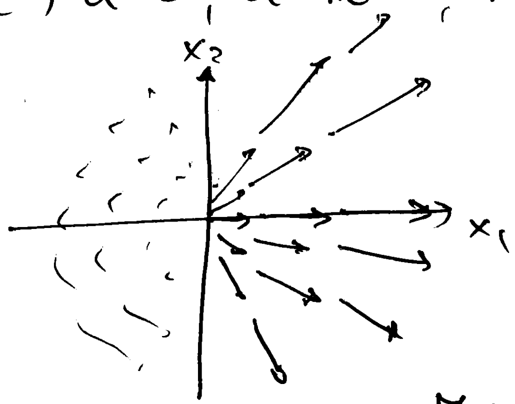
$\Rightarrow$ • $\langle \nabla, A\rangle(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}(-x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 + 0 = 0$

• $(\nabla \times A)(x) = (0,0,2) \quad \forall x$

Schnittbild der $x_3=0$-Ebene

(d) $d=3$, $U=\mathbb{R}^3$, $A: x \longmapsto x \Rightarrow$ • $\nabla \times A = 0$

• $\langle \nabla, A\rangle = d$



Schnittbild der $x_3=0$-Ebene

Moral: Rotation $\hat{=}$ Wirbeln

Divergenz $\hat{=}$ Auseinander-/Zusammenlaufen

8.7. Definition (Höhere partielle Ableitungen)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$

• f 2 mal partiell diff.-bar $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ partiell diff.-bar} \\ \text{und } \partial_j f \text{ partiell diff.-bar} \\ \forall j \in \{1,\dots,d\} \end{cases}$

Notation: $\partial_k \partial_j f := \partial_k(\partial_j f)$, $j,k \in \{1,\dots,d\}$.

- Induktive Def. für all. $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$f \left.\begin{matrix}\underline{\text{n-mal partiell}}\\ \underline{\text{diff.-bar}}\end{matrix}\right\} :\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f\ (n-1)\text{-mal partiell diff.-bar und} \\ \partial_{j_{n-1}} \partial_{j_{n-2}} \cdots \partial_{j_1} f \text{ partiell diff.-bar} \\ \forall j_1, j_2, \ldots, j_{n-1} \in \{1, \ldots, d\} \end{matrix}\right.$$

- f $\left.\begin{matrix}\underline{\text{n-mal stetig}}\\ \underline{\text{partiell diff.-bar}}\end{matrix}\right\} :\Leftrightarrow$ f n-mal partiell diff.-bar und $\partial_{j_\nu} \cdots \partial_{j_1} f$ stetig $\forall j_\nu, \ldots, j_1 \in \{1, \ldots, d\}$ $\forall \nu \in \{0, \ldots, n\}$

  $(f \in C^n(\mathcal{U}))$

- Analog für $A = (A_1, \ldots, A_\nu) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$, falls gültig $\forall A_\ell$, $\ell = 1, \ldots, \nu$

Notationen:
$$\underbrace{\partial_j \cdot \ldots \cdot \partial_j}_{n\text{-mal}} f =: \partial_j^n f =: \frac{\partial^n f}{\partial x_j^n}$$

$$\partial_{j_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{j_n} f =: \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_n}}$$

$\boxed{\text{8.8. Satz}}$ (H. A. Schwarz)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $j, k \in \{1, \ldots, d\}$ und $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sei 1-mal partiell diff.-bar; zudem existiere $\partial_k \partial_j f$ auf $\mathcal{U}$ und sei stetig.
Dann existiert auch $\partial_j \partial_k f$ auf $\mathcal{U}$ und es gilt

$$\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f \qquad (\Rightarrow \partial_j \partial_k f \text{ insbes. stetig})$$

Beweis: o.E. • $d = 2$, $j = 1$, $k = 2$ (andere Variablen spielen keine Rolle)

- $0 \in \mathcal{U}$ und wir zeigen

$$(\partial_1 \partial_2 f)(0) = (\partial_2 \partial_1 f)(0)$$

(für bel. $x \in \mathcal{U}$ betrachte $\tilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U} - x := \{y - x : y \in \mathcal{U}\}$ mit $\tilde{f} := f(\cdot + x)$)

$\mathcal{U}$ offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \delta,\ |x_2| < \delta\} \subseteq \mathcal{U}$

(i) $\forall |x_2| < \delta$ ist $F_{x_2} : \begin{array}{l}]-\delta,\delta[\to \mathbb{R} \\ x_1 \mapsto f(x_1,x_2) - f(x_1,0) \end{array}$ diff.bar.

Mittelwertsatz $\overset{\text{Kor. 5.19}}{\Rightarrow}$ $\forall x_1 \in \mathbb{R}, |x_1| < \delta, \exists \xi_1 \in \mathbb{R}$ mit $|\xi_1| < |x_1|$:

$$F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0) = \underbrace{F_{x_2}'(\xi_1)}_{(\partial_1 f)(\xi_1,x_2) - (\partial_1 f)(\xi_1,0)} x_1$$

hängt von x_1 und x_2 ab !

Ebenso: $G_{\xi_1} : \begin{array}{l}]-\delta,\delta[\to \mathbb{R} \\ x_2 \mapsto (\partial_1 f)(\xi_1,x_2) \end{array}$ diff.bar

$\overset{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists \xi_2 \in \mathbb{R}$ mit $|\xi_2| < |x_2|$, so dass

$$F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0) = x_1 x_2 G_{\xi_1}'(\xi_2) = x_1 x_2 (\partial_2 \partial_1 f)(\xi_1,\xi_2)$$

(ii) Sei nun $\varepsilon > 0$ bel.; da $\partial_2\partial_1 f$ stetig in $(0,0)$ $\Rightarrow$

$\exists \delta_\varepsilon \in]0,\delta]\ \forall |y_1|, |y_2| < \delta_\varepsilon : |(\partial_2\partial_1 f)(y_1,y_2) - (\partial_2\partial_1 f)(0,0)| < \varepsilon$

Somit, aus (i), $\forall x_1, x_2 \in]-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon[\setminus \{0\}$:

$$\Bigg| \underbrace{\frac{F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0)}{x_1 x_2}}_{\frac{1}{x_1}\left(\frac{f(x_1,x_2) - f(x_1,0)}{x_2} - \frac{f(0,x_2) - f(0,0)}{x_2}\right)} - \partial_2\partial_1 f(0,0) \Bigg| < \varepsilon$$

$$\overset{x_2 \to 0}{\Rightarrow} \left| \frac{(\partial_2 f)(x_1,0) - (\partial_2 f)(0,0)}{x_1} - (\partial_2\partial_1 f)(0,0) \right| \leq \varepsilon$$

($\partial_2 f$ existiert.!)

Somit: $\partial_2 f$ partiell diff.bar nach x_1 in $(0,0)$
und $(\partial_1\partial_2 f)(0,0) = (\partial_2\partial_1 f)(0,0)$ ■

8.9. Bemerkung

Die Voraussetzung „$\partial_k\partial_j f$ ist stetig"
ist wesentlich in Satz 8.8 (siehe Bsp. in Übung!)

8.10. Korollar Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ n-mal stetig partiell diff.bar und $\pi \in S_n$ (symmetrische Gruppe) eine Permutation von $\{1,..,n\}$

Dann gilt:

$$\partial_{j_n} \cdots \partial_{j_2}\partial_{j_1} f = \partial_{j_{\pi(n)}} \cdots \partial_{j_{\pi(2)}}\partial_{j_{\pi(1)}} f$$

8.11 Korollar Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen

(a) $A: U \to \mathbb{R}^3$ 2 mal stetig partiell diff.bar

$\Rightarrow$ $\operatorname{div} \operatorname{rot} A = 0$, d.h. $\langle \nabla, \nabla \times A \rangle = 0$

(b) $f: U \to \mathbb{R}$ 2 mal stetig partiell diff.bar

$\Rightarrow$ $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$, d.h. $\nabla \times (\nabla f) = 0$

Beweis: Übung!

8.12. Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ 2 mal partiell diff-bar.

- $$\Delta f := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2 f = \langle \nabla, \nabla f \rangle$$

$$\Delta := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \langle \nabla, \nabla \rangle \quad \text{Laplace-Operator}$$

- f harmonisch (auf U) $:\Leftrightarrow \Delta f = 0$

8.13. Beispiel

(a) radialsymm. Fkt. $f \circ r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $r(x) := \|x\|$, $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$

falls f 2 mal diff-bar auf $\mathbb{R}_>$

$\Rightarrow f \circ r$ 2 mal partiell. diff-bar auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und

$$\Delta f(r) = \langle \nabla, \underbrace{\nabla(f \circ r)}_{f'(r)\frac{x}{r}} \rangle \overset{\text{Lem. 8.5(b)}}{=} \frac{f'(r)}{r} \underbrace{\langle \nabla, x \rangle}_{d} + \langle x, \underbrace{\nabla \frac{f'(r)}{r}}_{\left(\frac{d}{dr}\frac{f'(r)}{r}\right)\frac{x}{r}} \rangle$$

Bsp. 8.3(b)

x steht hier für $id : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$$= \frac{f'(r)}{r} d + \frac{r^2}{r} \frac{f''(r) r - f'(r)}{r^2}$$

$$= f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r)$$

(b) $\frac{1}{r^{d-2}}$ ist harmonisch auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ $\forall d \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$

(verwende (a)!)

8.2. Differenzierbarkeit

In Verallg. von Kap. 8.1 betrachten wir gleich Abb. nach $\mathbb{R}^\nu$.

8.14. Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$, $f: U \to \mathbb{R}^\nu$

f (total) diff. bar in x :⟺
- $\exists A \equiv A_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\nu$ lineare Abb.
- $\exists$ Umgebung $V \equiv V_x$ von $0 \in \mathbb{R}^d$ mit $x + V \subseteq U$
- $\exists \varphi \equiv \varphi_x : V \to \mathbb{R}^\nu$ mit $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\|\varphi(y)\|}{\|y\|} = 0$,
- d.h. $\varphi = o(\|y\|)$, so dass $\forall y \in V$

$$f(x+y) = f(x) + Ay + \varphi(y)$$

Notation: $A =: (Df)(x) =: J_f(x)$ Differential, Jacobi-Matrix

Interpretation: Linearisiere f um x.

8.15. Bemerkungen

(a) Konsistent mit diff. bar für $d = \nu = 1$
$\Rightarrow$ $Ay = ay$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und $a = f'(x)$

(b) Matrixdarstellung von A in kanon. Basen

$$Ay = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}; \text{ mit } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\nu \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_\nu \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_j(x+y) = f_j(x) + \sum_{k=1}^{d} a_{jk} y_k + \varphi_j(y) \quad \forall j = 1, \dots, \nu$$

Demnach: $f: U \to \mathbb{R}^\nu$ diff. bar in x

$$\Longleftrightarrow \quad f_j : U \to \mathbb{R} \text{ diff. bar in } x \quad \forall j = 1, \dots, \nu$$

8.16. Beispiel: $U = \mathbb{R}^d$, $M = (m_{jk})_{jk=1,\dots,d}$ symm. $d\times d$-Matrix mit reellen Einträgen

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle x, Mx\rangle \end{array}$$ quadratische Form

$$\Rightarrow f(x+y) = \langle x, Mx\rangle + \langle y, Mx\rangle + \langle x, My\rangle + \underbrace{\langle y, My\rangle}_{=:\varphi(y)}$$

$$= f(x) + \underbrace{2\langle Mx, y\rangle}_{=:Ay} + \varphi(y)$$

hier: $A \in (\mathbb{R}^d)^*$ Dualraum

- $A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $y \mapsto 2\langle Mx, y\rangle$ linear
- $\varphi(y) = \mathcal{O}(\|y\|^2) \Rightarrow \varphi(y) = o(\|y\|) \quad (y \to 0)$

Einheitsvekt. in $\mathbb{R}^d$ in y-Richtung

da $|\varphi(y)| = \|y\|^2 \cdot \underbrace{|\langle e_y, Me_y\rangle|}$

$$\leq \|Me_y\| \leq \underbrace{\sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^d \\ \|\xi\|=1}} \|M\xi\|}$$

Matrixnorm $\to$ $=: \|M\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)} =: \|M\| < \infty$

(Es gilt:
$\|M\|$ = betragsmäßig größter Eigenwert von M (in diesem Fall (M symm.)))

$\Rightarrow$ f diff.bar in x $(\forall x \in \mathbb{R}^d)$

$\boxed{8.17 \text{ Satz}}$ Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in \mathcal{U}$ und $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$

Dann gilt: f diffbar in x $\Rightarrow$ f stetig in x

Warnung: aus partiell diff.bar folgt i.a. nicht Stetigkeit (vgl. Übung!)

Beweis: n.V. $\exists A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\nu$ linear, so dass $\forall x' \in \mathcal{U}$

$$f(x') = f(x) + A(x'-x) + o(\|x'-x\|) \quad \leftarrow \text{Norm in } \mathbb{R}^d$$

Sei $(x_n)_n \subseteq \mathcal{U}$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ $\left(\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \right)$

$$\Rightarrow \quad \|f(x_n) - f(x)\| \leq \|A\| \cdot \|x_n - x\| + \|o(\|x_n - x\|)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \blacksquare$$

Norm in $\mathbb{R}^\nu$

Bestimmung von $(Df)(x)$:

$\boxed{8.18. \text{ Satz}}$ Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\nu \end{pmatrix} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$

Dann gilt:

f diff.bar in x $\Rightarrow$ $\begin{cases} \forall j = 1, \dots, \nu, \ \forall k = 1, \dots, d \text{ ist } f_j \text{ in } x \\ \text{partiell diff.bar in Richtung } k \\ \text{und} \quad (Df)(x)_{jk} = (\partial_k f_j)(x) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \end{cases}$

Somit: Matrixdarstellung:

$$(Df)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix} =: \frac{\partial(f_1, \dots, f_\nu)}{\partial(x_1, \dots, x_d)}$$

"Funktionalmatrix"

j'ter Zeilenvektor ist $(\nabla f_j)(x)$

Beweis

n.V. gilt (vgl. Bem. 8.15): $\forall j = 1,\dots,\nu$, $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $x+y \in \mathcal{U}$,

$$f_j(x+y) = f_j(x) + \sum_{l=1}^{d} a_{jl} y_l + o(\|y\|) \qquad (y \to 0)$$

wähle $y = he_k$, d.h. $y_l = h\delta_{lk}$ $(h \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow f_j(x+he_k) = f_j(x) + a_{jk}h + o(|h|)$$

$$\overset{h\neq 0}{\Rightarrow} a_{jk} = \frac{f_j(x+he_k) - f_j(x)}{h} + \frac{o(|h|)}{h} \Rightarrow \text{Beh. mit } h \to 0 \quad \blacksquare$$

$\boxed{8.19.\ \text{Satz}}$ Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in \mathcal{U}$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar

Dann gilt:

$$\left.\begin{matrix}\partial_k f \text{ stetig in } x \\ \forall k = 1,\dots,d\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}f \text{ (total) diff.bar in } x, \\ \text{die Fundamentalmatrix ist} \\ \text{stetig in } x \text{, und in } x \text{ gleich } Df(x).\end{matrix}\right.$$

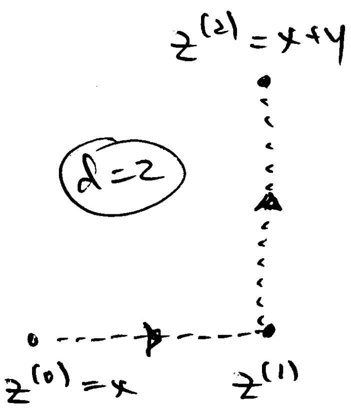
siehe Übung zur Def. für matrixwertige Fkt'en

Dies motiviert

Konvention: stetig diff.bar $:\Leftrightarrow$ stetig partiell diff.bar

(siehe auch Bem. 8.15 (b) für Fall $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$)

Beweis: Hier nur „$\Rightarrow$" und nur Diff.barkeit in x. Rest siehe Üb.



Idee: gehe von x zu $x+y$ parallel zu Koordinatenachsen ($\Rightarrow$ nur 1 Variable ändert sich jeweils!) und schätze Differenz von f mit Mittelwertsatz aus Ana 1 ab.

$\mathcal{U}$ offen $\Rightarrow B_\delta(x) \subseteq \mathcal{U}$ für ein $\delta > 0$

Sei $y \in \mathbb{R}^d$, $\|y\| < \delta \Rightarrow z^{(k)} := x + \sum_{j=1}^{k} y_j e_j \in \mathcal{U}$ $\quad \forall k = 1, \dots, d$

$y = (y_1, \dots, y_d)$

setze $z^{(0)} := x$

- somit $f(x+y) - f(x) = \sum_{k=1}^{d} \underbrace{f(z^{(k)}) - f(z^{(k-1)})}_{g_k(y_k) - g_k(0)}$

$\underbrace{g_k(y_k) - g_k(0)}_{g_k'(\xi_k) y_k}$ MWS, Ana 1 für $\xi_k \in \mathbb{R}$, $|\xi_k| < |y_k|$

$\underbrace{g_k'(\xi_k)}_{\frac{\partial f}{\partial x_k}(z^{(k-1)} + \xi_k e_k)}$

wobei $g_k : \,]-\delta, \delta[\, \to \mathbb{R}$, $\quad y \mapsto f(z^{(k-1)} + y e_k)$ diff. bar (n.V.)

$$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + \sum_{k=1}^{d} a_k y_k + \varphi(y)$$

mit $\quad a_k := \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$

$$\varphi(y) := \sum_{k=1}^{d} \left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(z^{(k-1)} + \xi_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right] y_k$$

Da
- $\|z^{(k-1)} + \xi_k e_k - x\| \xrightarrow{\|y\| \to 0} 0$
- $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ stetig in x

$$\Rightarrow \lim_{y \to 0} \frac{|\varphi(y)|}{\|y\|} \le \lim_{y \to 0} \sum_{k=1}^{d} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(z^{(k-1)} + \xi_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right| = 0$$

$\Rightarrow$ Beh. ■

Insbesondere gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{stetig (partiell)} \\ \text{diff. bar} \end{array}\right\} \overset{8.19}{\Longrightarrow} \text{(total) diff. bar} \overset{8.17}{\Longrightarrow} \text{stetig.}$$

8.20. Satz (Kettenregel)

Seien $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$, $V \subseteq \mathbb{R}^\nu$ offen, $f : \mathcal{U} \to V$, $g : V \to \mathbb{R}^n$.
Sei $x \in \mathcal{U}$, f diff. bar in x, g diff. bar in $f(x)$.
Dann ist $g \circ f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ diff. bar in x und

$$\underbrace{(D(g\circ f))(x)}_{n\times d\text{-Matrix}} = \underbrace{(Dg)(f(x))}_{\substack{n\times\nu\\ \text{Matrix}}} \cdot \overbrace{(Df)(x)}^{\nu\times d}$$

$\cdot$ Matrizenmultiplikation = Komposition linearer Abb.

Beweis: Sei $y := f(x) \in \mathbb{R}^\nu$

n.V. gilt:
- $f(x+x') = f(x) + \underbrace{A}_{(Df)(x)} x' + \underbrace{\varphi(x')}_{o(\|x'\|)}$
- $g(y+y') = g(y) + \underbrace{B}_{(Dg)(y)} y' + \underbrace{\psi(y')}_{o(\|y'\|)}$

$\forall$ hinr. kleinen $x' \in \mathbb{R}^d$, $y' \in \mathbb{R}^\nu$.

Wähle $y' := f(x+x') - f(x) = Ax' + \varphi(x') \quad (\xrightarrow{x'\to 0} 0)$

$$\Rightarrow (g\circ f)(x+x') = g(\underbrace{f(x+x')}_{f(x)+y'}) = (g\circ f)(x) + By' + \psi(y')$$
$$= (g\circ f)(x) + BAx' + \chi(x')$$

$$\text{mit } \chi(x') := B\varphi(x') + \psi(Ax' + \varphi(x'))$$

Zeige: $\chi(x') = o(\|x'\|) \quad (x' \to 0)$

- $$\frac{B\varphi(x')}{\|x'\|} = B \underbrace{\frac{\varphi(x')}{\|x'\|}}_{\xrightarrow{x'\to 0} 0} \xrightarrow{x'\to 0} 0$$

B linear

B stetig

- Setze $\tilde{\psi}(y) := \begin{cases} \psi(y)/\|y\| & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$

somit gilt $\lim\limits_{y\to 0} \tilde{\psi}(y) = 0$. (*)

$$\Rightarrow \|\psi(Ax' + \varphi(x'))\| = \underbrace{\|Ax' + \varphi(x')\|}_{\leq \|x'\| \left(\|A\| + \frac{\|\varphi(x')\|}{\|x'\|} \right)} \|\tilde{\psi}(Ax' + \varphi(x'))\|$$

$$\Rightarrow \lim_{x'\to 0} \frac{\|\psi(Ax' + \varphi(x'))\|}{\|x'\|} \leq \underbrace{\lim_{x'\to 0} \left(\|A\| + \frac{\|\varphi(x')\|}{\|x'\|} \right)}_{\|A\|} \cdot \underbrace{\lim_{x'\to 0} \|\tilde{\psi}(\underbrace{Ax' + \varphi(x')}_{\xrightarrow{x'\to 0} 0})\|}_{0 \quad (*)}$$

∎

Wichtiges Anwendungsbsp.

8.21 Korollar Sei $d = n = 1$ in Satz 8.20, also

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f_1(x), \dots, f_\nu(x)). \end{array}$$

Dann gilt
$$(g \circ f)'(x) = \sum_{j=1}^{\nu} (\partial_j g)(f_1(x), \dots, f_\nu(x))\, f_j'(x).$$

Beweis. Aus Satz 8.20 und 8.18:

$$(Df)(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_\nu'(x) \end{pmatrix}, \quad (Dg)(y) = ((\partial_1 g)(y), \dots, (\partial_\nu g)(y))$$ ∎

Als Vorbereitung für mehrdim. HDI:

8.22. Lemma Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, betrachte

$$I \to m \times n\text{-Matrizen } (\cong \mathbb{R}^{mn})$$

$$t \mapsto A(t) = (a_{jk}(t))_{\substack{1 \le j \le m \\ 1 \le k \le n}} \quad \text{mit } t \mapsto a_{jk}(t) \text{ stetig } \forall j,k$$

Mit $\int_I A(t)\,dt := \left(\int_I a_{jk}(t)\,dt\right)_{j,k}$ gilt:

$$\left\| \int_I A(t)\,dt \right\| \le \int_I \|A(t)\|\,dt \quad (\text{Dreiecks-Ungl.})$$

Beweis:

(i) $$\left\| \int_I A(t)\,dt \right\| = \sup_{0 \ne u \in \mathbb{R}^n} \frac{\left\| \overbrace{\left(\int_I A(t)\,dt\right) u}^{=: v \in \mathbb{R}^m} \right\|}{\|u\|} \quad (\text{Def. Matrixnorm})$$

(ii) $$0 \le \|v\|^2 = \left\langle \underbrace{\left(\int_I A(t)\,dt\right) u}_{\int_I A(t) u\,dt}, v \right\rangle = \int_I \langle A(t)u, v\rangle\,dt$$

$$\underset{\text{für Integrale}}{\overset{\text{gew. Dreiecks-Ungl.}}{\le}} \int_I \underbrace{|\langle A(t)u, v\rangle|}_{\le \underbrace{\|A(t)u\|}_{\le \|A(t)\| \cdot \|u\|} \cdot \|v\|}\,dt$$

Cauchy-Schwarz

$$\Rightarrow \|v\| \le \|u\| \int_I \|A(t)\|\,dt \Rightarrow \text{Beh. mit (i)}$$

$\boxtimes$

8.23. Satz (Mehr-dim. HDI)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}^\nu$ stetig diff.bar

Sei $y \in \mathbb{R}^d$, so dass $\underbrace{\{x+ty : t \in [0,1]\}}_{\text{Geradenstrecke}} \subset U$

Dann gilt

$$f(x+y) - f(x) = \left(\int_0^1 (Df)(x+ty)\, dt \right) y$$

Insbesondere ist

$$\| f(x+y) - f(x) \| \le \|y\| \sup_{t \in [0,1]} \| (Df)(x+ty) \| .$$

Beweis: 1. Teil: Sei $j \in \{1, \dots, \nu\}$, $g_j : \underset{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}{t \mapsto f_j(x+ty)}$

$$\Rightarrow f_j(x+y) - f_j(x) = g_j(1) - g_j(0) \overset{\text{HDI}}{=} \int_0^1 \underbrace{g_j'(t)}_{\sum_{k=1}^d (\partial_k f_j)(x+ty) y_k} dt$$

g_j stetig diff.bar nach Kor. 8.21

$$= \sum_{k=1}^d \int_I \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x+ty)}_{((Df)(x+ty))_{jk}} dt \; y_k \qquad (I = [0,1])$$

2. Teil: Aus 1. Teil, $\|My\| \le \|M\| \cdot \|y\|$

und Lemma 8.22. ☒

8.3. Satz von Taylor

Standardnotationen in mehrdim. Diff.rechnung:

8.24. Definition

- Für $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ (Multiindex) sei
  $|\alpha| := \sum_{j=1}^d \alpha_j$, $\alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_d! = \prod_{j=1}^d (\alpha_j!)$
- Für $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ sei $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d} = \prod_{j=1}^d (x_j^{\alpha_j})$
- Sei $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$, $|\alpha|$-mal stetig diff.bar

$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

(Reihenfolge der Diff. nach Kor. 8.10 egal!)

[falls $\alpha_j = 0$: keine Ableitung in j-Richtung]

Zur Vorbereitung:

8.25 Lemma Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ n-mal stetig diff.bar für ein $n \in \mathbb{N}$. Seien $x \in \mathcal{U}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ so dass $\{x + t\xi : t \in [0,1]\} \subseteq \mathcal{U}$. Dann ist

$$g : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x + t\xi) \end{array}$$

n-mal stetig diff.bar und $\forall\, k = 0, \dots, n$ gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x + t\xi)\, \xi^\alpha .$$

Beweis (0) $k=0$ klar!

(i) Hilfsbeh: Für $k=1,\dots,n$ gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{j_1=1}^{d} \cdots \sum_{j_k=1}^{d} (\partial_{j_k} \cdots \partial_{j_1} f)(x+t\xi)\, \xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_k}$$

Bew. der Hilfsbeh. mit Induktion:

- $k=1$ aus Kettenregel (Kor. 8.21): g diff. bar

$$\frac{dg}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{d} (\partial_j f)(x+t\xi)\,\xi_j \qquad \checkmark \text{ stetig in } t.$$

- Ind. schritt $k-1 \to k$ (für $2 \le k \le n$):

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{k-1} g}{dt^{k-1}}\right) \underset{\text{Ind. annahme}}{=} \frac{d}{dt}\Bigg[\sum_{j_1=1}^{d} \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^{d} \overbrace{(\partial_{j_{k-1}} \cdots \partial_{j_1} f)(x+t\xi)}^{\text{diff. bar in } t \text{ u. V.}} \cdot \xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_{k-1}}\Bigg]$$

$$= \sum_{j_1=1}^{d} \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^{d} \xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_{k-1}} \underbrace{\frac{d}{dt} (\underbrace{\partial_{j_{k-1}} \cdots \partial_{j_1} f}_{=:h})(x+t\xi)}_{\sum_{l=1}^{d} (\partial_l h)(x+t\xi)\,\xi_l} \quad \text{Kor. 8.21}$$

insbes. $\frac{d^k g}{dt^k}$ stetig. $\Rightarrow$ Hilfsbeh. $\checkmark$

(ii) Zusammenfassen gleicher Terme in Hilfsbeh.: Zu geg. $(j_1,\dots,j_k)$

sei $\alpha_j := \sum_{\varkappa=1}^{k} \delta_{j,j_\varkappa}$ für $j=1,\dots,d$ $(\Rightarrow \alpha_j \in \{0,1,\dots,k\})$

Anzahl, wie viele der $j_\varkappa$'s gleich j sind

- $\underset{\text{(Schwarz)}}{\overset{\text{Kor. 8.10}}{\Longrightarrow}}$ $\partial_{j_k} \cdots \partial_{j_1} f = \partial^\alpha f$ mit $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d)$

- $\xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_k} = \xi^\alpha$

- Anzahl der Tupel $(j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, d\}^k$, für die gilt: $\sum_{k=1}^{k} \delta_{j, j_k} = \alpha_j \quad \forall j = 1, \dots, d$, ist

$$\frac{k!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_d!}, \quad \text{da} \quad \underbrace{\underbrace{\overset{1}{\sqcup}\overset{1}{\sqcup}\cdots\overset{1}{\sqcup}}_{\alpha_1} \,\Big|\, \underbrace{\overset{2}{\sqcup}\cdots\overset{2}{\sqcup}}_{\alpha_2} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \underbrace{\overset{d}{\sqcup}\cdots\overset{d}{\sqcup}}_{\alpha_d}}_{k \text{ Plätze}}$$

dabei ist per Konstruktion $|\alpha| = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j = k \Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

$\boxed{8.26.\ \text{Satz}}$ (Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ und $\{x + t\xi : t \in [0,1]\} \subseteq U$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und f $(n+1)$-mal stetig diff-bar. Dann $\exists\, \Theta = \Theta_{x,\xi} \in [0,1]$, so dass

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{(\partial^\alpha f)(x + \Theta \xi)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

kurz für: $\{\alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| \leq n\}$

Beweis: Idee: Führe auf 1-dim. Satz von Taylor (Satz 6.42) zurück

Setze dazu

$$g: \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x + t\xi) \end{array}$$

Kettenregel $\Rightarrow$ $(n+1)$-mal stetig diff-bar

und, nach Satz 6.42,

$$\exists\, \theta \in [0,1]: g(1) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{g^{(k)}(0)}{k!}}_{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(x)\xi^\alpha} 1^k + \underbrace{\frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}}_{\sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(x+\theta\xi)\cdot\xi^\alpha} \cdot 1^{n+1}$$

$\nearrow$ Lemma 8.25 $\blacksquare$

8.27. Korollar Unter den Vor. von Satz 8.26 gilt, für $\xi \to 0$:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\le n+1} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + o(\|\xi\|^{n+1})$$

8.28. Bemerkung: Dies ist für $d = 1$ eine Variante von Kor. 6.44 (dort nur $O(\xi^{n+1})$, aber auch nur $\sum_{\alpha=0}^{n}$)

Beweis von Kor. 8.27.

$x \in \mathcal{U}$ offen $\Rightarrow \exists\, \delta > 0: x + t\xi \in \mathcal{U}\ \forall t \in [0,1]\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \|\xi\| < \delta$

$$\overset{\text{Satz 8.26}}{\Rightarrow} f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\le n+1} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \underbrace{\left[(\partial^\alpha f)(x+\theta\xi) - (\partial^\alpha f)(x)\right]}_{=: r_{x,\alpha}(\xi)}$$

(i) da $\theta = \theta_{x,\xi} \in [0,1]$ und $\partial^\alpha f$ stetig

$$\Rightarrow \lim_{\xi \to 0} r_{x,\alpha}(\xi) = 0 \quad \text{für alle } \alpha,\ |\alpha| = n+1$$

(ii) $$|\xi^\alpha| = \underbrace{|\xi_1|}_{\le\|\xi\|}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{|\xi_d|}_{\le\|\xi\|}^{\alpha_d} \le \|\xi\|^{|\alpha|}$$

$(i) \wedge (ii) \overset{|\alpha|=n+1}{\Longrightarrow} \forall \xi \in B_\delta(0)\setminus\{0\}:$

$$\frac{|r_{x,\alpha}(\xi)|\,|\xi^\alpha|}{\|\xi\|^{n+1}} \leq |r_{x,\alpha}(\xi)| \xrightarrow{\xi \to 0} 0$$

Da $\sum\limits_{|\alpha|=n+1}$ nur endliche Summe $\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

8.29. Beispiel: $U = \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = x_1 \sin(x_2)$
(bel. oft stetig diff.bar)

Entwicklungspkt. $x = (0,0) \Rightarrow$ mit ($\xi = x$, $n = 1$ in Kor 8.27)

$$f(x_1,x_2) = \underbrace{f(0,0)}_{0} + \underbrace{\frac{(\partial_1 f)(0,0)}{1!\,0!}}_{0} x_1 + \underbrace{\frac{(\partial_2 f)(0,0)}{0!\,1!}}_{0} x_2$$

$$+ \underbrace{\frac{(\partial_1^2 f)(0,0)}{2!\,0!}}_{0} x_1^2 + \underbrace{\frac{(\partial_1\partial_2 f)(0,0)}{1!\,1!}}_{1} x_1 x_2 + \underbrace{\frac{(\partial_2^2 f)(0,0)}{0!\,2!}}_{0} x_2^2 + o(\|x\|^2)$$

$$= x_1 x_2 + o(\|x\|^2) \qquad (x \to 0).$$

8.30. Bemerkung

Struktur der Taylor-Polynome für $|\alpha| \leq 2$: $P_n(\xi) := \sum\limits_{|\alpha|=n} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!}\xi^\alpha$

• $n = 0$: $\alpha = (0,\dots,0) \in \mathbb{N}_0^d$ einziger Multiindex mit $|\alpha| = 0$

$$P_0(\xi) = f(x)$$

• $n = 1$: d Multiindizes mit $|\alpha| = 1$: $\underbrace{(1,0,\dots,0)}_{\mu_1}, \dots, \underbrace{(0,\dots,0,1)}_{\mu_d}$

$$\Rightarrow P_1(\xi) = \sum_{j=1}^d \underbrace{\frac{1}{\mu_j!}}_{1} \underbrace{(\partial^{\mu_j} f)(x)}_{(\partial_j f)(x)} \underbrace{\xi^{\mu_j}}_{\xi_j} = \langle (\nabla f)(x), \xi \rangle$$

Somit Kor. 8.27 mit $n=0$: f stetig diff-bar $\Rightarrow$

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle (\nabla f)(x), \xi \rangle + o(\|\xi\|^1)$$

- vgl. Def. f diff. bar in x
- da hier sogar f <u>stetig</u> diff-bar, zusätzliche Info über Fehlerterme, siehe Bew. von Kor. 8.27.

• <u>$n=2$</u>: Multiindizes mit $|\alpha|=2$:

- $(0,\dots,0,\underset{i.\text{ Stelle}}{1},0,\dots,0,\underset{j.\text{Stelle}}{1},0,\dots,0) =: \mu_{ij}$ für $1\le i<j\le d$
- $(0,\dots,0,\underset{j.\text{Stelle}}{2},0,\dots,0) =: \lambda_j$ für $1\le j\le d$

$\Rightarrow \mu_{ij}! = 1!1! = 1$, $\lambda_j! = 2! = 2$

$\xi^{\mu_{ij}} = \xi_i\xi_j$, $\xi^{\lambda_j} = \xi_j^2$

$\partial^{\mu_{ij}} = \partial_i\partial_j$, $\partial^{\lambda_j} = \partial_j^2$

also: $$P_2(\xi) = \sum_{1\le i<j\le d} (\partial_i\partial_j f)(x)\xi_i\xi_j + \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{2}(\partial_j^2 f)(x)\xi_j^2$$

Schwarz! $$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \xi_i(\partial_i\partial_j f)(x)\xi_j$$

quadratische Form in $\xi\in\mathbb{R}^d$

$\boxed{\text{8.31. Definition}}$ $U\subseteq\mathbb{R}^d$ offen, $x\in U$, $f: U\to\mathbb{R}$ 2-mal stetig diff. bar in x.

$$\big((\partial_j\partial_k f)(x)\big)_{1\le j,k\le d} =: (D^2 f)(x)$$

$d\times d$-Matrix der 2. part. Ableitungen in x (<u>symm.</u> wegen Schwarz!)

<u>Hesse-Matrix von f in x</u>

8.32. Bemerkung: Kor. 8.27. für $n=1$:

f 2-mal stetig diff.bar $\Rightarrow$

$$f(x+\xi) = f(x) + \underbrace{\langle (\nabla f)(x), \xi \rangle}_{(Df)(x)\,\xi} + \frac{1}{2} \langle \xi, (D^2 f)(x)\,\xi \rangle + o(\|\xi\|^2) \quad \text{für } \xi \to 0$$

8.4. Lokale Extrema

8.33. Definition Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

- $x \in \mathcal{U}$ lokales Maximum (bzw. Minimum)

  $:\Leftrightarrow \exists$ Umgebung $V \subseteq \mathcal{U}$ von x mit $f(y) \leq f(x) \quad \forall y \in V$
  (bzw. $f(y) \geq f(x)$)

  falls V so wählbar, dass "=" nur für $x = y$: striktes lok. Max (bzw. Min)
- lokales Extremum: lokales Max oder Min.

8.34. Satz (Notwendige Bed. für lokale Extrema)
Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathcal{U} \text{ ist lokales Extremum} \\ \text{von } f \end{array}\right\} \Rightarrow (\nabla f)(x) = 0$$

(x kritischer/stationärer Pkt. von f)

Beweis: $x \in \mathcal{U}$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall j = 1, \dots, d: x + te_j \in \mathcal{U}$
$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

Setze $g_j: \begin{array}{l}]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(x + te_j) \end{array}$; n.V. gilt $\forall j = 1, \dots, d$:

- g_j diff.bar
- g_j hat lok. Extremum bei $t = 0$

$$\overset{\text{Ana 1}}{\underset{(\text{Satz 5.16})}{\Rightarrow}} \quad 0 = g_j'(0) = (\partial_j f)(x) \qquad \blacksquare$$

Exkurs über symmetrische $d \times d$-Matrizen M:

8.35. Definition Sei $M \in \mathrm{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ symm.

- M (strikt) positiv (definit) $:\Leftrightarrow \langle x, Mx \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$
  ($M > 0$)
- M positiv (semidefinit) $:\Leftrightarrow \langle x, Mx \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
  ($M \geq 0$) (auch: nicht-negativ)
- M (strikt) negativ (semidefinit) $:\Leftrightarrow -M$ (strikt) positiv (semidefinit)
  ($M < 0$) ($M \leq 0$)
- M indefinit $:\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $\langle x, Mx \rangle > 0$, $\langle y, My \rangle < 0$

Lin. Algebra: symm. Matrizen orthogonal diagonalisierbar,

d.h. $\exists$ Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{R}^d$ ← Eigenvektoren

$(\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk})$

$\exists \mu_1, \dots, \mu_d \in \mathbb{R}$: $\quad M v_j = \mu_j v_j \quad \forall j = 1, \dots, d$

← Eigenwerte.

8.36 Satz (Numerischer Wertebereich von M)

Sei $M \in \mathrm{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ symmetrisch mit Eigenwerten $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_d$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}^d$:

$$\mu_1 \|x\|^2 \leq \langle x, Mx \rangle \leq \mu_d \|x\|^2$$

Links gilt Gleichheit für $x = v_1$,

rechts für $x = v_d$.

Beweis: Entwicklung von $x \in \mathbb{R}^d$ in ONB aus Eigenvekt.

$$x = \sum_{j=1}^{d} \xi_j v_j \qquad \text{mit } \xi_j := \langle v_j, x \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle x, Mx \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{d} \xi_j v_j, M\Big(\sum_{k=1}^{d} \xi_k v_k\Big) \Big\rangle$$

$$= \underbrace{\sum_{j,k=1}^{d} \xi_j \xi_k \langle v_j, \underbrace{Mv_k}_{\mu_k v_k} \rangle}_{\mu_k \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{\delta_{jk}}} = \sum_{j=1}^{d} \mu_j |\xi_j|^2$$

$$\begin{cases} \le \mu_d \sum_{j=1}^{d} |\xi_j|^2 \\ \ge \mu_1 \sum_{j=1}^{d} |\xi_j|^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Beh. mit } \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{d} \xi_j v_j, \sum_{k=1}^{d} \xi_k v_k \Big\rangle = \sum_{j,k=1}^{d} \xi_j \xi_k \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{\delta_{jk}}$$

$$= \sum_{j=1}^{d} |\xi_j|^2 \qquad \blacksquare$$

8.37 Korollar Sei $M \in \mathrm{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ symmetrisch.

- M strikt positiv $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von M sind > 0
- M nicht-negativ $\Leftrightarrow$ " " " " " ≥ 0
- M indefinit $\Leftrightarrow$ $\exists$ Eigenwerte $\mu < 0$ und $\tilde{\mu} > 0$

Oft nützlich: Hurwitz-Kriterium (vgl. Lin. Alg.; hier kein Bew.)

M strikt positiv $\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren von M sind > 0

$$\| \\ M_n := \det (m_{jk})_{1 \le j,k \le n}$$

für $n = 1, \ldots, d$.

Exkurs Ende

8.38. Satz (Hinreichende Bed. für lokale Extrema)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig diff.bar.

Dann gilt:

(a) $(\nabla f)(x) = 0$ und $(D^2 f)(x)$ strikt positiv $\Big\} \Rightarrow$ striktes lok. Minimum bei x

(b) $(\nabla f)(x) = 0$ und $(D^2 f)(x)$ strikt negativ $\Big\} \Rightarrow$ striktes lok. Maximum bei x

Warnung: Falls $(D^2 f)(x)$ nur pos./neg. semidefinit, ist ohne Zusatzinfo keine Aussage möglich; vgl. Bsp. 8.39(b), oder $\mathbb{R} \ni x \mapsto a x^4$, $a \in \mathbb{R}$.

Beweis: f 2-mal stetig diff.bar $\overset{\text{Bem. 8.32}}{\Longrightarrow}$ (da $(\nabla f)(x) = 0$)

$$f(x+\xi) = f(x) + \frac{1}{2}\langle \xi, \underbrace{(D^2 f)(x)}_{\text{sym. Hesse-Matrix}} \xi \rangle + \varphi(\xi) \quad \forall \xi \text{ in Umgeb. von } 0.$$

(a) [(b) analog!]

- Kor. 8.37 $\Rightarrow$ kleinster Eigenwert μ von $(D^2 f)(x)$ erfüllt $\mu > 0$
- Bem. 8.32: $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|^2)$, also $\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} \xrightarrow{\xi \to 0} 0$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0: \left| \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} \right| < \frac{\mu}{4} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \text{ mit } \|\xi\| < \delta$$

$$\Rightarrow f(x+\xi) - f(x) \overset{\text{Satz 8.36}}{\geq} \frac{1}{2}\mu \|\xi\|^2 + \underbrace{\varphi(\xi)}_{\geq -\frac{\mu}{4}\|\xi\|^2}$$

$$\geq \frac{\mu}{4}\|\xi\|^2 > 0 \quad \forall \xi \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$$

$\blacksquare$

8.34. Beispiele

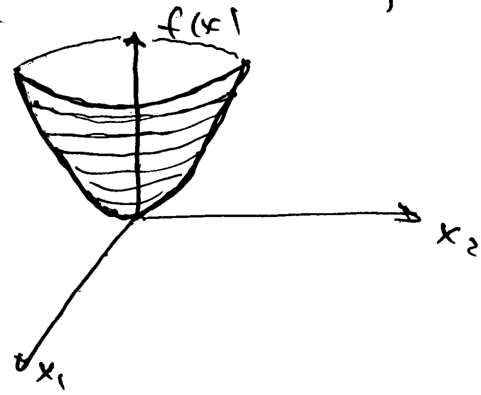
(a) $U = \mathbb{R}^2$, $f(x) := x_1^2 + x_2^2$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ • $(\nabla f)(x) = 2(x_1, x_2)$; $\Rightarrow$ $(\nabla f)(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• Hesse-Matrix $(D^2 f)(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^2)$ strikt positiv.

$\Rightarrow$ $x = 0$ striktes lok. Min.

(hier sogar: striktes globales Min.)



(b) $U = \mathbb{R}^2$; $f(x) := a x_1^4 + x_2^2$, $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ • $(\nabla f)(x) = (4 a x_1^3, 2x_2)$

$\Rightarrow (\nabla f)(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{für } a \neq 0 \\ x = (c, 0),\ c \in \mathbb{R}, & \text{für } a = 0 \end{cases}$

• $(D^2 f)(x) = \begin{pmatrix} 12 a x_1^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (D^2 f)(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $(\forall a)$

nicht-negativ

aber: $a > 0 \Rightarrow x = 0$ striktes lok. Min

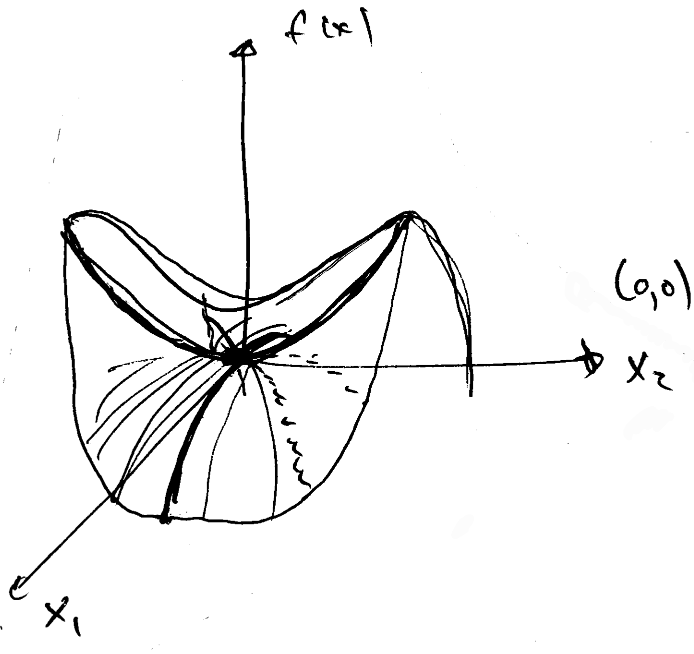
$a = 0 \Rightarrow x = (c, 0)$ lok. Min $(\forall c)$

$a < 0 \Rightarrow x = 0$ kein lok. Extremum:

$a < 0$:

• $f(x_1, 0) = a x_1^4 < 0 = f(0,0)$ $\forall x_1 \neq 0$

• $f(0, x_2) = x_2^2 > 0 = f(0,0)$ $\forall x_2 \neq 0$



(0,0) Sattelpunkt

(siehe nächste Def.)

8.40. Definition $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ part.-diff.bar.

$x \in \mathcal{U}$ Sattelpunkt von f $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (\nabla f)(x) = 0, \text{ und } x \text{ ist } \underline{\text{kein}} \\ \text{lok. Extremum von } f \end{cases}$

8.41. Beispiel: $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$, $f(x) = -x_1^2 + x_2^2$

$\Rightarrow$ • $(\nabla f)(x) = (-2x_1, 2x_2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• $(D^2 f)(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $(\forall x)$ indefinit

Es gilt: $f(x_1, 0) < 0 \ \forall 0 \neq x_1$

$f(0, x_2) > 0 \ \forall 0 \neq x_2$

$\Rightarrow (0,0)$ Sattelpunkt.

Dies motiviert

8.42. Satz $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in \mathcal{U}$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig diff.-bar. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} (\nabla f)(x) = 0 \text{ und} \\ (D^2 f)(x) \text{ indefinit} \end{array}\right\} \Rightarrow x \text{ ist Sattelpunkt von } f$$

Beweis: Übung; ähnlich zu Satz 8.38.