8.4. Lokale Extrema

8.33. Definition Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

- $x \in \mathcal{U}$ lokales Maximum (bzw. Minimum)

  $:\Leftrightarrow \exists$ Umgebung $V \subseteq \mathcal{U}$ von x mit $f(y) \leq f(x) \ \forall y \in V$
  (bzw. $f(y) \geq f(x)$)

  falls V so wählbar, dass "=" nur für $x = y$: striktes lok. Max
  (bzw. Min)
- lokales Extremum: lokales Max oder Min.

8.34. Satz (Notwendige Bed. für lokale Extrema)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathcal{U} \text{ ist lokales Extremum} \\ \quad\quad \text{von } f \end{array}\right\} \Rightarrow (\nabla f)(x) = 0$$

(x kritischer/stationärer Pkt. von f)

Beweis: $x \in \mathcal{U}$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall j = 1, \ldots, d: \ x + te_j \in \mathcal{U}$
$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

Setze $g_j: \begin{array}{l}]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(x + te_j) \end{array}$; n.V. gilt $\forall j = 1, \ldots, d$:

- g_j diff.bar
- g_j hat lok. Extremum bei $t = 0$

$$\underset{(\text{Satz } 5.16)}{\overset{\text{Ana1}}{\Longrightarrow}} \quad 0 = g_j'(0) = (\partial_j f)(x)$$

$\blacksquare$

Exkurs über symmetrische $d \times d$-Matrizen M:

8.35. Definition Sei $M \in \mathrm{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ symm.

- M (strikt) positiv (definit) $:\Leftrightarrow \langle x, Mx \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$
  $(M > 0)$
- M positiv (semidefinit) $:\Leftrightarrow \langle x, Mx \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
  $(M \geq 0)$ (auch: nicht-negativ)
- M (strikt) negativ (semidefinit) $:\Leftrightarrow -M$ (strikt) positiv (semidefinit)
  $(M < 0)$, $(M \leq 0)$
- M indefinit $:\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $\langle x, Mx \rangle > 0$, $\langle y, My \rangle < 0$

Lin-Algebra: symm. Matrizen orthogonal diagonalisierbar,
d.h. $\exists$ Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{R}^d$ ← Eigenvektoren
$(\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk})$
$\exists \mu_1, \dots, \mu_d \in \mathbb{R}$: $\quad M v_j = \mu_j v_j \quad \forall j = 1, \dots, d$
← Eigenwerte.

8.36 Satz (Numerischer Wertebereich von M)

Sei $M \in \mathrm{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ symmetrisch mit Eigenwerten $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_d$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}^d$:

$$\mu_1 \|x\|^2 \leq \langle x, Mx \rangle \leq \mu_d \|x\|^2$$

Links gilt Gleichheit für $x = v_1$,
rechts für $x = v_d$.

<u>Beweis</u>: Entwicklung von $x \in \mathbb{R}^d$ in ONB aus Eigenvekt.

$$x = \sum_{j=1}^{d} \xi_j v_j \quad \text{mit } \xi_j := \langle v_j, x \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle x, Mx \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{d} \xi_j v_j, M\Big(\sum_{k=1}^{d} \xi_k v_k\Big) \Big\rangle$$

$$= \sum_{j,k=1}^{d} \xi_j \xi_k \underbrace{\langle v_j, \underbrace{Mv_k}_{\mu_k v_k} \rangle}_{\mu_k \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{\delta_{jk}}} = \sum_{j=1}^{d} \mu_j |\xi_j|^2$$

$$\begin{cases} \le \mu_d \sum_{j=1}^{d} |\xi_j|^2 \\ \ge \mu_1 \sum_{j=1}^{d} |\xi_j|^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Beh. mit } \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{d} \xi_j v_j, \sum_{k=1}^{d} \xi_k v_k \Big\rangle = \sum_{j,k=1}^{d} \xi_j \xi_k \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{\delta_{jk}}$$

$$= \sum_{j=1}^{d} |\xi_j|^2 \qquad \blacksquare$$

8.37 Korollar Sei $M \in \mathrm{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ symmetrisch.

- M strikt positiv $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von M sind > 0
- M nicht-negativ $\Leftrightarrow$ " " " " " ≥ 0
- M indefinit $\Leftrightarrow$ $\exists$ Eigenwerte $\mu < 0$ und $\tilde{\mu} > 0$

<u>Oft nützlich</u>: <u>Hurwitz-Kriterium</u> (vgl. Lin. Alg.; hier kein Bew.)

M strikt positiv $\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren von M sind > 0

$$\big\Vert$$

$$M_n := \det (m_{jk})_{1 \le j,k \le n}$$

für $n = 1, \dots, d$.

Exkurs Ende

8.38. Satz (Hinreichende Bed. für lokale Extrema)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig diff-bar. Dann gilt:

(a) $\left.\begin{array}{l}(\nabla f)(x) = 0 \text{ und} \\ (D^2 f)(x) \text{ strikt positiv}\end{array}\right\} \Rightarrow$ striktes lok. Minimum bei x

(b) $\left.\begin{array}{l}(\nabla f)(x) = 0 \text{ und} \\ (D^2 f)(x) \text{ strikt negativ}\end{array}\right\} \Rightarrow$ striktes lok. Maximum bei x

Warnung: Falls $(D^2 f)(x)$ nur pos./neg. semidefinit, ist ohne Zusatzinfo keine Aussage möglich; vgl. Bsp. 8.39(b), oder $\mathbb{R} \ni x \longmapsto ax^4$, $a \in \mathbb{R}$.

Beweis: f 2-mal stetig diff-bar $\overset{\text{Bem. 8.32}}{\Longrightarrow}$ (da $(\nabla f)(x) = 0$)

$$f(x+\xi) = f(x) + \frac{1}{2}\langle \xi, \underbrace{(D^2 f)(x)}_{\text{sym. Hesse-Matrix}}\xi\rangle + \varphi(\xi) \quad \forall \xi \text{ in Umgeb. von } 0.$$

(a) [(b) analog!]

- Kor. 8.37 $\Rightarrow$ kleinster Eigenwert μ von $(D^2 f)(x)$ erfüllt $\mu > 0$
- Bem. 8.32: $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|^2)$, also $\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} \xrightarrow{\xi \to 0} 0$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0: \left|\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2}\right| < \frac{\mu}{4} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \text{ mit } \|\xi\| < \delta$$

$$\Rightarrow f(x+\xi) - f(x) \overset{\text{Satz 8.36}}{\geq} \frac{1}{2}\mu\|\xi\|^2 + \underbrace{\varphi(\xi)}_{\geq -\frac{\mu}{4}\|\xi\|^2}$$

$$\geq \frac{\mu}{4}\|\xi\|^2 > 0 \quad \forall \xi \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$$

$\blacksquare$

8.34. Beispiele

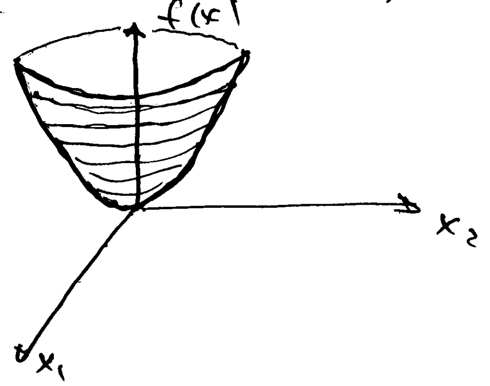
(a) $U = \mathbb{R}^2$, $f(x) := x_1^2 + x_2^2$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ • $(\nabla f)(x) = 2(x_1, x_2)$; $\Rightarrow$ $(\nabla f)(x) = 0 \iff x = 0$

• Hesse-Matrix $(D^2 f)(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^2)$ strikt positiv.

$\Rightarrow$ $x = 0$ striktes lok. Min.

(hier sogar: striktes globales Min.)



(b) $U = \mathbb{R}^2$; $f(x) := a x_1^4 + x_2^2$, $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ • $(\nabla f)(x) = (4a x_1^3, 2x_2)$

$\Rightarrow (\nabla f)(x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 & \text{für } a \neq 0 \\ x = (c, 0),\ c \in \mathbb{R}, & \text{für } a = 0 \end{cases}$

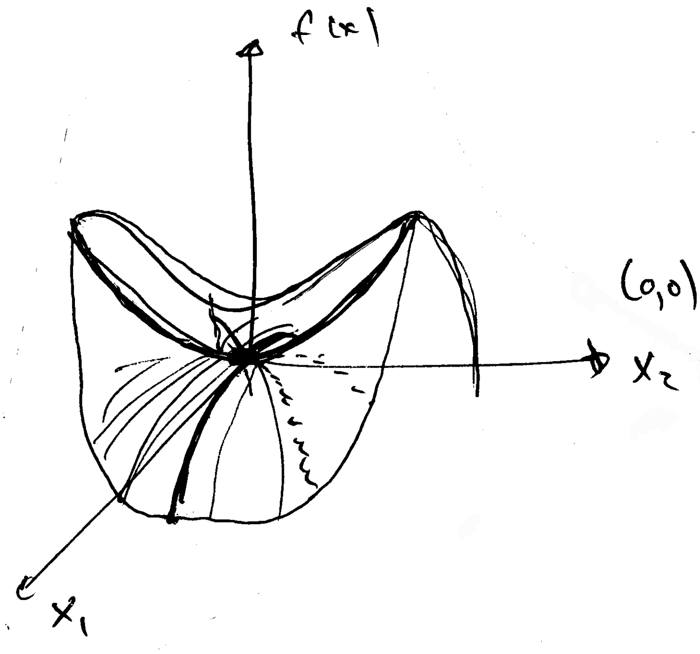
• $(D^2 f)(x) = \begin{pmatrix} 12 a x_1^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (D^2 f)(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{nicht-negativ}}$ $(\forall a)$

aber: $a > 0 \Rightarrow x = 0$ striktes lok. Min

$a = 0 \Rightarrow x = (c, 0)$ lok. Min $(\forall c)$

$a < 0 \Rightarrow x = 0$ kein lok. Extremum:

$a < 0$:



• $f(x_1, 0) = a x_1^4 < 0 = f(0,0)$ $\forall x_1 \neq 0$

• $f(0, x_2) = x_2^2 > 0 = f(0,0)$ $\forall x_2 \neq 0$

(0,0) Sattelpunkt

(siehe nächste Def.)

8.40. Definition $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ part.-diff.-bar.

$x \in U$ Sattelpunkt von f $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (\nabla f)(x) = 0, \text{ und } x \text{ ist kein} \\ \text{lok. Extremum von } f \end{cases}$

8.41. Beispiel: $U = \mathbb{R}^2$, $f(x) = -x_1^2 + x_2^2$

$\Rightarrow$ • $(\nabla f)(x) = (-2x_1, 2x_2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• $(D^2 f)(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $(\forall x)$ indefinit

Es gilt: $f(x_1, 0) < 0 \ \forall\, 0 \neq x_1$

$f(0, x_2) > 0 \ \forall\, 0 \neq x_2$

$\Rightarrow (0,0)$ Sattelpunkt.

Dies motiviert

8.42. Satz $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$, $f: U \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig diff.-bar. Dann gilt:

$\left.\begin{array}{l} (\nabla f)(x) = 0 \text{ und} \\ (D^2 f)(x) \text{ indefinit} \end{array}\right\} \Rightarrow x \text{ ist Sattelpunkt von } f$

Beweis: Übung; ähnlich zu Satz 8.38.