8.3. Satz von Taylor

Standardnotationen in mehrdim. Diff.rechnung:

8.24. Definition

- Für $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ (Multiindex) sei
  $|\alpha| := \sum_{j=1}^d \alpha_j$, $\alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_d! = \prod_{j=1}^d (\alpha_j!)$
- Für $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ sei $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d} = \prod_{j=1}^d (x_j^{\alpha_j})$
- Sei $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$, $|\alpha|$-mal stetig diff.bar

$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

(Reihenfolge der Diff. nach Kor. 8.10 egal!)

[falls $\alpha_j = 0$: keine Ableitung in j-Richtung]

Zur Vorbereitung:

8.25 Lemma Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ n-mal stetig diff.bar für ein $n \in \mathbb{N}$. Seien $x \in \mathcal{U}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ so dass $\{x + t\xi : t \in [0,1]\} \subseteq \mathcal{U}$. Dann ist

$$g : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x + t\xi) \end{array}$$

n-mal stetig diff.bar und $\forall k = 0, \dots, n$ gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x + t\xi)\, \xi^\alpha .$$

Beweis (0) $k=0$ klar!

(i) Hilfsbeh: Für $k=1,\dots,n$ gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{j_1=1}^{d} \cdots \sum_{j_k=1}^{d} (\partial_{j_k} \cdots \partial_{j_1} f)(x+t\xi)\, \xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_k}$$

Bew. der Hilfsbeh. mit Induktion:

- $k=1$ aus Kettenregel (Kor. 8.21): g diff. bar

$$\frac{dg}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{d} (\partial_j f)(x+t\xi)\, \xi_j \quad \checkmark \text{ stetig in } t.$$

- Ind. schritt $k-1 \to k$ (für $2 \le k \le n$):

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{d^{k-1} g}{dt^{k-1}}\right)}_{\text{Ind. annahme}} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{j_1=1}^{d} \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^{d} \overbrace{(\partial_{j_{k-1}} \cdots \partial_{j_1} f)(x+t\xi)}^{\text{diff. bar in } t \text{ u. V.}} \cdot \xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_{k-1}}\right]$$

$$= \sum_{j_1=1}^{d} \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^{d} \xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_{k-1}} \underbrace{\frac{d}{dt}(\underbrace{\partial_{j_{k-1}} \cdots \partial_{j_1} f}_{=:h})(x+t\xi)}_{\text{Kor. 8.21 } \sum_{l=1}^{d} (\partial_l h)(x+t\xi)\, \xi_l}$$

insbes. $\frac{d^k g}{dt^k}$ stetig. $\Rightarrow$ Hilfsbeh. $\checkmark$

(ii) Zusammenfassen gleicher Terme in Hilfsbeh.: Zu geg. $(j_1,\dots,j_k)$

sei $\alpha_j := \sum_{\kappa=1}^{k} \delta_{j, j_\kappa}$ für $j=1,\dots,d$ $\quad (\Rightarrow \alpha_j \in \{0,1,\dots,k\})$

Anzahl, wie viele der j_κ's gleich j sind

- $\overset{\text{Kor. 8.10}}{\underset{\text{(Schwarz)}}{\Longrightarrow}}$ $\partial_{j_k} \cdots \partial_{j_1} f = \partial^\alpha f$ mit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

- $\xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_k} = \xi^\alpha$

- Anzahl der Tupel $(j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, d\}^k$, für die gilt: $\sum_{k=1}^{k} \delta_{j, j_k} = \alpha_j \ \forall j = 1, \dots, d$, ist

$$\frac{k!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_d!}, \text{ da } \underbrace{\underbrace{\overset{1}{\sqcup}\overset{1}{\sqcup}\dots\overset{1}{\sqcup}}_{\alpha_1} \Big| \underbrace{\overset{2}{\sqcup}\dots\overset{2}{\sqcup}}_{\alpha_2} \Big| \dots \Big| \underbrace{\overset{d}{\sqcup}\dots\overset{d}{\sqcup}}_{\alpha_d}}_{k \text{ Plätze}} \Big|$$

dabei ist per Konstruktion $|\alpha| = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j = k \Rightarrow$ Beh. ∎

8.26. Satz (Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ und $\{x + t\xi : t \in [0,1]\} \subseteq U$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und f $(n+1)$-mal stetig diff.bar. Dann $\exists\, \Theta = \Theta_{x,\xi} \in [0,1]$, so dass

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{(\partial^\alpha f)(x + \Theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

kurz für: $\{\alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| \leq n\}$

Beweis: Idee: Führe auf 1-dim. Satz von Taylor (Satz 6.42) zurück

Setze dazu

$$g: \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x + t\xi) \end{array}$$

$\overset{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow}$ $(n+1)$-mal stetig diff.bar

und, nach Satz 6.42,

$$\exists\, \theta \in [0,1]: \; g(1) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{g^{(k)}(0)}{k!}}_{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(x)\xi^\alpha} 1^k + \underbrace{\frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}}_{\sum_{|\alpha|=n+1}\frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(x+\theta\xi)\cdot\xi^\alpha} \cdot 1^{n+1}$$

Lemma 8.25 ∎

8.27. Korollar Unter den Vor. von Satz 8.26 gilt, für $\xi \to 0$:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\le n+1} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + o(\|\xi\|^{n+1})$$

8.28. Bemerkung: Dies ist für $d=1$ eine Variante von Kor. 6.44 (dort nur $O(\xi^{n+1})$, aber auch nur $\sum_{\alpha=0}^{n}$)

Beweis von Kor. 8.27.

$x \in \mathcal{U}$ offen $\Rightarrow \exists \delta>0: x+t\xi \in \mathcal{U} \;\forall t\in[0,1]\; \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \|\xi\|<\delta$

$$\overset{\text{Satz 8.26}}{\Longrightarrow} f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\le n+1} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\underbrace{\left[(\partial^\alpha f)(x+\theta\xi) - (\partial^\alpha f)(x)\right]}_{=:\, r_{x,\alpha}(\xi)}$$

(i) da $\theta = \theta_{x,\xi} \in [0,1]$ und $\partial^\alpha f$ stetig

$$\Rightarrow \lim_{\xi\to 0} r_{x,\alpha}(\xi) = 0 \quad \text{für alle } \alpha,\ |\alpha| = n+1$$

(ii) $$|\xi^\alpha| = \underbrace{|\xi_1|}_{\le\|\xi\|}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{|\xi_d|}_{\le \|\xi\|}^{\alpha_d} \le \|\xi\|^{|\alpha|}$$

(i) $\wedge$ (ii) $\overset{|\alpha|=n+1}{\Longrightarrow}$ $\forall \xi \in B_\delta(0)\setminus\{0\}$:

$$\frac{|r_{x,\alpha}(\xi)|\,|\xi^\alpha|}{\|\xi\|^{n+1}} \le |r_{x,\alpha}(\xi)| \xrightarrow{\xi\to 0} 0$$

Da $\sum\limits_{|\alpha|=n+1}$ nur <u>endliche</u> Summe $\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

8.29. Beispiel: $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2)=x_1\sin(x_2)$
(bel. oft stetig diff.bar)

Entwicklungspkt. $x=(0,0)$ $\Rightarrow$ mit ($\xi = x$, $n=1$ in Kor 8.27)

$$f(x_1,x_2) = \underbrace{f(0,0)}_{0} + \underbrace{\frac{(\partial_1 f)(0,0)}{1!\,0!}}_{0} x_1 + \underbrace{\frac{(\partial_2 f)(0,0)}{0!\,1!}}_{0} x_2$$

$$+ \underbrace{\frac{(\partial_1^2 f)(0,0)}{2!\,0!}}_{0} x_1^2 + \underbrace{\frac{(\partial_1\partial_2 f)(0,0)}{1!\,1!}}_{1} x_1x_2 + \underbrace{\frac{(\partial_2^2 f)(0,0)}{0!\,2!}}_{0} x_2^2 + o(\|x\|^2)$$

$$= x_1x_2 + o(\|x\|^2) \qquad (x\to 0).$$

8.30. Bemerkung

Struktur der Taylor-Polynome für $|\alpha|\le 2$: $P_n(\xi) := \sum\limits_{|\alpha|=n} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!}\xi^\alpha$

- $n=0$: $\alpha=(0,\dots,0)\in\mathbb{N}_0^d$ einziger Multiindex mit $|\alpha|=0$

$$P_0(\xi)=f(x)$$

- $n=1$: d Multiindizes mit $|\alpha|=1$: $\underbrace{(1,0,\dots,0)}_{\mu_1},\dots,\underbrace{(0,\dots,0,1)}_{\mu_d}$

$$\Rightarrow P_1(\xi) = \sum_{j=1}^d \underbrace{\frac{1}{\mu_j!}}_{1} \underbrace{(\partial^{\mu_j} f)(x)}_{(\partial_j f)(x)} \underbrace{\xi^{\mu_j}}_{\xi_j} = \langle (\nabla f)(x), \xi\rangle$$

Somit Kor. 8.27 mit $n=0$: f stetig diff-bar $\Rightarrow$

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle (\nabla f)(x), \xi \rangle + o(\|\xi\|^1)$$

- vgl. Def. f diff. bar in x
- da hier sogar f <u>stetig</u> diff-bar, zusätzliche Info über Fehlerterme, siehe Bew. von Kor. 8.27.

• $n=2$: Multiindizes mit $|\alpha|=2$:

- $\underset{\substack{\uparrow \\ i.\text{ Stelle}}}{(0,\dots,0,1},0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ j.\text{Stelle}}}{1},0,\dots,0) =: \mu_{ij}$ für $1 \le i < j \le d$
- $(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ j.\text{Stelle}}}{2},0,\dots,0) =: \lambda_j$ für $1 \le j \le d$

$\Rightarrow \mu_{ij}! = 1!1! = 1$, $\lambda_j! = 2! = 2$

$\xi^{\mu_{ij}} = \xi_i \xi_j$, $\xi^{\lambda_j} = \xi_j^2$

$\partial^{\mu_{ij}} = \partial_i \partial_j$, $\partial^{\lambda_j} = \partial_j^2$

also: $$P_2(\xi) = \sum_{1 \le i < j \le d} (\partial_i \partial_j f)(x) \xi_i \xi_j + \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{2} (\partial_j^2 f)(x) \xi_j^2$$

Schwarz! $\rightarrow$ $$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \xi_i (\partial_i \partial_j f)(x) \xi_j$$

quadratische Form in $\xi \in \mathbb{R}^d$

8.31. Definition $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$, $f: U \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig diff. bar in x.

$$\left((\partial_j \partial_k f)(x) \right)_{1 \le j,k \le d} =: (D^2 f)(x)$$

$\uparrow$

$d \times d$-Matrix der 2. part. Ableitungen in x (<u>symm.</u> wegen Schwarz!)

<u>Hesse - Matrix</u> <u>von f in x</u>

8.32. Bemerkung: Kor. 8.27. für $n=1$:

f 2-mal stetig diff.bar $\Rightarrow$

$$f(x+\xi) = f(x) + \underbrace{\langle (\nabla f)(x), \xi \rangle}_{(Df)(x)\xi} + \frac{1}{2}\langle \xi, (D^2 f)(x)\xi \rangle + o(\|\xi\|^2) \quad \text{für } \xi \to 0$$