8. Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

Im folgenden stets $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, offen

versehen mit $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$

Für $j \in \{1,\dots,d\}$ sei $e_j := (\dots,0,1,0,\dots) \in \mathbb{R}^d$

j'te Stelle

Einheitsvektor in j'te Koord. richtung

$f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $x = (x_1,\dots,x_d) \mapsto f(x) = f((x_1,\dots,x_d)) =: f(x_1,\dots,x_d)$

8.1. Partielle Ableitungen

8.1. Definition Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

- Sei $x \in \mathcal{U}$ und $j \in \{1,\dots,d\}$

  f partiell diff. bar in x in Richtung j $:\Leftrightarrow$ Es existiert $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \dfrac{f(x+he_j) - f(x)}{h} =: (\partial_j f)(x)$

  alternative Schreibweise: $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} f\right)(x)$, $(D_j f)(x)$

- Richtungsableitung von f in Richtung $0 \neq v \in \mathbb{R}^d$ (in x): $(\partial_v f)(x) := \dfrac{d}{dh} f(x+hv)\Big|_{h=0}$ (falls existiert!)

- f partiell diff. bar $:\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathcal{U}$, $\forall j \in \{1,\dots,d\}$ $(\partial_j f)(x)$ existiert

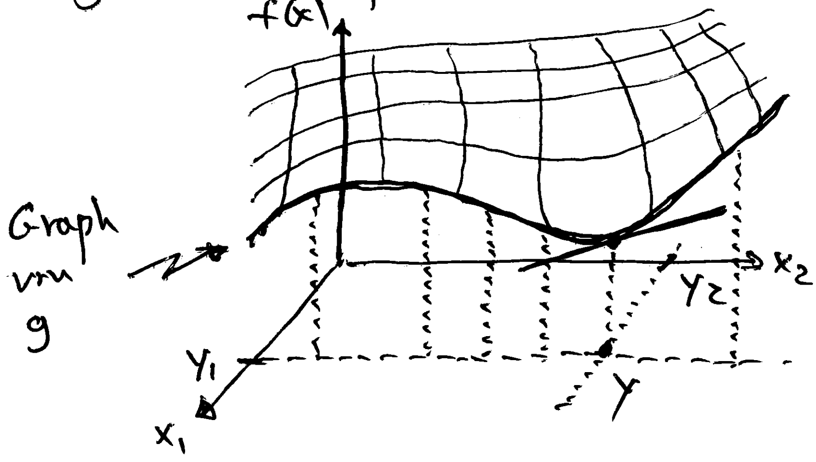
  In dem Fall: $\partial_j f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\partial_j f)(x)$ j'te part. Ableitung

- f stetig partiell diff. bar $:\Leftrightarrow$ f partiell diff. bar und $\partial_j f$ stetig $\forall j = 1,\dots,d$

  $(f \in C^1(\mathcal{U}))$

8.2. Bemerkung: (a) Für $v = e_j$: $(\partial_v f)(x) = (\partial_j f)(x)$

(b) geom. Interpretation ($d=2$)



Graph von f
$= \{(x, f(x)) : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^3$
„Gebirge über $\mathbb{R}^2$"
hier: angeschnitten von Ebene $\{(x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = y_1\}$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\xi \mapsto f(y_1, \xi) := f((y_1, \xi))$$ - somit

$$(\partial_2 f)(y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(y_1, y_2 + h) - f(y_1, y_2)}{h} = g'(y_2)$$

Gilt analog für $d \geq 2$! Somit

- „part. Ableitungen in j-Richtung = gewöhnliche Ableitung bei Festhalten aller anderen Variablen $\neq j$"
- $\Rightarrow$ | selbe Rechenregeln für part. Ableitung wie für gew. Ableitung ! (z.B. 5.10, 5.12) |

8.3. Beispiele

(a) $U = \mathbb{R}^2$, $f : x \mapsto f(x) := x_1 \sin(x_1 + x_2^2)$

$\Rightarrow f$ stetig partiell diff-bar mit

$$(\partial_1 f)(x) = \sin(x_1 + x_2^2) + x_1 \cos(x_1 + x_2^2)$$

$$(\partial_2 f)(x) = 2 x_1 x_2 \cos(x_1 + x_2^2)$$

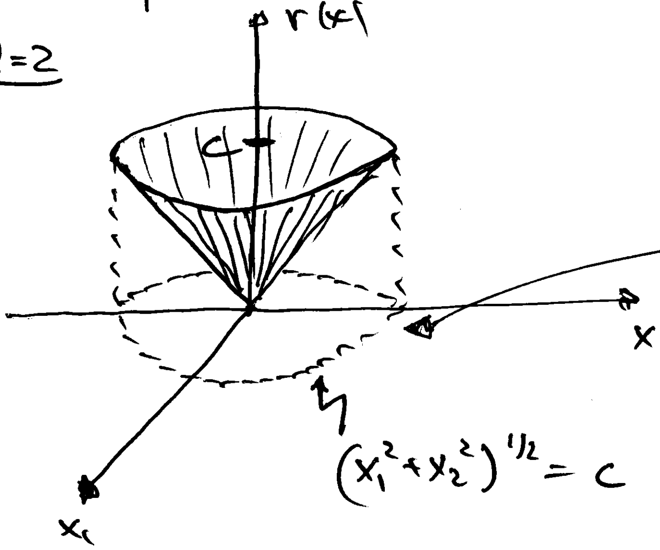
(b) $r: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$x \longmapsto \|x\| = \Big(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\Big)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\partial_k r)(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\Big(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\Big)^{1/2}}\cdot 2x_k = \frac{x_k}{r(x)}} \quad \forall k \in \{1,\dots,d\} \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^d$$

nicht partiell diff.-bar in 0: $\displaystyle\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{r(he_k)-r(0)}{h}}_{\frac{|h|-0}{h} \,=\, \mathrm{sgn}(h)}$ exist. nicht!

$d=2$



Höhen (Niveau-) linien

$$N_c(f) := \{x \in U : f(x) = c\}$$

- sind für $f = r$ Kreise!

Nun: Sei $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ (stetig) diff.-bar und setze

$$f\circ r: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (f\circ r)(x) = f(\|x\|) \end{array}$$

radialsymm. Fkt

$\Rightarrow$ $f\circ r$ (stetig) partiell diff.-bar mit

$$(\partial_j(f\circ r))(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(\|x\|) = f'(\|x\|)\cdot\frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = f'(\|x\|)\cdot\frac{x_j}{\|x\|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d\setminus\{0\}$$

(c) $U = \mathbb{R}^d$, $x_j: \begin{array}{l}\mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x_j\end{array}$ (Koordinatenabbildung)

$$\Rightarrow \partial_k x_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

8.4. Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ (Skalarfeld), $A: U \to \mathbb{R}^d$ (Vektorfeld) d.h. für $j = 1, \dots, d$ $\exists A_j : U \to \mathbb{R}$.
Seien f, A partiell diff.bar. (d.h. A_j part. diff.bar $\forall j = 1, \dots, d$).

- Gradient: $\quad \operatorname{grad} f := \nabla f : \begin{array}{l} U \to \mathbb{R}^d \\ x \mapsto (\partial_1 f(x), \dots, (\partial_d f)(x)) \end{array}$

symbolischer Vektor: $\nabla := (\partial_1, \dots, \partial_d)$ Nabla-Operator

also: grad macht aus Skalarfeld ein Vektorfeld. ($\nabla \alpha \beta \lambda \alpha$ = Harfe)

- Divergenz: $\quad \operatorname{div} A := \sum_{j=1}^{d} \partial_j A_j =: \langle \nabla, A \rangle$

also: div macht aus Vektorfeld ein Skalarfeld.

- speziell für $d = 3$: Rotation

$$\operatorname{rot} A := \nabla \times A : \begin{array}{l} U \to \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto \big((\partial_2 A_3)(x) - (\partial_3 A_2)(x), -(\partial_1 A_3)(x) + (\partial_3 A_1)(x), (\partial_1 A_2)(x) - (\partial_2 A_1)(x)\big) \end{array}$$

also: rot macht aus Vektorfeld über $\mathbb{R}^3$ wieder ein solches.

Notation in Anlehnung an Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$:
(benutze Spaltennotation!)

$$\times : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Merkregel:
$$(x \times y)_1 = \begin{pmatrix} \cancel{x_1} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{y_1} \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$
streichen
— "+"
---- "−"

$$(x \times y)_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cancel{x_2} \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \cancel{y_2} \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad (x \times y)_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cancel{x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cancel{y_3} \end{pmatrix}$$

Damit auch: $\quad x \times y = \det \begin{pmatrix} e_1 & x_1 & y_1 \\ e_2 & x_2 & y_2 \\ e_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$

8.5. Lemma (Rechenregeln)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f, g: U \to \mathbb{R}$ part. diff. bare Skalarfelder
$A: U \to \mathbb{R}^d$ " " Vektorfeld.

Dann gilt: (a) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$

(b) $\langle \nabla, Af \rangle = (\langle \nabla, A \rangle) f + \langle A, \nabla f \rangle$

Beweis: Übung!

8.6. Beispiele

(a) $U = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $f = \|\cdot\| = r$

$$\underset{\text{Bsp. 8.3(b)}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{(\nabla r)(x) = \frac{x}{r(x)} = \frac{x}{\|x\|}}$$

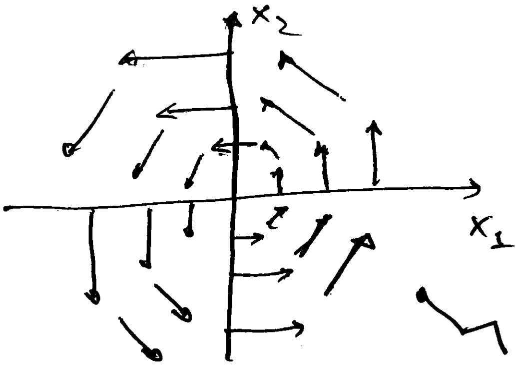
(b) $U = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $A(x) := \frac{x}{\|x\|}$

$$\Rightarrow \langle \nabla, A \rangle(x) = \sum_{j=1}^{d} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_j}{r(x)}}_{\frac{1}{r(x)} + x_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(r(x))^{-1}}_{-(r(x))^{-2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} r(x)}_{\frac{x_j}{r(x)}}}}$$

$$= \frac{d}{r(x)} - r(x)^{-3} \underbrace{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}_{(r(x))^2}$$

$$= \underbrace{\frac{d-1}{\|x\|}} \qquad \left(= \operatorname{div} \frac{x}{\|x\|}\right)$$

(c) $d=3$, $U=\mathbb{R}^3$, $A: x \longmapsto (-x_2, x_1, 0)$



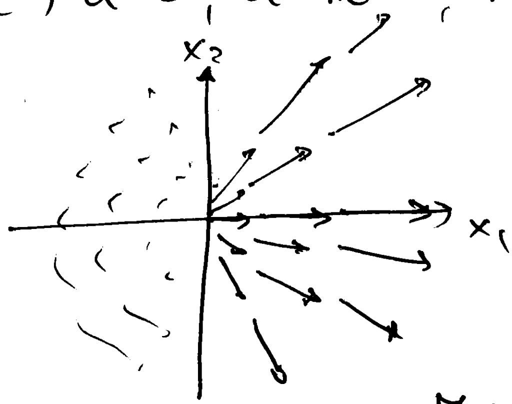
Schnittbild der $x_3=0$ - Ebene

$\Rightarrow$ • $\langle \nabla, A\rangle(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}(-x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 + 0 = 0$

• $(\nabla \times A)(x) = (0,0,2) \quad \forall x$

(d) $d=3$, $U=\mathbb{R}^3$, $A: x \longmapsto x \Rightarrow$ • $\nabla \times A = 0$

• $\langle \nabla, A\rangle = d$



Schnittbild der $x_3=0$ - Ebene

Moral: Rotation $\hat{=}$ Wirbeln

Divergenz $\hat{=}$ Auseinander- / Zusammenlaufen

8.7. Definition (Höhere partielle Ableitungen)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$

• $\left.\begin{array}{l} f \text{ 2 mal partiell} \\ \text{diff-bar} \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ partiell diff-bar} \\ \text{und } \partial_j f \text{ partiell diff-bar} \\ \forall j \in \{1,\dots,d\} \end{array}\right.$

Notation: $\partial_k \partial_j f := \partial_k(\partial_j f)$, $j,k \in \{1,\dots,d\}$.

- Induktive Def. für all. $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$:

$$f \left.\begin{array}{c}\underline{n\text{-mal partiell}}\\ \underline{\text{diff.-bar}}\end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f\ (n-1)\text{-mal partiell diff.-bar und} \\ \partial_{j_{n-1}}\partial_{j_{n-2}}\cdots\partial_{j_1} f \text{ partiell diff.-bar} \\ \qquad \forall j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \in \{1,\dots,d\}\end{array}\right.$$

- $$f \left.\begin{array}{c}\underline{n\text{-mal stetig}}\\ \underline{\text{partiell diff.-bar}}\\ (f\in C^n(\mathcal{U}))\end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \begin{array}{l} f \text{ } n\text{-mal partiell diff.-bar und} \\ \partial_{j_\nu}\cdots\partial_{j_1} f \text{ stetig } \forall j_\nu,\dots,j_1 \in\{1,\dots,d\} \\ \qquad \forall \nu \in \{0,\dots,n\}\end{array}$$

- Analog für $A = (A_1, \dots, A_\nu) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$,
  falls gültig $\forall A_\ell$, $\ell = 1, \dots, \nu$

Notationen: $\underbrace{\partial_j \cdot \ldots \cdot \partial_j}_{n\text{-mal}} f =: \partial_j^n f =: \dfrac{\partial^n f}{\partial x_j^n}$

$$\partial_{j_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{j_n} f =: \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_{j_n}}$$

$\boxed{\text{8.8. Satz}}$ (H. A. Schwarz)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $j, k \in \{1,\dots,d\}$ und $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sei 1-mal partiell diff.-bar; zudem existiere $\partial_k\partial_j f$ auf $\mathcal{U}$ und sei stetig.
Dann existiert auch $\partial_j\partial_k f$ auf $\mathcal{U}$ und es gilt

$$\partial_j\partial_k f = \partial_k\partial_j f \qquad (\Rightarrow \partial_j\partial_k f \text{ insbes. stetig})$$

Beweis: o.E. • $d = 2$, $j = 1$, $k = 2$ (andere Variablen spielen keine Rolle)

- $0 \in \mathcal{U}$ und wir zeigen

$$(\partial_1\partial_2 f)(0) = (\partial_2\partial_1 f)(0)$$

(für bel. $x \in \mathcal{U}$ betrachte $\tilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U} - x$
$:= \{y - x : y \in \mathcal{U}\}$ mit $\tilde{f} := f(\cdot + x)$)

$\mathcal{U}$ offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \delta, |x_2| < \delta\} \subseteq \mathcal{U}$

(i) $\forall |x_2| < \delta$ ist $F_{x_2} : \begin{array}{l}]-\delta, \delta[\to \mathbb{R} \\ x_1 \mapsto f(x_1, x_2) - f(x_1, 0) \end{array}$ diff.bar.

Mittelwertsatz $\Rightarrow$ Kor. 5.19 $\quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, |x_1| < \delta, \exists \xi_1 \in \mathbb{R}$ mit $|\xi_1| < |x_1|$:

$$F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0) = \underbrace{F_{x_2}'(\xi_1)}_{(\partial_1 f)(\xi_1, x_2) - (\partial_1 f)(\xi_1, 0)} x_1$$

hängt von x_1 und x_2 ab !

Ebenso:

$$G_{\xi_1} : \begin{array}{l}]-\delta, \delta[\to \mathbb{R} \\ x_2 \mapsto (\partial_1 f)(\xi_1, x_2) \end{array} \quad \text{diff. bar}$$

MWS $\Rightarrow \exists \xi_2 \in \mathbb{R}$ mit $|\xi_2| < |x_2|$, so dass

$$F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0) = x_1 x_2 G_{\xi_1}'(\xi_2) = x_1 x_2 (\partial_2 \partial_1 f)(\xi_1, \xi_2)$$

(ii) Sei nun $\varepsilon > 0$ bel.; da $\partial_2 \partial_1 f$ stetig in $(0,0) \Rightarrow$

$\exists \delta_\varepsilon \in]0, \delta] \; \forall |y_1|, |y_2| < \delta_\varepsilon : |(\partial_2 \partial_1 f)(y_1, y_2) - (\partial_2 \partial_1 f)(0,0)| < \varepsilon$

Somit, aus (i), $\forall x_1, x_2 \in]-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon[\setminus \{0\}$:

$$\Bigg| \underbrace{\frac{F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0)}{x_1 x_2}}_{\frac{1}{x_1}\left(\frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, 0)}{x_2} - \frac{f(0, x_2) - f(0,0)}{x_2} \right)} - \partial_2 \partial_1 f(0,0) \Bigg| < \varepsilon$$

$\overset{x_2 \to 0}{\Rightarrow}$ ($\partial_2 f$ existiert!)

$$\left| \frac{(\partial_2 f)(x_1, 0) - (\partial_2 f)(0,0)}{x_1} - (\partial_2 \partial_1 f)(0,0) \right| \leq \varepsilon$$

Somit: $\partial_2 f$ partiell diff.bar nach x_1 in $(0,0)$
und $(\partial_1\partial_2 f)(0,0) = (\partial_2\partial_1 f)(0,0)$ ∎

8.9. Bemerkung

Die Voraussetzung „$\partial_k\partial_j f$ ist stetig"
ist wesentlich in Satz 8.8 (siehe Bsp. in Übung!)

8.10. Korollar Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ n-mal stetig partiell diff.bar und $\pi \in S_n$ eine Permutation von $\{1,\dots,n\}$
(symmetrische Gruppe)

Dann gilt:

$$\partial_{j_n} \cdots \partial_{j_2}\partial_{j_1} f = \partial_{j_{\pi(n)}} \cdots \partial_{j_{\pi(2)}}\partial_{j_{\pi(1)}} f$$

8.11 Korollar Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen

(a) $A: U \to \mathbb{R}^3$ 2 mal stetig partiell diff.bar

$\Rightarrow$ $\operatorname{div} \operatorname{rot} A = 0$, d.h. $\langle \nabla, \nabla \times A\rangle = 0$

(b) $f: U \to \mathbb{R}$ 2 mal stetig partiell diff.bar

$\Rightarrow$ $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$, d.h. $\nabla \times (\nabla f) = 0$

Beweis: Übung!

8.12. Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ 2 mal partiell diff.bar.

- $$\Delta f := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2 f = \langle \nabla, \nabla f \rangle$$

  $$\Delta := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \langle \nabla, \nabla \rangle$$ Laplace-Operator

- f harmonisch (auf U) $:\Leftrightarrow \Delta f = 0$

8.13. Beispiel

(a) radialsymm. Fkt. $f \circ r: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $r(x) := \|x\|$
$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$

falls f 2 mal diff.bar auf $\mathbb{R}_>$

$\Rightarrow$ $f \circ r$ 2 mal partiell. diff.bar auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und

$$\Delta f(r) = \langle \nabla, \underbrace{\nabla(f \circ r)}_{f'(r)\frac{x}{r}} \rangle \overset{\text{Lem. 8.5(b)}}{=} \frac{f'(r)}{r} \underbrace{\langle \nabla, x \rangle}_{d} + \langle x, \underbrace{\nabla \frac{f'(r)}{r}}_{\left(\frac{d}{dr}\frac{f'(r)}{r}\right)\frac{x}{r}} \rangle$$

Bsp. 8.3(b)

x steht hier für $id: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$$= \frac{f'(r)}{r} d + \frac{r^2}{r} \frac{f''(r)r - f'(r)}{r^2}$$

$$= f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r)$$

(b) $\frac{1}{r^{d-2}}$ ist harmonisch auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ $\forall d \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$

(verwende (a)!)