8.2. Differenzierbarkeit

In Verallg. von Kap. 8.1 betrachten wir gleich Abb. nach $\mathbb{R}^\nu$.

8.14. Definition Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in \mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$

f (total) diff. bar in x $:\Longleftrightarrow$
$$\begin{cases} \exists A \equiv A_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\nu \text{ lineare Abb.} \\ \exists \text{ Umgebung } V \equiv V_x \text{ von } 0 \in \mathbb{R}^d \text{ mit } x + V \subseteq \mathcal{U} \\ \exists \varphi \equiv \varphi_x : V \to \mathbb{R}^\nu \text{ mit } \lim_{y \to 0} \frac{\|\varphi(y)\|}{\|y\|} = 0, \\ \text{d.h. } \varphi = o(\|y\|)), \text{ so dass } \forall y \in V \\ \qquad f(x+y) = f(x) + Ay + \varphi(y) \end{cases}$$

Notation: $A =: (Df)(x) =: J_f(x)$ Differential, Jacobi-Matrix

Interpretation: Linearisiere f um x.

8.15. Bemerkungen

(a) Konsistent mit diff. bar für $d = \nu = 1$
$\Rightarrow Ay = ay$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und $a = f'(x)$

(b) Matrixdarstellung von A in kanon. Basen

$$Ay = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}; \quad \text{mit } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\nu \end{pmatrix}, \ \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_\nu \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f_j(x+y) = f_j(x) + \sum_{k=1}^{d} a_{jk} y_k + \varphi_j(y) \qquad \forall j = 1, \dots, \nu$$

Demnach: $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$ diff. bar in x

$$\Longleftrightarrow \qquad f_j : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \text{ diff. bar in } x \quad \forall j = 1, \dots, \nu$$

8.16. Beispiel: $U = \mathbb{R}^d$, $M = (m_{jk})_{jk=1,\dots,d}$ symm. $d\times d$-Matrix mit reellen Einträgen

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle x, Mx\rangle \end{array}$$ quadratische Form

$$\Rightarrow f(x+y) = \langle x, Mx\rangle + \langle y, Mx\rangle + \langle x, My\rangle + \underbrace{\langle y, My\rangle}_{=:\varphi(y)}$$

$$= f(x) + \underbrace{2\langle Mx, y\rangle}_{=:Ay} + \varphi(y)$$

hier: $A \in (\mathbb{R}^d)^*$ Dualraum

- $A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $y \mapsto 2\langle Mx, y\rangle$ linear
- $\varphi(y) = O(\|y\|^2) \Rightarrow \varphi(y) = o(\|y\|)$ $(y \to 0)$

Einheitsvekt. in $\mathbb{R}^d$ in y-Richtung

da $|\varphi(y)| = \|y\|^2 \cdot \underbrace{|\langle e_y, Me_y\rangle|}$

$$\leq \|Me_y\| \leq \underbrace{\sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^d \\ \|\xi\|=1}} \|M\xi\|}$$

Matrixnorm $\to$ $=: \|M\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)} =: \|M\| < \infty$

(Es gilt:
$\|M\|$ = betragsmäßig größter Eigenwert von M (in diesem Fall (M symm.)))

$\Rightarrow$ f diff.bar in x $(\forall x \in \mathbb{R}^d)$

8.17 Satz Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in \mathcal{U}$ und $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$

Dann gilt: f diffbar in $x \Rightarrow f$ stetig in x

Warnung: aus partiell diff.bar folgt i.a. nicht Stetigkeit (vgl. Übung!)

Beweis: n.V. $\exists A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\nu$ linear, so dass $\forall x' \in \mathcal{U}$

$$f(x') = f(x) + A(x'-x) + o(\|x'-x\|) \quad \leftarrow \text{Norm in } \mathbb{R}^d$$

Sei $(x_n)_n \subseteq \mathcal{U}$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ $\quad \left(\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \right)$

$$\Rightarrow \underbrace{\|f(x_n) - f(x)\|}_{\text{Norm in } \mathbb{R}^\nu} \le \|A\| \cdot \|x_n - x\| + \|o(\|x_n - x\|)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \blacksquare$$

Bestimmung von $(Df)(x)$:

8.18. Satz Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\nu \end{pmatrix} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$

Dann gilt:

$$f \text{ diff.bar in } x \Rightarrow \begin{cases} \forall j = 1, \dots, \nu,\ \forall k = 1, \dots, d \text{ ist } f_j \text{ in } x \\ \text{partiell diff.bar in Richtung } k \\ \text{und} \quad (Df)(x)_{jk} = (\partial_k f_j)(x) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \end{cases}$$

Somit: Matrixdarstellung:

$$(Df)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix} =: \frac{\partial(f_1, \dots, f_\nu)}{\partial(x_1, \dots, x_d)}$$

"Funktionalmatrix"

j'ter Zeilenvektor ist $(\nabla f_j)(x)$

Beweis

n.V. gilt (vgl. Bem. 8.15): $\forall j = 1,\dots,\nu$, $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $x+y \in U$,

$$f_j(x+y) = f_j(x) + \sum_{l=1}^{d} a_{jl} y_l + o(\|y\|) \qquad (y \to 0)$$

wähle $y = he_k$, d.h. $y_l = h\delta_{lk}$ $(h \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow f_j(x+he_k) = f_j(x) + a_{jk}h + o(|h|)$$

$$\overset{h\neq 0}{\Rightarrow} a_{jk} = \frac{f_j(x+he_k) - f_j(x)}{h} + \frac{o(|h|)}{h} \Rightarrow \text{Beh. mit } h \to 0 \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{8.19. Satz}}$ Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$, $f: U \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar

Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \partial_k f \text{ stetig in } x \\ \forall k = 1,\dots,d \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ (total) diff.bar in } x, \\ \text{die Fundamentalmatrix ist} \\ \text{stetig in } x\text{, und in } x \text{ gleich } Df(x). \end{array}\right.$$

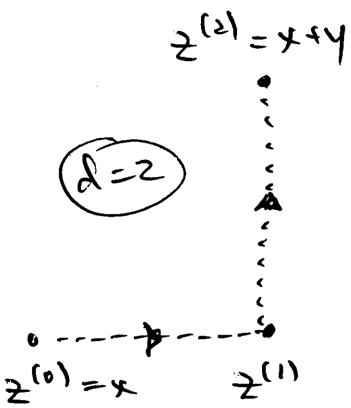
↑ siehe Übung zur Def. für matrixwertige Fkt'en

Dies motiviert

Konvention: stetig diff.bar :⇔ stetig partiell diff.bar

(siehe auch Bem. 8.15 (b) für Fall $f: U \to \mathbb{R}^\nu$)

Beweis: Hier nur „⇒" und nur Diff.barkeit in x.
Rest siehe Üb.



Idee: gehe von x zu $x+y$ parallel zu Koordinatenachsen (⇒ nur 1 Variable ändert sich jeweils!) und schätze Differenz von f mit Mittelwertsatz aus Ana 1 ab.

$\mathcal{U}$ offen $\Rightarrow B_\delta(x) \subseteq \mathcal{U}$ für ein $\delta > 0$

Sei $\underset{(y_1,\dots,y_d)}{\overset{}{y}} \in \mathbb{R}^d$, $\|y\| < \delta \Rightarrow z^{(k)} := x + \sum_{j=1}^{k} y_j e_j \in \mathcal{U}$ $\quad \forall k = 1,\dots,d$

setze $z^{(0)} := x$

– somit $f(x+y) - f(x) = \sum_{k=1}^{d} \underbrace{f(z^{(k)}) - f(z^{(k-1)})}_{\underbrace{g_k(y_k) - g_k(0)}_{\underbrace{g_k'(\xi_k)\, y_k}_{\frac{\partial f}{\partial x_k}(z^{(k-1)} + \xi_k e_k)}}}$

MWS, Ana 1 für $\xi_k \in \mathbb{R}$, $|\xi_k| < |y_k|$

wobei $g_k : \begin{array}{l}]-\delta,\delta[\to \mathbb{R} \\ y \mapsto f(z^{(k-1)} + y e_k) \end{array}$ diff. bar (n.V.)

$$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + \sum_{k=1}^{d} a_k y_k + \varphi(y)$$

mit $a_k := \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$

$$\varphi(y) := \sum_{k=1}^{d} \left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(z^{(k-1)} + \xi_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right] y_k$$

Da
- $\| z^{(k-1)} + \xi_k e_k - x \| \xrightarrow{\|y\| \to 0} 0$
- $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ stetig in x

$$\Rightarrow \lim_{y \to 0} \frac{|\varphi(y)|}{\|y\|} \le \lim_{y \to 0} \sum_{k=1}^{d} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(z^{(k-1)} + \xi_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right| = 0$$

$\Rightarrow$ Beh. ∎

Insbesondere gilt:

$$\left.\begin{array}{r} \text{stetig (partiell)} \\ \text{diff. bar} \end{array}\right\} \overset{8.19}{\Longrightarrow} \text{(total) diff. bar} \overset{8.17}{\Longrightarrow} \text{stetig.}$$

8.20. Satz (Kettenregel)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^d$, $V \subseteq \mathbb{R}^\nu$ offen, $f: U \to V$, $g: V \to \mathbb{R}^n$.
Sei $x \in U$, f diff.bar in x, g diff.bar in $f(x)$.
Dann ist $g \circ f : U \to \mathbb{R}^n$ diff.bar in x und

$$\underbrace{(D(g\circ f))(x)}_{n\times d\text{-Matrix}} = \underbrace{(Dg)(f(x))}_{\substack{n\times\nu\\ \text{Matrix}}} \cdot \underbrace{(Df)(x)}_{\nu\times d}$$

$\cdot$ Matrizenmultiplikation = Komposition linearer Abb.

Beweis: Sei $y := f(x) \in \mathbb{R}^\nu$

n.V. gilt:
- $f(x+x') = f(x) + \underbrace{A}_{(Df)(x)}x' + \underbrace{\varphi(x')}_{o(\|x'\|)}$
- $g(y+y') = g(y) + \underbrace{B}_{(Dg)(y)}y' + \underbrace{\psi(y')}_{o(\|y'\|)}$

$\forall$ hinr. kleinen $x' \in \mathbb{R}^d$, $y' \in \mathbb{R}^\nu$.

Wähle $y' := f(x+x') - f(x) = Ax' + \varphi(x') \quad (\xrightarrow{x'\to 0} 0)$

$$\Rightarrow (g\circ f)(x+x') = g(\underbrace{f(x+x')}_{f(x)+y'}) = (g\circ f)(x) + By' + \psi(y')$$
$$= (g\circ f)(x) + BAx' + \chi(x')$$

mit $\chi(x') := B\varphi(x') + \psi(Ax' + \varphi(x'))$

Zeige: $\chi(x') = o(\|x'\|) \quad (x' \to 0)$

- $$\frac{B\varphi(x')}{\|x'\|} = B \underbrace{\frac{\varphi(x')}{\|x'\|}}_{\xrightarrow{x'\to 0} 0} \xrightarrow{x'\to 0} 0$$

B linear

B stetig

- Setze $\tilde{\psi}(y) := \begin{cases} \psi(y)/\|y\| & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$

somit gilt $\lim\limits_{y \to 0} \tilde{\psi}(y) = 0$. (*)

$$\Rightarrow \|\psi(Ax' + \varphi(x'))\| = \underbrace{\|Ax' + \varphi(x')\|}_{\leq \|x'\| \left(\|A\| + \frac{\|\varphi(x')\|}{\|x'\|} \right)} \|\tilde{\psi}(Ax' + \varphi(x'))\|$$

$$\Rightarrow \lim_{x' \to 0} \frac{\|\psi(Ax' + \varphi(x'))\|}{\|x'\|} \leq \underbrace{\lim_{x' \to 0} \left(\|A\| + \frac{\|\varphi(x')\|}{\|x'\|} \right)}_{\|A\|} \cdot \underbrace{\lim_{x' \to 0} \|\tilde{\psi}(\underbrace{Ax' + \varphi(x')}_{\xrightarrow{x' \to 0} 0})\|}_{0 \ (*)}$$

∎

Wichtiges Anwendungsbsp.

8.21 Korollar Sei $d = n = 1$ in Satz 8.20, also

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f_1(x), \dots, f_\nu(x)). \end{array}$$

Dann gilt
$$(g \circ f)'(x) = \sum_{j=1}^{\nu} (\partial_j g)(f_1(x), \dots, f_\nu(x))\, f_j'(x).$$

Beweis. Aus Satz 8.20 und 8.18:

$$(Df)(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_\nu'(x) \end{pmatrix}, \quad (Dg)(y) = ((\partial_1 g)(y), \dots, (\partial_\nu g)(y))$$ ∎

Als Vorbereitung für mehrdim. HDI:

8.22. Lemma Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, betrachte

$$I \to m\times n\text{-Matrizen } (\cong \mathbb{R}^{mn})$$

$$t \mapsto A(t) = (a_{jk}(t))_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le k\le n}} \quad \text{mit } t\mapsto a_{jk}(t) \text{ stetig } \forall j,k$$

Mit $\int_I A(t)dt := \left(\int_I a_{jk}(t)dt\right)_{j,k}$ gilt:

$$\left\|\int_I A(t)dt\right\| \le \int_I \|A(t)\|\,dt \quad (\text{Dreiecks-Ungl.})$$

Beweis:

(i) $$\left\|\int_I A(t)dt\right\| = \sup_{0\ne u\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\overbrace{\left(\int_I A(t)dt\right)u}^{=:v\in\mathbb{R}^m}\|}{\|u\|} \quad (\text{Def. Matrixnorm})$$

(ii) $$0 \le \|v\|^2 = \Big\langle \underbrace{\left(\int_I A(t)dt\right)u}_{\int_I A(t)u\,dt}, v\Big\rangle = \int_I \langle A(t)u, v\rangle\, dt$$

$$\overset{\text{gew. Dreiecks-Ungl.}}{\underset{\text{für Integrale}}{\le}} \int_I \underbrace{|\langle A(t)u,v\rangle|}_{\le \underbrace{\|A(t)u\|}_{\le \|A(t)\|\cdot\|u\|}\cdot\|v\|}\,dt$$

Cauchy-Schwarz $\to$

$$\Rightarrow \|v\| \le \|u\| \int_I \|A(t)\|\,dt \Rightarrow \text{Beh. mit (i)} \quad \blacksquare$$

8.23. Satz (Mehr-dim. HDI)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^\nu$ stetig diff.bar

Sei $y \in \mathbb{R}^d$, so dass $\{x + ty : t \in [0,1]\} \subset U$

↖ Geradenstrecke

Dann gilt

$$f(x+y) - f(x) = \left(\int_0^1 (Df)(x+ty)\, dt \right) y$$

Insbesondere ist

$$\| f(x+y) - f(x) \| \leq \|y\| \sup_{t \in [0,1]} \| (Df)(x+ty) \| .$$

Beweis: 1. Teil: Sei $j \in \{1, \ldots, \nu\}$, $g_j : \overset{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}{t \longmapsto f_j(x+ty)}$

$$\Rightarrow f_j(x+y) - f_j(x) = g_j(1) - g_j(0) \overset{\text{HDI}}{=} \int_0^1 \underbrace{g_j'(t)}_{\sum_{k=1}^d (\partial_k f_j)(x+ty) y_k} dt$$

g_j stetig diff.bar nach Kor. 8.21

$$= \sum_{k=1}^d \int_I \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x+ty)}_{((Df)(x+ty))_{jk}} dt \; y_k \qquad (I = [0,1])$$

2. Teil: Aus 1. Teil, $\|My\| \leq \|M\| \cdot \|y\|$

und Lemma 8.22. ☒