

7. Metrische Räume

- bislang: $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ bewertete Körper
hier: nur Abstandsbegriff (keine Körpereigenschaften)
- ausreichend für Gültigkeit manche fundamentaler Sätze über stetige Funktionen aus Kap. 3.4
- Vektorräume $\mathbb{R}^v, \mathbb{C}^v, v \in \mathbb{N}$, als Spezialfälle

7.1. Metriken und Normen

7.1. Definition Sei X Menge und $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\underbrace{d \text{ Metrik auf } X} : \Leftrightarrow \begin{cases} (M1) \forall x, y \in X: d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ (M2) \text{ Symmetrie } \forall x, y \in X: \\ \quad d(x, y) = d(y, x) \\ (M3) \text{ Dreiecks-Ungleichung: } \\ \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \\ \quad \forall x, y, z \in X \end{cases}$$

(X, d) heißt metrischer Raum

[weist auch nur X , falls klar welches d]

7.2 Bemerkung: Aus den Axiomen der Metrik folgt
 $\forall x, y \in X$

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{(M1)}{d(x, x)} \leq \overset{(M3)}{d(x, y) + d(y, x)} = \overset{(M2)}{2 d(x, y)} \\ \text{also } d: X \times X &\rightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}_{\geq 0}}} \end{aligned}$$

(dies wird manchmal auch vorausgesetzt,
wäre aber nicht nötig).

7.3. Beispiele

(a) $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $d(x, y) := |x - y|$ ↖ Betrag (183)

Euklidischer Abstand

(b) Für bel. Menge X ist $d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

sog. diskrete Metrik

[(M1), (M2) klar; zu (M3): klar für $x = y$; falls $x \neq y$
 $\Rightarrow d(x, y) = 1$ und $d(x, z) + d(z, y) \geq 1$
da $x = z \wedge y = z$ nicht möglich!]

(c) Falls (X, d) metrischer Raum und $A \subseteq X$

$\Rightarrow (A, d|_{A \times A})$ metrischer Raum

↗ Einschränkung von d auf A = induzierte Metrik

Wichtiger Spezialfall:

7.4. Definition Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, V ein Vektorraum über K und $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$

$\|\cdot\|$ Norm auf V : $\Leftrightarrow \begin{cases} (N1) \forall x \in V: \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ (N2) \forall x \in V \forall \lambda \in K: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \\ (N3) \forall x, y \in V: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{cases}$

Betrag in K

$(V, \|\cdot\|)$ normierter (Vektor-) Raum

[meist auch nur V , falls klar welches $\|\cdot\|$]

7.5. Lemma Sei $(V, \|\cdot\|)$ norm. Raum. Dann

def. $d(x, y) := \|x - y\| \quad \forall x, y \in V$ eine Metrik auf V

Beweis: (M1) aus (N1) & Def., (M2) aus (N2) & Def.

$$(M3): d(x, y) = \underbrace{\|x - y\|}_{x - z + z - y} \stackrel{(N3)}{\leq} \underbrace{\|x - z\|}_{d(x, z)} + \underbrace{\|z - y\|}_{d(z, y)} \quad \square$$

7.6. Bemerkung (a) Der Absolutbetrag $|\cdot|$ auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist eine Norm.

(b) Jede symmetrische, pos. definite Sesquilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf Vektorraum V induziert Norm gemäß

$$V \ni x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

7.7. Satz Sei $V = \mathbb{K}^V, v \in \mathbb{N}$, und $p \in [1, \infty]$

(a) Dann def.

$$\mathbb{K}^V \ni x \mapsto \|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^v |x_j|^p \right)^{1/p}, & p < \infty \\ \max\{|x_1|, \dots, |x_v|\}, & p = \infty \end{cases}$$

" $(x_1, \dots, x_v)$

eine Norm auf $\mathbb{K}^V$, die p-Norm.

(b) Sei $\mathbb{K}^V \times \mathbb{K}^V \ni (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^v \bar{x}_j y_j =: \langle x, y \rangle =: x \cdot y$

Euklidisches (Standard-)Skalarprodukt und $p, q \in [1, \infty]$

mit $\underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = 1 \quad (\text{Konvention: } \frac{1}{\infty} := 0).$

(Hölder-) konjugierter Exponenten

Dann gilt:

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n: |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad (\text{H\"older - Ungleich.})$$

Spezialfall $p=q=2$: Cauchy-Schwarz-Ungl.

Der Beweis beruht auf

7.8 Satz Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

2 mal stetig diff. bar. Dann gilt:

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow f \text{ konvex auf } I$$

Erinnerung: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex: $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad (*)$$

(vgl. Tutorienblatt 13, Ana 1!)

Beweis " $\Rightarrow$ " Sei $x := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, o. F. $x_1 < x_2$

(Fall $x_1 = x_2$ klar; $x_1 > x_2$ analog) also $x_1 < x < x_2$

Mittelwertsatz: $\exists \xi_1 \in]x_1, x[$; $\exists \xi_2 \in]x, x_2[$, so dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{\underbrace{x - x_1}_{(1-\lambda)(x_2 - x_1)}} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{\underbrace{x_2 - x}_{\lambda(x_2 - x_1)}}$$

$f'' \geq 0 \Rightarrow f' \text{ isoton}$

$$\Rightarrow \lambda [f(x) - f(x_1)] \leq (1-\lambda) [f(x_2) - f(x)] \Rightarrow (*)$$

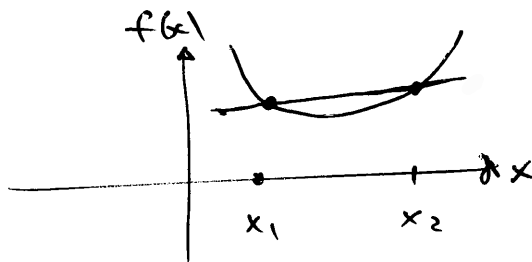
" $\Leftarrow$ " $\circledast$ siehe z. B. Forster, Analysis I, §16, Satz 6

$\circledast$ Wir benötigen im folgenden diese Richtung nicht, deshalb ist nur " $\Rightarrow$ " wiedergegeben

7.9. Bemerkung

(a) f konkav : $\Leftrightarrow -f$ konvex

(b) geom. Interpretation von konvex: Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ liegt zwischen x_1 und x_2 über dem Graphen von f



$\exp$ konvex auf $\mathbb{R}$.

7.10. Korollar (Youngsche Ungleichung)

Seien $a, b \in [0, \infty[$, seien $p, q \in [1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Dann gilt $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Beweis: Klar, falls $a=0$ v $b=0$. Seien nun $a, b \neq 0$

$$ab = e^{\frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)} \underset{\substack{\uparrow \\ \exp \text{ konvex}}}{\leq} \frac{1}{p} e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q} e^{\ln(b^q)} \quad \square$$

Beweis von Satz 7.7. (b) $|\langle x, y \rangle| \overset{\substack{\Delta's - \text{Ungl} \\ \downarrow}}{\leq} \sum_{j=1}^n |x_j y_j|$

1. Fall: $p = \infty$ ($\Rightarrow q = 1$) $\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq (\max_{k=1, \dots, n} |x_k|) \sum_{j=1}^n |y_j|$ ✓
 [analog: $q = \infty$ ($\Rightarrow p = 1$)]

2. Fall: $p, q < \infty$ o. E. sei $x \neq 0$ und $y \neq 0$ (sonst klar)

für $j=1, \dots, n$, setze $\tilde{x}_j := \frac{|x_j|}{\|x\|_p}$, $\tilde{y}_j := \frac{|y_j|}{\|y\|_q}$.

$$\Rightarrow \frac{|x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} = z_j y_j \stackrel{\text{Young-Ungl.}}{\leq} \frac{z_j^p}{p} + \frac{y_j^q}{q}$$

$$\sum_j \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^n |x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \text{Beh. } \checkmark$$

(a) (N1), (N2) klar

zu zeigen (N3): $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ (Minkowski-Ungleichung)

1. Fall: $p = \infty$: $\|x+y\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} |x_j + y_j| \leq \max_j |x_j| + \max_j |y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

2. Fall: $p = 1$: $\|x+y\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| + \sum_{j=1}^n |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

3. Fall: $p \in [1, \infty[$: Sei $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ und

$z_j = |x_j + y_j|^{p-1}$ für $j = 1, \dots, n$, o. E. $x+y \neq 0$ (sonst klar)

da $q(p-1) = qp(1-\frac{1}{p}) = p \Rightarrow z_j^q = |x_j + y_j|^p$

$\Rightarrow \|z\|_q = \|x+y\|_p^{p/q}$

Somit

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| z_j \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|x\|_p \|z\|_q + \|y\|_p \|z\|_q$$

$$\leq |x_j| z_j + |y_j| z_j$$

mit $p - \frac{p}{q} = p(1 - \frac{1}{q}) = 1 \Rightarrow \text{Beh}$

$\uparrow$
 $\|z\|_q \neq 0$

7.11. Lemma | Sei M Menge und

$$B(M) := \{ f: M \rightarrow \mathbb{K} \text{ mit } \underbrace{f \text{ beschränkt}} \}$$

$$\Leftrightarrow \|f\|_{\infty} := \sup_{x \in M} |f(x)| < \infty$$

Dann ist $(B(M), \|\cdot\|_{\infty})$ norm. Raum.

Beweis = Übung!

7.2. Offene und abgeschlossene Mengen

7.12 Definition Sei (X, d) metrischer Raum.

(a) Sei $a \in X, r > 0$

$$B_r(a) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

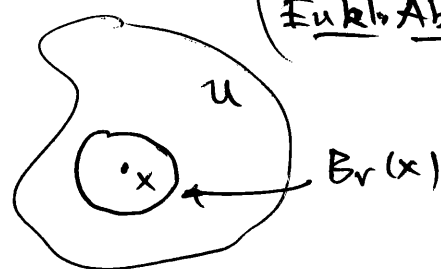
offene Kugel (Ball)
um a mit Radius r

(b) Sei $x \in X$ und $U \subseteq X$

U Umgebung
von x

$$\Leftrightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U$$

Bild:
 $\mathbb{R}^2$ mit
Eukl. Abst.



(c) Sei $A \subseteq X$

$$\begin{array}{l} \text{A offen} \\ \text{(offene Menge)} \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A \exists \text{ Umgebung } U \\ \text{von } x \text{ mit } U \subseteq A \end{array} \right.$$

("A ist Umgebung aller Punkte von A")

7.13. Bemerkungen

(a) $X = \mathbb{R}$ (mit $|\cdot|$ als Norm), seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$\Rightarrow]a, b[$ ist offen, $]a, b]$ ist nicht offen

für $x \in]a, b[$ sei $\varepsilon_x := \min\{x-a, b-x\}$

$$\Rightarrow B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq]a, b[$$

$$\forall r > 0 : B_r(b) \not\subseteq]a, b]$$

(b) $\forall x \in X \forall r > 0 : B_r(x)$ ist Umgebung von x .

(c) A offen $\Leftrightarrow \forall x \in A \exists r_x > 0 : B_{r_x}(x) \subseteq A$

Beweis: " $\Rightarrow$ " aus Def. 7.12(b)
 " $\Leftarrow$ " aus Bem. 7.13(b)



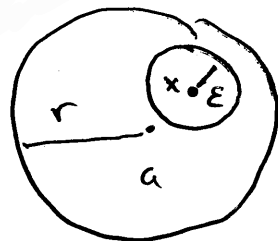
(d) Jede offene Kugel in (X, d) ist offen
 (offene Menge)

Bew: Sei $x \in B_r(a)$

$\Rightarrow \varepsilon := r - d(x, a) > 0$, und $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(a)$,

denn: $\forall y \in B_\varepsilon(x)$ gilt: $d(y, a) \leq \underbrace{d(y, x)}_{< \varepsilon} + d(x, a)$

$$< \varepsilon + d(x, a) = r. \quad \blacksquare$$



7.14 Satz (Hausdorffsches Trennungsaxiom)

Sei (X, d) metr. Raum. $\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$.

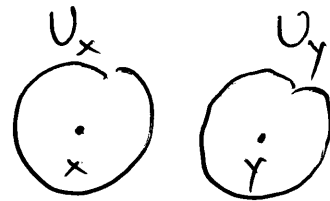
$\exists$ Umgebungen U_x von x , U_y von y , so dass $U_x \cap U_y = \emptyset$

Beweis: $x \neq y \Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{3} d(x, y) > 0$

Wir zeigen $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$

($\Rightarrow$ Beh.) Also: Sei $z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$

$$\Rightarrow 3\varepsilon = d(x, y) \leq \underbrace{d(x, z)}_{< \varepsilon} + \underbrace{d(z, y)}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon \quad \text{⚡} \quad \blacksquare$$



7.15. Satz (Eigenschaften offener Mengen in metr. Raum X)

(a) $\emptyset$ und X sind offen.

(b) $A_1, \dots, A_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, offen $\Rightarrow \bigcap_{j=1}^n A_j$ offen.

(c) Sei $J \neq \emptyset$ Menge und $\forall j \in J$ sei $A_j \subseteq X$ offen

$$\Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \text{ offen.}$$

also: endliche Schnitte u. bel. Vereinigungen off. Mengen (19)
sind offen!

Beweis: (a) $\mathbb{R}$ offen, da $\forall x \in \mathbb{R} : \mathbb{R}$ ist Umgebung von x
 $\emptyset$ offen, da nichts nachzuprüfen.

(b) Es genügt zu zeigen: $A_1 \cap A_2$ offen.

Sei $x \in A_1 \cap A_2$; $A_{1/2}$ offen $\Rightarrow \exists r_{1/2} : B_{r_{1/2}} \subseteq A_{1/2}$
(1 und 2)

Sei $r := \min(r_1, r_2) > 0 \Rightarrow B_r(x) \subseteq A_1 \cap A_2 \quad \checkmark$

(c) Sei $x \in \bigcup_{j \in J} A_j \xrightarrow{\text{per Def.}} \exists j_0 \in J : x \in A_{j_0}$

da A_{j_0} offen $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A_{j_0} \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j \quad \blacksquare$

7.16. Warnung: Selbst abzählbare Schnitte offener Mengen
sind i.a. nicht offen!

Bsp.: $\forall j \in \mathbb{N}$ sei $A_j :=]-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}[\Rightarrow \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \{0\}$.

7.17 Definition $\mathbb{X}$ metr. Raum.

$A \subseteq \mathbb{X}$ abgeschlossen : $\Leftrightarrow \underbrace{\mathbb{X} \setminus A}_{= A^c}$ offen

7.18. Bemerkungen

(a) $\emptyset, \mathbb{X}$ sowohl offen als auch abgeschlossen.

(b) Sei $A \subseteq \mathbb{R} : \neg (A \text{ offen}) \not\Rightarrow A \text{ abgesch.}$

Bsp.: $[0, 1[$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgesch.,

$$\text{da } \mathbb{R} \setminus [0, 1[=]-\infty, 0[\cup [1, \infty[$$

$\uparrow$ nicht offen.

7.19. Definition Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$.

(a) $x \in X$ Randpunkt von A $:\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \text{ Umgebung } U \text{ von } x \text{ gilt} \\ U \cap A \neq \emptyset \text{ und } U \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$

$$\partial A := \{x \in X : x \text{ ist Randpkt. von } A\} \quad \text{Rand von } A$$

(b) $\overset{\circ}{A} := A \setminus \partial A$ Innere von A

(c) $\bar{A} := A \cup \partial A$ Abschluss von A

7.20. Beispiele (a) $X = \mathbb{R}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $A := [a, b[$

$$\Rightarrow \partial A = \{a, b\}, \quad \overset{\circ}{A} =]a, b[, \quad \bar{A} = [a, b]$$

(b) $X = \mathbb{R}^*$, $A = \mathbb{Q} \Rightarrow \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

(*) verstehen mit 1.1)

7.21. Satz Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt

(a) $\overset{\circ}{A}$ ist offen

(b) $\bar{A}$ ist abgeschlossen

(c) ∂A ist abgeschlossen.

Beweis: (a) falls $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ klar; sei nun also $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$
und $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \exists$ Umgebung U von x mit
 $U \cap A^c = \emptyset$ (denn sonst $x \in \partial A$). $\Rightarrow U \subseteq A$

O.E., sei U zudem offen (sonst, verkleinere
auf offene Teilmenge von U , die x enthält
- z.B. $\exists r > 0: B_r(x) \subseteq U$)

$\Rightarrow U \cap \partial A = \emptyset$ (Ann: $\exists y \in U \cap \partial A \xrightarrow{U \text{ offen}} U$ ist auch
Umgebung von $y \Rightarrow U \cap A^c \neq \emptyset$ (da $y \in \partial A$) $\nmid$).

$\Rightarrow U \subseteq \overset{\circ}{A} \checkmark$

(b) per. def gilt stets $\partial A = \partial(A^c)$

und (a) $\Rightarrow (A^c)$ offen

$$\Rightarrow \bar{A} = A \cup \partial A = (\mathbb{R} \setminus A^c) \cup \partial(A^c)$$

$$= \mathbb{R} \setminus \underbrace{(A^c \setminus \partial(A^c))}_{(\overset{\circ}{A^c})} \Rightarrow \text{abgeschlossen}$$

$$(c) \partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \partial A = \underbrace{(\mathbb{R} \setminus \bar{A})}_{(b) \text{ offen}} \cup \underbrace{\overset{\circ}{A}}_{(a) \text{ offen}} \quad \text{offen}$$

nach Satz 7.15.(c)



7.22. Satz Sei X metr. Raum. Dann gilt:

(a) A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

(b) A ist offen $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$

Beweis. (a) " $\Leftarrow$ " Satz 7.21 (b)

" $\Rightarrow$ " Wir zeigen $\partial A \subseteq A$ (denn $\Rightarrow \bar{A} \subseteq A$; zusammen mit $A \subseteq \bar{A}$ (aus def.!) $\Rightarrow$ Beh.).

Per Widerspruch: Ann.: $\exists x \in \partial A$ mit $x \in A^c$

n.v. A^c offen

$\Rightarrow \exists$ Umgebung U von x : $U \subseteq A^c$ / zu $x \in \partial A$ ✓

(b) " $\Leftarrow$ " Satz 7.21 (a)

" $\Rightarrow$ " Übung!

■

7.3. Folgen, Limiten, Stetigkeit

7.23 Definition Sei (X, d) metr. Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge, $x \in X$.

(a) $\left. \begin{array}{l} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ kgf. gegen } x \\ \text{in Zeichen: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \\ \text{bzw. } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \end{array} \right\} : \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall U, \text{ Umgebung von } x \\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \\ \quad x_n \in U \end{array} \right.$

(b) $(x_n)_n$ Cauchy-Folge : $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N \\ d(x_n, x_m) < \varepsilon \end{cases}$

(c) X vollständig : $\Leftrightarrow$ jede Cauchy-Folge in X kgt.

7.24. Bemerkung

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \underbrace{x_n \in B_\varepsilon(x)}_{\Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon}$

$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$

" $\Rightarrow$ " Bem. 7.13(b) ; " $\Leftarrow$ " per def. 7.12(b) von $\mathcal{U}$.

(b) $(x_n)_n$ kgt. $\Rightarrow (x_n)_n$ Cauchy-Folge

Bew: Übung

(c) Im Fall $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit Norm $|\cdot|$

ist Def. 7.23 im Einklang mit

der Begriffsbildungen aus Analysis I !

Spezialfall $(\mathbb{K}^v, \|\cdot\|_p)$ wird auf Körper $\mathbb{K}$ zurückgeführt.

7.25 Satz Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}^v$, $v \in \mathbb{N}$, versehen mit der p -Norm für $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt:

(a) Mit $x_n := (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(v)}) \forall n \in \mathbb{N}$ und $x := (x^{(1)}, \dots, x^{(v)}) \in \mathbb{K}^v$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \forall j = 1, \dots, v : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(j)} = x^{(j)}$$

Also: Kgz. $\iff$ komponentenweise Kgz.

(b) $\mathbb{K}^v$ ist vollständig (mit p -Norm!) (vollst. norm. Raum =: Banach-Raum)

Beweis: Beachte: $\forall j = 1, \dots, v, \forall y \in \mathbb{K}^v : |y^{(j)}| \leq \|y\|_p \quad (*)$

$$\begin{aligned} \text{(a) } (*) \Rightarrow & \stackrel{(*)}{\Rightarrow} 0 \leq |x_n^{(j)} - x^{(j)}| \leq \|x_n - x\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ & \Rightarrow x_n^{(j)} - x^{(j)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ in } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(j)} = x^{(j)} \quad \forall j = 1, \dots, v$, Sei $\varepsilon > 0$ bel.

$$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, v \exists N_{j, \varepsilon} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_{j, \varepsilon} \quad |x_n^{(j)} - x^{(j)}| < \varepsilon.$$

Sei $N_\varepsilon := \max(N_{1, \varepsilon}, \dots, N_{v, \varepsilon}) \quad (\in \mathbb{N})$ $p < \infty$

$$\Rightarrow \forall n \geq N_\varepsilon : \|x_n - x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^v |x_n^{(j)} - x^{(j)}|^p \right)^{1/p} < \sqrt[p]{v} \varepsilon & p < \infty \\ \max_{j=1, \dots, v} |x_n^{(j)} - x^{(j)}| < \varepsilon & p = \infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_p = 0.$$

(b) Aus (*) : $(x_n)_n \subseteq \mathbb{K}^V$ Cauchy bzgl. $\|\cdot\|_p$

$\Rightarrow \forall j=1, \dots, v : (x_n^{(j)})_n \subseteq \mathbb{K}$ Cauchy (bzgl. 1.1)

$\mathbb{K}$ vollst.

$\Rightarrow \forall j=1, \dots, v \exists x^{(j)} \in \mathbb{K} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(j)} = x^{(j)}$.

Somit nach (a) : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, wobei $x := (x^{(1)}, \dots, x^{(v)})$ □

7.26 Satz Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt

A abgeschlossen $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X \\ \Rightarrow x \in A \end{array} \right.$

Beweis : " $\Rightarrow$ " : Sei $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Rightarrow \forall U$ Umgebung von x gilt :
 $\exists x_n$ mit $x_n \in U$ d.h. $U \cap A \neq \emptyset$

A^c offen
 $\Rightarrow x \notin A^c$ also $x \in A$ ✓

" $\Leftarrow$ " : Sei $x \in A^c$; Beh. : $\exists n \in \mathbb{N} : B_{1/n}(x) \subseteq A^c$
(Beh. $\Rightarrow A^c$ offen $\Rightarrow A$ abgeschl. ✓)

Beh. ist wahr, denn andernfalls : $\forall n \in \mathbb{N} : B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ wähle $x_n \in B_{1/n}(x) \cap A$ aus

$\Rightarrow (x_n)_n \subset A$ und $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Rightarrow x \in A$ □

7.27. Definition Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$

• Durchmesser $\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y)$

• A beschränkt : $\Leftrightarrow \text{diam}(A) < \infty$

7.28. Satz (verallg. Intervallschachtelungsprinzip) (198)

Sei X vollständiger metr. Raum und $A_n \subseteq X \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
 $\forall n \in \mathbb{N}$ gelte:

- $A_n \neq \emptyset$
- A_n abgeschlossen
- $A_{n+1} \subseteq A_n$

dazu: $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0$

Dann $\exists! x \in X$ mit $x \in A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Existenz: $\forall n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in A_n$

- Da $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \text{diam}(A_n) < \varepsilon$
 und da $\forall n, m \geq N: x_n, x_m \in A_N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)_n$ Cauchy $\xrightarrow{X \text{ vollst.}} \exists x \in X: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

- $\forall N \in \mathbb{N}$ gilt: $(x_n)_{n \geq N} \subseteq A_N \xrightarrow[\text{Satz 7.26}]{A_N \text{ abgeschl.}} x \in A_N$

Eindeutigkeit: Für $x, y \in X$ gelte: $x, y \in A_N \quad \forall N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow d(x, y) \leq \text{diam}(A_N) \quad \forall N \in \mathbb{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} d(x, y) \leq 0$
 $\Rightarrow x = y$

7.29 Definition Seien $(X, d), (Y, \tilde{d})$

metr. Räume, $f: X \rightarrow Y$ und $a \in X$

- f folgenstetig in a : $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall (x_n)_n \subseteq X \text{ mit } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \text{ gilt:} \\ f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a) \end{cases}$
 $\nwarrow$ bzgl. d $\nearrow$ bzgl. $\tilde{d}$

- f stetig in a : $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \text{ Umgebungen } V \text{ von } f(a) \text{ gilt:} \\ \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } a \text{ mit} \\ f(U) \subseteq V \end{cases}$

Übung $\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \stackrel{= \delta_{\varepsilon, a}}{\quad} : \forall x \in \bar{X} : \\ \Leftrightarrow \\ d(x, a) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(a)) < \varepsilon \end{array} \right.$

(Metr. R.)
(MR)

7.30. Satz | Unter den Gegebenheiten von Def. 7.29 gilt

f stetig in $a \Leftrightarrow f$ folgenstetig in a

Bew: " $\Rightarrow$ ": Sei $(x_n)_n \subseteq \bar{X}$ Folge mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

Sei V bel. Umgebung von $f(a) \xrightarrow{f \text{ stetig in } a} \exists$ Umgeb. U von a

mit $f(U) \subseteq V$ (*)

Da $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \in U \xrightarrow{(*)} f(x_n) \in V$
 $\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a) \checkmark$

" $\Leftarrow$ ": (analog Satz 3.8 in Ana 1)

Ann: f nicht stetig in $a \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 :$

$\exists x \in \bar{X}$ mit $d(x, a) < \delta$ und $\tilde{d}(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{n}$
 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \bar{X}$ mit $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ und $\tilde{d}(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ und $(f(x_n))_n$ hgt. nicht gegen $f(a)$ ∇

7.31. Bemerkung

(a) Wegen Satz 7.30 fortan keine Unterscheidung zwischen stetig und folgenstetig in metr. Räumen - wir nennen beides stetig!

(b) In allgemeinerem Kontext (topol. Räume) bleiben die Def. von folgenstetig und stetig sinnvoll, nicht aber die Äquivalenz "(MR)".

Konsequenz: " $\Leftarrow$ " in Satz 7.30 gilt dort (in top. R.) nicht notwendigerweise!

(c) Def. 7.29 ist im Einklang mit Def. 3.7 für den Spezialfall $X = (D, d)$, $Y = (\mathbb{K}', 1.1)$

$\mathbb{K}^v \leftarrow$ Einschränkung des euklid. Abstands 1.1 auf $\mathbb{K}^v$

7.32. Satz Sei X metr. Raum und $f: X \rightarrow \mathbb{K}^v$, $v \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)

Da $f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ X}}{y} = (\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{K}^v}}{y_1}, \dots, y_v) =: (f_1(x), \dots, f_v(x)) \quad \forall x \in X$
induziert v Abbildungen $f_j: X \rightarrow \mathbb{K}$ für $j=1, \dots, v$

Dann gilt $\forall a \in X$:

f stetig in $a \Leftrightarrow \forall j=1, \dots, v: f_j$ stetig in a

Konvention: Wenn nicht anderweitig spezifiziert, verstehen wir immer $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit 1.1 (Absolutbetrag) und $\mathbb{K}^v$ mit Euklidischer Norm $\|\cdot\|_2$ (die äquivalent zu $\|\cdot\|_p$, vgl. Übung).

Beweis von Satz 7.32: Folgekriterium und Satz 7.25(a) ■

Ebenso mittels Folgen:

7.33. Satz Sei X metr. Raum, $f, g: X \rightarrow \mathbb{K}$ stetig in $a \in X$

Dann gilt (i) $f+g$ stetig in a (ii) fg stetig in a

(iii) falls $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ stetig in a .

7.34 Korollar Polynome auf $\mathbb{K}^v$, $v \in \mathbb{N}$, sind stetig.

$$\mathbb{K}^v \ni x \xrightarrow{P} \sum_{A_{N,v}} \gamma_{n_1, \dots, n_v} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_v^{n_v} \in \mathbb{K}, \quad \text{mit } N \in \mathbb{N}_0$$

$\uparrow$
 $(x_1, \dots, x_v)$ $A_{N,v}$

$$\text{und } A_{N,v} := \{n = (n_1, \dots, n_v) \in \mathbb{N}_0^v : n_1 + \dots + n_v \leq N\},$$

$$(\gamma_{n_1, \dots, n_v})_{n \in A_{N,v}} \in \mathbb{K}^{A_{N,v}} \quad (P: \text{Polynom des Grades } N)$$

Beweis: Satz 7.33 und $\mathbb{K}^v \rightarrow \mathbb{K}$ stetig $\forall j \in \{1, \dots, v\}$
 $x \mapsto x_j \quad \uparrow$ Übung!

Analog zu Satz 3.16 gilt und beweist man:

7-35 Satz / Seien (X_j, d_j) , $j=1,2,3$, metr. Räume und $a \in X_1$. Sei $f: X_1 \rightarrow X_2$ stetig in a und $g: X_2 \rightarrow X_3$ stetig in $f(a)$. Dann ist $g \circ f: X_1 \rightarrow X_3$ stetig in a .

7-36 Definition / Seien (X, d) und $(Y, \tilde{d})$ metrische Räume und $f: X \rightarrow Y$.

f stetig : $\Leftrightarrow \forall a \in X$ gilt: f stetig in a

7-37. Satz / Seien (X, d) , $(Y, \tilde{d})$ metr. Räume und $f: X \rightarrow Y$

Dann gilt:

f stetig $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall V \subseteq Y, V \text{ offen (in } Y) \text{ gilt:} \\ f^{-1}(V) \text{ offen (in } X) \end{cases}$

Beweis:

" $\Leftarrow$ " : Sei $a \in X$ bel. und V Umgebung von $f(a)$
 $\Rightarrow \exists \tilde{V} \subseteq V$ mit $\tilde{V}$ offen und $f(a) \in \tilde{V}$

" $\xrightarrow{u-V}$ " $\Rightarrow U := f^{-1}(\tilde{V})$ offen und $a \in U$
 also U Umgebung von a und $f(U) \subseteq \tilde{V} \subseteq V$. $\checkmark$

" $\Rightarrow$ " : Sei $V \subseteq Y$ offen, sei $a \in f^{-1}(V)$ bel.

$\Rightarrow \exists$ Umgebung $V_{f(a)}$ von $f(a)$ in V

" $\xrightarrow{u-V}$ " $\Rightarrow \exists U_a$ Umgebung von a mit $f(U_a) \subseteq V_{f(a)}$,

also $U_a \subseteq f^{-1}(V_{f(a)}) \subseteq f^{-1}(V)$

$\Rightarrow f^{-1}(V)$ offen $\blacksquare$

7.4. Kompaktheit

7-38. Definition Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$

• Sei Λ eine (Index-) Menge, $\forall \lambda \in \Lambda$ sei $U_\lambda \subseteq X$ offen

$(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ offene Überdeckung von A : $\Leftrightarrow A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

• A kompakt : $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \forall \text{ offene Überdeck. } (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \text{ von } A \text{ gilt:} \\ \exists \text{ endliche Teilüberdeckung, d.h. } \exists N \in \mathbb{N} \\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda : A \subseteq \bigcup_{j=1}^N U_{\lambda_j} \end{array} \right.$
(auch: Heine-Borel-Eigenschaft)

• A folgenkompakt : $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \forall \text{ Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \text{ gilt:} \\ \exists \text{ Teilfolge } (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}, \exists x \in \underline{\underline{A}} : \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \end{array} \right.$
(auch: Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft)

7-39. Beispiel (a) X metr. Raum und $(x_n)_n \subset X$ bgt. gegen $x \in X$. Dann ist die Menge $A := \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

(i) folgenkpt.

(ii) kpt.

zu (i): Sei $(y_n)_n$ Folge in A , setze $Y := \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$

1. Fall: Y endliche Menge $\Rightarrow (y_n)_n$ besitzt konstante Teilfolge $\Rightarrow$ bgt. $\checkmark$

2. Fall: Y unendliche Menge.

NB: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Rightarrow \forall l \in \mathbb{N}$ ist $A \setminus B_{1/l}(x)$ endliche Menge

Da $Y \subseteq A$ und $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ gilt: $\forall l \in \mathbb{N} : B_{1/l}(x) \cap Y$ unendl. Menge

$\Rightarrow \exists n_l \in \mathbb{N} : y_{n_l} \in B_{1/l}(x) \Rightarrow y_{n_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} x$, also bgt. $\checkmark$

zu (ii): Sei $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ bel. offene Überdeck. von A . (203)

$\Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda : x \in U_{\lambda_0} \leftarrow$ Umgebung von x

Da $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \in U_{\lambda_0}$

zudem $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1} \in \Lambda : x_j \in U_{\lambda_j} \forall j \in \{1, \dots, N-1\}$

$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{j=0}^{N-1} U_{\lambda_j}$ endl. Teilüberdeckung $\checkmark$.

Bem.: $\tilde{A} := A \setminus \{x\}$ i.a. weder kpt. noch folgenkpt.!

(b) $A = \emptyset$ kpt. und folgenkpt. (da nichts zu überprüfen).

7.40 Satz | Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt:

A kompakt $\Leftrightarrow A$ folgenkompakt.

7.41 Bemerkung

(a) Wegen Satz 7.40 keine Unterscheidung kpt./folgenkpt. in metr. Räumen nötig. (In allg. Räumen schon!)

(b) " $\Rightarrow$ " heißt Satz von Bolzano-Weierstraß

(c) Wir zeigen " $\Leftarrow$ " erst am Ende der Vorlesung, da aufwändiger und verwenden es bis dahin auch nicht. Siehe aber Spezialfall in Satz 7.42!

Beweis von " $\Rightarrow$ " in Satz 7.40

per Widerspruch: Sei A kpt., aber es gebe eine Folge $(x_n)_n \subseteq A$ ohne kpt.-'e TF in A (insbes. $\Rightarrow \#\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty$)

Beh.: $\forall x \in A : \exists$ offene Umgebung U_x von x mit

$x_n \in U_x$ für höchstens endl. viele $n \in \mathbb{N}$.

In der Tat: Ann: $\exists x \in A : \forall \epsilon \in \mathbb{N}$ gilt: $\exists \infty$ -viele $u \in \mathbb{N}$ mit $x_u \in B_{1/u}(x)$; wähle ein solches x_u , und nenne es $x_{n_k} \Rightarrow x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ ⚡

Nun gilt $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x$ (da $x \in U_x \forall x \in A$!)

A kpt.

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \exists x^{(1)}, \dots, x^{(N)} \in A : A \subseteq \bigcup_{j=1}^N U_{x^{(j)}}$

$\Rightarrow A$ enthält nur endlich viele Glieder von $(x_n)_n$ ⚡

In speziellen Fällen geht mehr (und manches leichter!)

7.42 Satz Sei $X = \mathbb{K}^V, \forall \in \mathbb{N}$, und $A \subseteq X$. Dann sind äquiv.

- (i) A abgeschlossen und beschränkt
 - (ii) A kpt.
 - (iii) A folgenkpt.
- } Satz von
Heine-Borel

7.43 Bemerkung

„(i) $\Rightarrow$ (ii)“ [bzw. „(i) $\Rightarrow$ (iii)“] ist Besonderheit von $\mathbb{K}^V$ mit Euklidischer (oder dazu äquivalenter) Norm.

7.44. Korollar Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}^V$ beschränkt

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt konvergente Teilfolge.

Zunächst 2 allg. Sätze, die für den Bew. von 7.42 nützlich!

7.45 Satz Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt:

A (folgen-) kompakt $\Rightarrow A$ abgeschl. und beschränkt.

Beweis: Da (Satz 7.40) kpt. $\Rightarrow$ folgenkpt., genügt es den Satz für A folgenkpt. zu zeigen

Gemäß Satz 6.27 genügt es zu zeigen:

Wenn: Folge $(x_n)_n \subseteq A$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{\underline{x}} \in \bar{X}$, dann: $x \in \underline{\underline{A}}$.

Also: u.V. $\exists$ F $(x_{n_k})_k \subseteq (x_n)_n$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \tilde{x} \in \underline{\underline{A}}$.

Teilfolge einer kpt.-en Folge selben Limes wie Folge(!) $\Rightarrow$
 $x = \tilde{x} \in A \checkmark$

• Ann.: A unbeschränkt ($\text{diam}(A) = +\infty$)

$$\Rightarrow \forall z \in A: \sup_{x \in A} d(z, x) = \infty \quad (*)$$

$$(\text{denn sonst: } \text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} \underbrace{d(x, y)}_{\leq d(x, z) + d(z, y)} \leq 2 \sup_{x \in A} d(z, x) < \infty)$$

$$(*) \Rightarrow \exists \text{ Folge } (x_n)_n \subseteq A \text{ mit } d(z, x_n) > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ jede Teilfolge von $(x_n)_n$ unbeschränkt $\Rightarrow$ nicht kpt.!
 also $\nrightarrow$ folgenkpt. $\square$

[7.46 Satz] Sei X metr. Raum, $K \subseteq X$ kpt. und
 $A \subseteq K$ abgeschlossen. Dann ist A kpt.

Beweis: Sei $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ off. Überdeckung von A

$$\Rightarrow \underbrace{(X \setminus A)}_{\text{u.V. offen!}} \cup \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right) = X \supseteq K \Rightarrow \text{off. Üb. von } K$$

K kpt.

$$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda: (X \setminus A) \cup U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_N} \supseteq K$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^N U_{\lambda_j} \supseteq A, \text{ also } A \text{ kpt. } \quad \square$$

7.47. Lemma Für $j=1, \dots, v$ seien $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ mit $a_j \leq b_j$

Dann gilt: der abgeschlossene Quader

$$Q := \prod_{j=1}^v [a_j, b_j] = \left\{ x \in \mathbb{R}^v : a_j \leq x_j \leq b_j \quad \forall j=1, \dots, v \right\}$$

ist kompakt.

7.48 Bemerkung Lemma gilt analog in $\mathbb{C}^v$:

Identifizieren $x = (x_1, \dots, x_v) \in \mathbb{C}^v$ mit

$$\gamma(x) := (\operatorname{Re} x_1, \operatorname{Im} x_1, \dots, \operatorname{Re} x_v, \operatorname{Im} x_v) \in \mathbb{R}^{2v}$$

(i) Da $\|x\|_2 = \|\gamma(x)\|_2$ in $\mathbb{C}^v$ in $\mathbb{R}^{2v}$, bleiben alle metrischen

Eigenschaften von $\mathbb{C}^v$ unter γ erhalten
(Jargon: $\mathbb{C}^v$ und $\mathbb{R}^{2v}$ sind isometrische isomorphe!)

(ii) Setze: Q abgesch. Quader in $\mathbb{C}^v \Leftrightarrow \exists$ abgesch. Quader $\tilde{Q} \subseteq \mathbb{R}^{2v}$:

Sei also $Q = \gamma^{-1}(\tilde{Q})$ abgesch. Quader in $\mathbb{C}^v$ und

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supseteq Q$ offene Überdeckung $\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \gamma(U_\lambda) \supseteq \tilde{Q}$

ist offene Überdeckung
(z.B. da $\gamma^{-1}: \mathbb{R}^{2v} \rightarrow \mathbb{C}^v$ stetig)

Da $\tilde{Q}$ kpt. nach Lemma 7.47

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \exists \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda : \tilde{Q} \subseteq \bigcup_{j=1}^N \gamma(U_{\lambda_j})$

$\Rightarrow Q \subseteq \bigcup_{j=1}^N U_{\lambda_j} \Rightarrow$ kpt. ✓

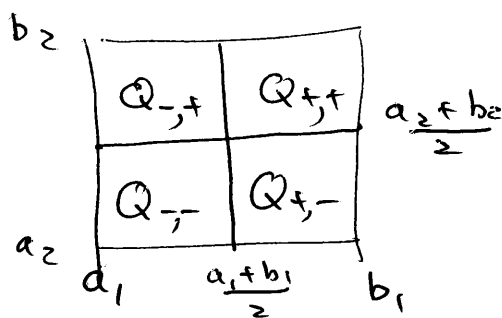
Beweis von Lemma 7.47

$v=2$

Teile Q in 2^v Quader mit halben Seitenlängen:

$$I_{j+} := \left[\frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right]$$

$$I_{j-} := \left[a_j, \frac{a_j + b_j}{2} \right]$$



$$Q = \bigcup_{\substack{\sigma_1 = +, -, \\ \dots, \sigma_v = +, -}} Q_{\sigma_1, \dots, \sigma_v} = \bigcup_{j=1}^{2^v} I_{j, \sigma_j}$$

Ann.: Q nicht kpt. $\Rightarrow \exists$ offene Überdeckung $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von Q ohne endl. Teilüberdeckung

$\Rightarrow \exists \tilde{\sigma}_j \in \{+, -\} : Q^{(1)} := Q_{\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_v}$ wird nicht von endlich vielen U_λ 's überdeckt.

$\Rightarrow$ Teile $Q^{(1)}$ in 2^v Quader...

Induktiv folgt: $\exists$ Folge $(Q^{(n)})_n$ von Quadern mit

(i) $Q^{(n+1)} \subseteq Q^{(n)} \quad \forall n$

(ii) $\text{diam}(Q^{(n)}) = 2^{-n} \text{diam}(Q) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(iii) $Q^{(n)}$ abgeschlossen $\forall n$

(iii) $\forall n$ gilt: $Q^{(n)}$ wird nicht von endlich vielen der U_λ 's überdeckt.

$(i) \wedge (ii) \wedge (iii) \xrightarrow{\text{Satz 7.28}} \exists ! x \in \mathbb{R}^v \text{ mit } \{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q^{(n)}$

$(\& Q^{(n)} \neq \emptyset) \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda : U_{\lambda_0} \ni x \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : x \in B_\varepsilon(x) \subseteq U_{\lambda_0}$

Sei $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\text{diam}(Q^{(m)}) < \varepsilon$

$x \in Q^{(m)}$

$\Rightarrow Q^{(m)} \subset B_\varepsilon(x) \subseteq U_{\lambda_0} \quad \nmid \quad \text{zu (iii)}$



Beweis von Satz 7.42

208

$(ii) \Rightarrow (iii)$ gemäß Satz 7.40
 $(iii) \Rightarrow (i)$ " " 7.45 } gilt allg. in metr. R.

$(i) \Rightarrow (ii)$ A beschränkt $\xRightarrow{\text{Lemma 7.47}} \exists$ kpt'ev Quader Q
+ Bem. mit $A \subseteq Q$

Da A abgeschl. $\xRightarrow{\text{Satz 7.46}} A$ kpt. $\square$

Zum Abschluss noch Sätze über stetige Abbildungen auf Kompakten:

7.49. Satz Seien X, Y metr. Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetig und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist $f(K) (\subseteq Y)$ kompakt.

Beweis: Sei $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ bel. offene Überdeckung von $f(K)$
in Y $\xRightarrow{\text{Satz 7.37}} V_\lambda := f^{-1}(U_\lambda)$ offen in $X \quad \forall \lambda \in \Lambda$

$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \quad \xRightarrow{K \text{ kpt.}} \exists N \in \mathbb{N}, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda:$
 $K \subseteq \bigcup_{j=1}^N V_{\lambda_j}$

$\Rightarrow f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{j=1}^N V_{\lambda_j}\right) = \bigcup_{j=1}^N \underbrace{f(V_{\lambda_j})}_{\subseteq U_{\lambda_j}} \Rightarrow \text{Beh.} \quad \square$

7.50 Satz Sei X kpt'ev metr. Raum und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h. $\exists x_+, x_- \in X$:

$$f(x_\pm) = \sup_{\inf} \{ f(x) : x \in X \},$$

Beweis: Satz 7.49 $\Rightarrow f(X)$ kpf. $\Rightarrow$ beschränkt (Satz 7.42) (Δ abgesch.)

Ann 1

$\Rightarrow$ (f.k.) $\exists$ Folge $(y_n)_n \subseteq f(X)$ mit $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S := \sup f(X) < \infty$

$f(X)$ abgesch.

$\Rightarrow S \in f(X) \Rightarrow S = f(x_+)$ für ein $x_+ \in X$;
analog für inf und x_-

7.51. Definition Seien (X, d) , $(Y, \tilde{d})$ metr. Räume.

$f: X \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig: $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0: \forall x, x' \in X: \\ d(x, x') < \delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(x')) < \varepsilon \end{cases}$

7.52. Satz Seien (X, d) , $(Y, \tilde{d})$ metr. Räume, $\underline{X}$ kompakt.

und $f: X \rightarrow Y$. Dann gilt:

f stetig $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ bel.

f stetig $\Rightarrow \forall x \in X \exists \delta_x = \delta_{\varepsilon, x} > 0 \forall x' \in X:$

$$d(x, x') < \delta_x \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Da $X = \bigcup_{x \in X} B_{\frac{\delta_x}{2}}(x)$ $\xrightarrow{X \text{ kpf}} \exists N \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_N \in X:$

$$X = \bigcup_{j=1}^N B_{\frac{\delta_{x_j}}{2}}(x_j) \quad (**)$$

Definiere: $\delta := \min_{j=1, \dots, N} \frac{\delta_{x_j}}{2} > 0.$

Seien $x, x' \in X$ bel. mit $d(x, x') < \delta.$

$(**)$ $\Rightarrow \exists l \in \{1, \dots, N\}: x \in B_{\frac{\delta_{x_l}}{2}}(x_l)$

also $d(x_l, x) < \frac{\delta_{x_l}}{2} < \delta_{x_l}$ und $d(x_l, x') \leq \underbrace{d(x_l, x)}_{< \frac{\delta_{x_l}}{2}} + \underbrace{d(x, x')}_{< \delta} < \delta_{x_l}$

$$\Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(x')) \leq \underbrace{\tilde{d}(f(x), f(x_1))}_{|x| < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\tilde{d}(f(x_1), f(x'))}_{|x| < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \square$$

setze dort $x' = x_1$ → $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$ → $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$
 setze dort $x = x_1$

7.5. Fourier-Reihen

Motivation: Taylor-Reihe $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ist

Entwicklung in Monome. Je nach Funktion f könnte Konvergenzgeschwindigkeit der Reihe durch andere Wahl der „Basisfunktionen“ als Monome besser sein. Hier: trigonometrische Funktionen.

7.53 Definition / Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $L > 0$

- f periodisch mit Periode L : $\Leftrightarrow f(x+L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
(auch: L -periodisch)
- f periodisch : $\Leftrightarrow \exists L > 0 : f$ periodisch mit Periode L

7.54 Bemerkung

(a) f periodisch mit Periode $2\pi \Leftrightarrow x \mapsto F(x) := f\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$ ist L -periodisch. O.b.d.A. nur $L = 2\pi$ im Folgenden

(b) Für $N \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, N$ sind

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

2π -periodisch.

„trigonometrische Polynome“

7.55. Definition

- $\mathcal{R} := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, 2\pi\text{-periodisch und integrierbar auf } [0, 2\pi] \right\}$
(Vektorraum!)
- $c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, k \in \mathbb{Z},$ (auch $:= \hat{f}(k) =: \hat{f}_k$)
Fourier-Koeffizienten von $f \in \mathcal{R}$
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto (\mathcal{F}f)(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ (falls existiert!)
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto (\mathcal{F}_N f)(x) := \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$ Fourier-Reihe von f
Fourier-Polynom von f .

7.56 Lemma (Reelle Fourier-Polynome)

Sei $f \in \mathcal{R}$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{F}_N f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

$$\text{mit } a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

$k = 0, \dots, N$ $k = 1, \dots, N$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{F}_N f)(x) = \sum_{k=-N}^N c_k (\cos(kx) + i \sin(kx)) = c_0 + \sum_{k=1}^N \left[(c_k + c_{-k}) \cos(kx) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kx) \right]$$

$$\bullet c_k + c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \underbrace{(e^{ikx} + e^{-ikx})}_{2 \cos(kx)} dx$$

$k = 1, \dots, N$

$$\bullet i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \underbrace{i(e^{-ikx} - e^{ikx})}_{2 \sin(kx)} dx$$

$$\bullet c_0 = \frac{a_0}{2} \text{ klar.}$$

~~✗~~

Was hat $\mathcal{F}f$ mit f zu tun? Zunächst etwas Struktur! (213)

7.57. Lemma (a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$$

def. positiv semidef., hermitesche Sesquilinearform mit

zugeh. Halbnorm: $\|f\|_2 := \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \langle f, f \rangle^{1/2}$

(b) Die Einschränkung $\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([0, 2\pi]) \times C([0, 2\pi])}$ ist ein

Skalarprodukt und $\|\cdot\|_2|_{C([0, 2\pi])}$ eine Norm. (siehe auch Addendum)

Beweis (a) • Integral wohldefiniert, denn

$f, g \in \mathbb{R} \xRightarrow{\text{Satz 6.10}} f, g$ beschränkt & Menge der Unstetigkeitsstellen N_f, N_g sind Nullmengen $\Rightarrow \overline{f}g$ beschränkt mit Unstetigkeitsstellen in $N_f \cup N_g$ Nullmenge $\xRightarrow{\text{Satz 6.10}} \overline{f} \cdot g \in \mathbb{R}$.

• pos. semidef. hermitesche Sesquilinearform: klar! $\Rightarrow f \mapsto \langle f, f \rangle^{1/2}$ def. Halbnorm.

(b) z.z. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht ausgeartet, d. h. $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$

Sei $f \in C([0, 2\pi])$ und $\exists x_0 \in [0, 2\pi]$ mit $f(x_0) \neq 0$.

Anm 1 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall y \in B_\varepsilon(x_0) : |f(y)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$; o. E. $\varepsilon \leq \pi$

$$\Rightarrow \langle f, f \rangle = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \geq \int_{\max\{0, x_0 - \varepsilon\}}^{\min\{2\pi, x_0 + \varepsilon\}} |f(x)|^2 dx \geq \frac{|f(x_0)|^2}{2} \cdot 2\varepsilon > 0$$

Satz 6.14(b).



7.58. Bemerkung

(214)

Es gilt Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$
und sogar Hölder-Ungleichung (Lin. Algebra!)

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \text{ vgl. Aufg. 3, Üb. blatt } 0$$

(dort für $C(I)$)

7.59. Lemma | Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $\xi_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $\xi_k: x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{ikx} \in \mathcal{R}$

Dann ist $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

d.h. $\langle \xi_k, \xi_l \rangle = \delta_{kl} \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}$

Beweis Aufgabe T2, Tut. blatt 1 + Substitution $\square$

7.60 Bemerkung

$$\mathcal{F}_N f = \sum_{k=-N}^N \langle \xi_k, f \rangle \cdot \xi_k \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

r. S. = Entwicklung des Vektors f in Orthonormalsystem

$\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Falls dies sogar eine "Basis", sollte
wie in linearer Algebra gelten

$$f \stackrel{!}{=} \mathcal{F}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \xi_k, f \rangle \xi_k$$

⚡
Frage: Kgz. in welchem Sinn
und für welche f ?

Vorbereitung für 1. Antwort:

(215)

7.61. Definition Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch.

f stückweise C^1 : $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \text{ eine Zerlegung } 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 2\pi \\ \text{und } \varphi_j \in C^1([x_{j-1}, x_j]) \quad \forall j = 1, \dots, N: \\ \text{(in Zeichen: } \underline{f \in PC^1}) \end{cases} \begin{cases} f|_{]x_{j-1}, x_j[} = \varphi_j|_{]x_{j-1}, x_j[} \quad \forall j \end{cases}$

7.62. Bemerkung. (a) $\forall j = 1, \dots, N$ gilt

$$\bullet \varphi_j(x_{j-1}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x_{j-1} + \varepsilon), \quad \varphi_j(x_j) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x_j - \varepsilon)$$

$$\bullet \varphi_{j,+}'(x_{j-1}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f'(x_{j-1} + \varepsilon), \quad \varphi_{j,-}'(x_j) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f'(x_j - \varepsilon)$$

↖ rechts-/linksseitige Ableitung, vgl. Def. 5.1.

$$(b) \{f \in C^1(\mathbb{R}) : f \text{ } 2\pi\text{-periodisch}\} \subseteq PC^1 \subseteq \mathcal{R}$$

$$(c) f \in PC^1 \Rightarrow f' \text{ eindeutig bis auf Sprungstellen und } f' \in \mathcal{R}$$

7.63. Definition Sei $f \in PC^1$. Arithmetisch gewittelte Funktion

$$f_{\text{am}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2} [f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon)]$$

7.64. Bemerkung. Mit der Notation aus Def. 7.61:

$$\bullet f|_{]x_{j-1}, x_j[} = f_{\text{am}}|_{]x_{j-1}, x_j[} \quad \forall j = 1, \dots, N$$

- an möglichen Unstetigkeitsstellen von f mittelt f_{am} rechts- u. linksseitigen Grenzwert.

7.65. Satz

(a) Sei $f \in PC^1$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (F_N f)(x) = \underline{f_{\text{am}}(x)}$$

(b) Sei $f \in C(\mathbb{R}) \cap PC^1$. Dann konvergiert $(F_N f)_{N \in \mathbb{N}}$ absolut und gleichmässig gegen f für $N \rightarrow \infty$.
(Siehe Satz 4.22)

(c) Sei $f \in PC^1$ und $I \subseteq]x_{j-1}, x_j[$ ein abgeschlossenes Intervall, wobei $j \in \{1, \dots, N\}$ und die Notation aus Def. 7.61 gilt. Dann konvergiert $(F_N f)_{N \in \mathbb{N}}$ gleichmässig auf I gegen f für $N \rightarrow \infty$.

7.66. Bemerkung

(a) In 7.65(a) kann i. A. keine glm. Ktz. gelten, da sonst die Limesfkt. stetig wäre.

(b) Dubois-Reymond (1873): $\exists f \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{R}$ und $\exists x \in \mathbb{R}$:
(du Bois-Reymond) $(F_N f)(x)$ nicht konvergent!

Mann muss also Ausnahmepunkte zulassen,
wenn man weniger Regularität von f hat.

Dies führt auf Antwort 2 zur Frage in Bem. 7.60.

7.67. Satz Sei $f \in \mathcal{R}$. Dann gilt

(217)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \mathcal{F}_N f\|_2 = 0 \quad \text{Kgz. im quadratischen Mittel}$$

Insbesondere gilt die Vollständigkeitsrelation

(auch: Parseval-Glg.)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \mathcal{E}_k, f \rangle|^2 = \|f\|_2^2$$

Jargon: $\{\mathcal{E}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{R}$

7.68. Bemerkung: Seien $f, f_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar, $n \in \mathbb{N}$

(a) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig $\Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ im quadr. Mittel

(b) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise ~~i.d.~~ $\nRightarrow$ " (vgl. Übung!)

(c) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ im quadr. Mittel $\Rightarrow$ (siehe Aus. III) $\left\{ \begin{array}{l} \forall \text{ Teilfolgen } (f_{n_k})_k \\ \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}} \text{ und} \\ \exists \text{ Nullmenge } \mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}: \\ f_{n_{k_l}}(x) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} f(x) \quad \forall x \in [0, 2\pi] \setminus \mathcal{N} \end{array} \right.$

7.69. Lemma Sei $f \in \mathcal{R}$. Dann gilt $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\|f - \mathcal{F}_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^N |\langle \mathcal{E}_k, f \rangle|^2 = \|f\|_2^2 - \|\mathcal{F}_N f\|_2^2$$

Beweis

$$\bullet \langle f, \mathcal{F}_N f \rangle = \sum_{k=-N}^N \underbrace{\langle f, \langle \mathcal{E}_k, f \rangle \mathcal{E}_k \rangle}_{\langle \mathcal{E}_k, f \rangle \langle f, \mathcal{E}_k \rangle} = \sum_{k=-N}^N |\langle \mathcal{E}_k, f \rangle|^2$$

$$\bullet \langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle = \left\langle \sum_{k=-N}^N \langle \mathcal{E}_k, f \rangle \mathcal{E}_k, \sum_{l=-N}^N \langle \mathcal{E}_l, f \rangle \mathcal{E}_l \right\rangle$$

$$= \sum_{k, l=-N}^N \overline{\langle \mathcal{E}_k, f \rangle} \langle \mathcal{E}_l, f \rangle \underbrace{\langle \mathcal{E}_k, \mathcal{E}_l \rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=-N}^N |\langle \mathcal{E}_k, f \rangle|^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{Somit } \|f - F_N f\|_2^2 &= \langle f - F_N f, f - F_N f \rangle \\
 &= \|f\|_2^2 - \langle f, F_N f \rangle - \langle F_N f, f \rangle + \langle F_N f, F_N f \rangle \\
 &= \|f\|_2^2 - \|F_N f\|_2^2
 \end{aligned}$$

7.70. Korollar (Besselsche Ungleichung) Für $f \in \mathcal{R}$ gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \Sigma_k, f \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Beweis: Lemma 7.69: $0 \leq \|f - F_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|F_N f\|_2^2 \quad \forall N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{k=-N}^N |\langle \Sigma_k, f \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \quad \forall N \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Beh. mit $N \rightarrow \infty$
(Existenz d. Limes, da isotone beschränkte Folge!)

7.71. Bemerkung: (a) Beweis zeigt $\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall f \in \mathcal{R}$

$$\|F_N f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

(b) Aus Lemma 7.69 und Kor. 7.70 folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - F_N f\|_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{In Bessel-Ungleichung gilt} \\ \text{Gleichheit (Parseval-Alg.)} \end{cases}$$

7.72. Korollar (Riemannsches Lemma - Verschärfung von Satz 6.23)
 $\uparrow$ dort $f \in C^1$

Sei $f \in \mathcal{R}$. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} dx = 0$$

Beweis. Kor. 7.70 $\Rightarrow \langle \Sigma_k, f \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

7.73. Lemma Für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\sigma_N(x) := \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \begin{cases} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}, & x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ N + \frac{1}{2}, & x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Es gilt $\sigma_N \in C(\mathbb{R})$, gerade, 2π -period. und

$$\int_0^\pi \sigma_N(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \bullet \sigma_N(x) &= \frac{1}{2} e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} = \frac{1}{2} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\ x \notin 2\pi\mathbb{Z} &\rightarrow \frac{e^{i(2N+1)x/2} - 1}{e^{ix/2} - 1} \\ (2.24(iv)) & \end{aligned}$$

• Sei $k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi k} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \stackrel{\text{l'Hôpital}}{=} (N+\frac{1}{2}) \lim_{x \rightarrow 2\pi k} \frac{\cos(N+\frac{1}{2})x}{\cos \frac{x}{2}} = 1$$

- ansonsten Stetigkeit klar, da Nenner $\neq 0$.

$$\bullet \int_0^\pi \sigma_N(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N \underbrace{\int_0^\pi e^{inx} dx}_{= \pi \delta_{n0} + (1-\delta_{n0}) \frac{1}{in} (e^{in\pi} - 1)} = \frac{\pi}{2}$$

$$\pi \delta_{n0} + (1-\delta_{n0}) \frac{1}{in} (e^{in\pi} - 1)$$

• Null für n gerade

• Terme für n und

$-n$ heben sich weg



7.74. Lemma Sei $f \in PC^1 \cap C(\mathbb{R})$. Seien $c_k, k \in \mathbb{Z}$, die Fourier-Koeffz. von f' . Dann gilt

$$c_k' = ik c_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Mit der Notation von Def. 7.61:

$$c_k' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \underbrace{\varphi_j'(x)}_{\substack{f \text{ stetig} \\ \varphi_j(x_j) = \varphi_{j+1}(x_j)}} e^{-ikx} dx$$

$$\underbrace{\varphi_j(x) e^{-ikx}}_{x_{j-1}}^{x_j} + ik \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j(x) e^{-ikx} dx$$

$$\stackrel{b}{=} \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{\varphi_N(2\pi)}_{f(2\pi)} \underbrace{e^{-ik2\pi}}_1 - \underbrace{\varphi_1(0)}_{f(0)} \right) + ik \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx}_{c_k}$$

f stetig u. 2π -per. $\quad \quad \quad f$ 2π -period.

Beweis von Satz 7.65.

(a) Sei $x \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}$

$$\bullet (F_N f)(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikx} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iky} dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \underbrace{\delta_N(x-y)}_{\delta_N(y-x)} dy$$

$$(\text{t: } y-x) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{2\pi-x} \underbrace{f(t+x) \delta_N(t)}_{2\pi\text{-period.}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \delta_N(t) dt$$

Lemma 7.73

$$\bullet f_{\text{am}}(x) \stackrel{b}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{f_+(x)}_{:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x+\varepsilon)} \delta_N(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \underbrace{f_-(x)}_{:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x-\varepsilon)} \delta_N(t) dt$$

$$\Rightarrow (F_N f)(x) - f_{\text{am}}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_x(t) \sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right] dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{g_x(t) e^{it/2}}_{=: \tilde{g}_x(t)} e^{iNt} dt \right) \quad (*)$$

mit

$$g_x(t) := \begin{cases} \frac{f(x+t) - f_+(x)}{2 \sin(t/2)}, & t \in]0, \pi[+ 2\pi\mathbb{Z} \\ 0, & t \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{f(x+t) - f_-(x)}{2 \sin(t/2)}, & t \in]-\pi, 0[+ 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Es gilt:

- (i) g_x beschränkt auf $[-\pi, \pi]$ ($\Rightarrow$ auf $\mathbb{R}$, da $f \in \mathcal{R}$)
(Beweis: Siehe unten!).

- (ii) g_x höchstens auf Nullmenge $N \cup \pi\mathbb{Z}$ unstetig
(da $f \in \mathcal{R} \Rightarrow$ höchstens auf Nullmenge N unstetig).

$\Rightarrow$ (i) $\wedge$ (ii) gilt auch für $\tilde{g}_x$. Da $\tilde{g}_x$ 2π -period. $\Rightarrow \tilde{g}_x \in \mathcal{R}$

$\Rightarrow$ aus (*) und Kor. 7.72 : $\lim_{N \rightarrow \infty} [(F_N f)(x) - f_{\text{am}}(x)] = 0 \quad \checkmark$
(Riemann-Lemma)

(b) (i) $\forall 0 \neq k \in \mathbb{Z} : |c_k| = \frac{1}{|k|} |kc_k| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + k^2 |c_k|^2 \right)$

Binom.-Ungl. $(a-b)^2 \geq 0$
für $a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

(ii) Besselsche-Ungleichung (Kor. 7.70):

$$f \in PC^1 \Rightarrow f' \in \mathcal{R} \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c'_k|^2 < \infty$$

$\nwarrow$ Fourier-Koeffz. von f'

(iii) $f \in C(\mathbb{R}) \cap PC^1$ u. Lem. 7.74

$$\Rightarrow c'_k = ik c_k$$

also: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |c_k e^{ikx}| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| \stackrel{(i)}{\leq} |c_0| + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{k^2} + \underbrace{k^2 |c_k|^2}_{|c'_k|^2 \stackrel{(iii)}{< \infty}} \right) \stackrel{(ii)}{< \infty}$

$\Rightarrow$ Beh. mit Kgz. Kriterium von Weierstraß,

Satz 4.22. $\checkmark$

Beschränktheit von g_x auf $[-\pi, \pi]$:

Es ist nur Umgebung von $t=0$ zu untersuchen; Rest klar, da f beschränkt ($f \in \mathcal{R}$)
Sei $x \in \mathbb{R}$ bel.

$$\text{Da } \frac{f(x+t) - f_{\pm}(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{f(x+t) - f_{\pm}(x)}{t} \cdot \underbrace{\frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 1}$$

ist nur 1. Faktor für $t \rightarrow 0$ zu analysieren.

1. Fall: $t > 0$ o. E. sei $x \in [0, 2\pi[$ (da f 2π -period.)

$f \in PC^1$, mit Notation von Def. 7.61 $\exists j: x \in [x_{j-1}, x_j[$

und $f|_{[x_{j-1}, x_j]} = \varphi_j|_{[x_{j-1}, x_j]}$ wobei $\varphi_j \in C^1([x_{j-1}, x_j])$

$\Rightarrow f_+(x) = \varphi_j(x)$, $f(x+t) = \varphi_j(x+t) \quad \forall t > 0$ hinreich. klein

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f_+(x)}{t} = \varphi_{j,+}'(x) (= \varphi_j'(x) \quad \forall x \in]x_{j-1}, x_j[)$$

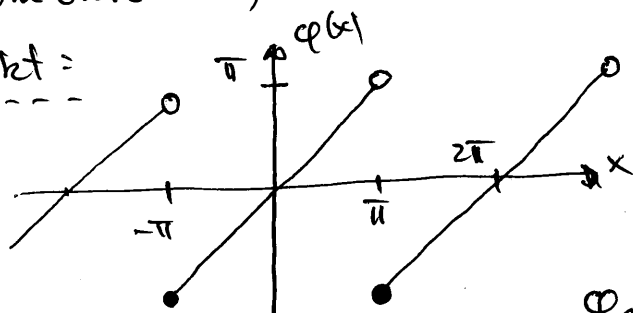
2. Fall: $t \leq 0$: Analog: o. E. sei $x \in]0, 2\pi]$

$\exists j: x \in]x_{j-1}, x_j]$ und $f|_{]x_{j-1}, x_j]} = \varphi_j|_{]x_{j-1}, x_j]}$ mit $\varphi_j \in C^1([x_{j-1}, x_j])$

$\Rightarrow f_-(x) = \varphi_j(x)$, $f(x+t) = \varphi_j(x+t) \quad \forall t \leq 0$ hinreichend nahe bei 0

$$\Rightarrow \lim_{t \nearrow 0} \frac{f(x+t) - f_-(x)}{t} = \varphi_{j,-}'(x) (= \varphi_j'(x) \quad \forall x \in]x_{j-1}, x_j]) \quad \square$$

(C) (vom Satz 7.65)

Hilfsfkt: φ 2π -period.

$$\varphi|_{[-\pi, \pi]} = \text{id}$$

$$\varphi_{\text{am}}(l\pi) = 0, l \in \mathbb{Z}$$

Es gilt, $\forall x \in \mathbb{R}$:
(Übung!)

$$\varphi_{\text{am}}(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$$

Beh.: $\forall 0 < r < \pi$ gilt: $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$ glm. kgt.
für $x \in [-r, r]$

(Beweis unten)

 $\Rightarrow \forall \tau \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\varphi_\tau := 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin[k(\cdot - \tau)] \in PC^1$
(d.h. $\varphi_\tau(x) = \varphi_{\text{am}}(x - \tau) \forall x$)
- stetig bis auf $\tau + l\pi, l \in \mathbb{Z}$ ungerade,
dort Sprung um -2π

Sei $f \in PC^1$ mit Sprungstellen bei $\tau_1, \dots, \tau_m \in [-\pi, \pi]$
und Sprüngen $\Delta_j := f_+(\tau_j) - f_-(\tau_j)$

$$\Rightarrow g := f_{\text{am}} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \frac{\Delta_j}{2\pi} \varphi_{\tau_j, \text{am}}(\cdot + \pi)}_{\text{Beh. (oben)}} \in \underline{\underline{C(\mathbb{R})}} \cap PC^1$$

(b) $\downarrow$ Fourier-Reihe
kgt. glm.Fourier-Reihe kgt. glm. weg von τ_j 's $\Rightarrow$ Fourier-Reihe von f_{am} kgt. glm. weg
von τ_j 's. ✓Beweis der Beh.:

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \text{ für } |x| \leq r, 0 < r < \pi, n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow \forall n, m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 2 |S_{n+m}(x) - S_n(x)| \cdot \cos \frac{x}{2} &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underbrace{2 \sin(kx) \cos \frac{x}{2}}_{\sin[(k+\frac{1}{2})x] + \sin[(k-\frac{1}{2})x]} \right| \\
 &= \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \sin[(n+\frac{1}{2})x] + \frac{(-1)^{n+m+1}}{n+m} \sin[(n+m+\frac{1}{2})x] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=n+1}^{n+m-1} (-1)^{k+1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}_{\frac{1}{k(k+1)}} \sin[(k+\frac{1}{2})x] \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \sup_{x \in [-r, r]} |S_{n+m}(x) - S_n(x)| &\leq \frac{1}{\cos \frac{r}{2}} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+m} + \sum_{k=n+1}^{n+m-1} \frac{1}{k^2} \right)}_{m \rightarrow \infty} \\
 &\quad \underbrace{\frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{m \rightarrow \infty \rightarrow 0}
 \end{aligned}$$

Nun noch Vorbereitungen für Beweis von Satz 7.67.:

7.75. Lemma Sei $f \in \mathcal{R}$ und $\varepsilon > 0$.

Dann $\exists g \in C([0, 2\pi]) \cap \mathcal{P}^+$ mit $\|g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$

und $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.

Beweis O.F. sei f reellwertig

[Sonst zerlege in $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$].

Sei $\varepsilon > 0$.

1. Akt: Wir konstruieren g mit $\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$.

Satz 6.7. $\Rightarrow \exists$ Unterteilung $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2\pi$ mit

Stützstellen $\xi_j^\pm \in [x_{j-1}, x_j]$ def. durch
$$f(\xi_j^\pm) = \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) =: m_j^+$$
$$f(\xi_j^-) = \min_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) =: m_j^-$$

so dass

$$0 \leq \sum_{j=1}^n (m_j^+ - m_j^-) (x_j - x_{j-1}) < \varepsilon$$

Für $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, n$, sei

$$g(x) := \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} f(x_{j-1}) + \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} f(x_j)$$

d.h. g stückweise linear mit $g(x_j) = f(x_j) \quad \forall j = 0, \dots, n$

$$m_j^- \leq f(x) \leq m_j^+ \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$$

$$m_j^- \leq g(x) \leq m_j^+$$

$$\Rightarrow \bullet |f(x) - g(x)| \leq m_j^+ - m_j^- \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$$

$$\bullet |m_j^\pm| \leq \|f\|_\infty \quad \forall j \Rightarrow \|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

$$\text{und } \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)| dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\leq m_j^+ - m_j^-} dx$$

$$\leq \sum_{j=1}^n (m_j^+ - m_j^-) (x_j - x_{j-1})$$

$$< \varepsilon.$$

2. Akt

$$\begin{aligned} \|f-g\|_2^2 &= \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(x)-g(x)|^2}_{\leq |f(x)-g(x)|(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)} dx \stackrel{1. \text{ Akt}}{\leq} 2\|f\|_\infty \varepsilon \\ &\leq |f(x)-g(x)|(\underbrace{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty}_{\leq 2\|f\|_\infty}) \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 7.67.Sei $f \in R$, $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Sei g wie in Lemma 7.75.

$$\Rightarrow \|f - F_N f\|_2 \leq \underbrace{\|f - g\|_2}_{< \varepsilon} + \|g - F_N g\|_2 + \underbrace{\|F_N g - F_N f\|_2}_{\substack{\text{Bessel-Ungl.} \\ (\text{Bem. 7.71. (a)}) \leq \|g - f\|_2}}$$

$$< 2\varepsilon + \|g - F_N g\|_2$$

$$g \in C(\mathbb{R}) \cap PC^+ \stackrel{\text{Satz 7.65 (b)}}{\Rightarrow} F_N g \xrightarrow{N \rightarrow \infty} g \text{ gleichm\"assig}$$

Bem. 7.68(a)

 $\Rightarrow$

auch im quadr. Mittel

$$\Rightarrow \limsup_{N \rightarrow \infty} \|f - F_N f\|_2 \leq 2\varepsilon;$$

da $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow$ Beh. □