7.5. Fourier-Reihen

Motivation: Taylor-Reihe $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ist Entwicklung in Monome. Je nach Funktion f könnte Konvergenzgeschwindigkeit der Reihe durch andere Wahl der „Basisfunktionen" als Monome besser sein. Hier: trigonometrische Funktionen.

7.53 Definition Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $L > 0$

- f periodisch mit Periode L (auch: L-periodisch) $:\Leftrightarrow f(x+L) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$
- f periodisch $:\Leftrightarrow \exists L > 0: f$ periodisch mit Periode L

7.54 Bemerkung

(a) f periodisch mit Periode $2\pi \Leftrightarrow x \mapsto F(x) := f(\frac{2\pi}{L}x)$ ist L-periodisch. O.B.d.A nur $L = 2\pi$ im Folgenden

(b) Für $N \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, N$ sind

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

„trigonometrische Polynome"

2π-periodisch.

7.55. Definition

- $\mathcal{R} := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-periodisch und integrierbar auf $[0, 2\pi] \}$ (Vektorraum!)
- $c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$, $k \in \mathbb{Z}$, (auch $=: \hat{f}(k) =: \hat{f}_k$)
  Fourier-Koeffizienten von $f \in \mathcal{R}$
- $\mathbb{R} \ni x \longmapsto (\mathcal{F}f)(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ (falls existiert!)
  Fourier-Reihe von f
- $\mathbb{R} \ni x \longmapsto (\mathcal{F}_N f)(x) := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$ Fourier-Polynom von f.

7.56 Lemma (Reelle Fourier-Polynome)

Sei $f \in \mathcal{R}$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{F}_N f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

mit $a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$, $k = 0, \dots, N$; $b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$, $k = 1, \dots, N$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{F}_N f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k (\cos(kx) + i \sin(kx)) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} \left[(c_k + c_{-k}) \cos(kx) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kx) \right]$$

- $c_k + c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \underbrace{\left(e^{ikx} + e^{-ikx} \right)}_{2\cos(kx)} dx$, $k = 1, \dots, N$
- $i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \underbrace{i \left(e^{-ikx} - e^{ikx} \right)}_{2\sin(kx)} dx$
- $c_0 = \frac{a_0}{2}$ klar.

$\blacksquare$

Was hat $\mathcal{F}f$ mit f zu tun? Zunächst etwas Struktur:

7.57. Lemma (a)

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{l} \mathcal{R}\times\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (f,g) \mapsto \langle f,g\rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)\,dx \end{array}$$

def. positiv semidef., hermitische Sesquilinearform mit zugeh. Halbnorm:

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = \langle f,f\rangle^{1/2}$$

(b) Die Einschränkung $\langle\cdot,\cdot\rangle_{C([0,2\pi])\times C([0,2\pi])}$ ist ein Skalarprodukt und $\|\cdot\|_2\big|_{C([0,2\pi])}$ eine Norm.

(siehe auch Addendum)

Beweis (a) • Integral wohldefiniert, denn

$f,g\in\mathcal{R} \overset{\text{Satz 6.10}}{\Longrightarrow} f,g$ beschränkt & Menge der Unstetigkeitsstellen N_f, N_g sind Nullmengen $\Rightarrow \overline{f}g$ beschränkt mit Unstetigkeitsstellen in $N_f\cup N_g$ Nullmenge

$\overset{\text{Satz 6.10}}{\Longrightarrow} \overline{f}\cdot g\in\mathcal{R}$.

• pos. semidef. hermitische Sesquilinearform: klar! $\Rightarrow f\mapsto\langle f,f\rangle^{1/2}$ def. Halbnorm.

(b) z.z. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist nicht ausgeartet, d.h.

$\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow f=0$

Sei $f\in C([0,2\pi])$ und $\exists x_0\in[0,2\pi]$ mit $f(x_0)\neq 0$.

$\overset{\text{Ana I}}{\Longrightarrow} \exists\varepsilon>0\ \forall y\in B_\varepsilon(x_0): |f(y)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$; o.E. $\varepsilon\le\pi$

$$\Rightarrow \langle f,f\rangle = \int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx \ge \int_{\max\{0,x_0-\varepsilon\}}^{\min\{2\pi,x_0+\varepsilon\}} |f(x)|^2\,dx \ge \frac{|f(x_0)|^2}{2}\cdot 2\varepsilon > 0$$

Satz 6.14(b).

■

7.58. Bemerkung

Es gilt Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ (Lin. Algebra!)

und sogar Hölder-Ungleichung

$|\langle f,g\rangle| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; vgl. Aufg 3, Üb.blatt 0 (dort für $C(I)$)

7.59. Lemma Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $\mathcal{E}_k: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{ikx}\end{array} \in \mathcal{R}$

Dann ist $\{\mathcal{E}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$,

d.h. $\langle \mathcal{E}_k, \mathcal{E}_l\rangle = \delta_{kl} \quad \forall k,l \in \mathbb{Z}$

Beweis Aufgabe T2, Tut.blatt 1 + Substitution $\boxtimes$

7.60 Bemerkung

$$\mathcal{F}_N f = \sum_{k=-N}^{N} \langle \mathcal{E}_k, f\rangle \cdot \mathcal{E}_k \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

r. S. = Entwicklung des Vektors f in Orthonormalsystem $\{\mathcal{E}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Falls dies sogar eine „Basis", sollte wie in linearer Algebra gelten

$$f \overset{!}{=} \mathcal{F}f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \mathcal{E}_k, f\rangle \mathcal{E}_k$$

Frage: Kgz. in welchem Sinn und für welche f ?

Vorbereitung für 1. Antwort:

7.61. Definition Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch.

$$f \text{ stückweise } C^1 :\Leftrightarrow \begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \text{ eine Zerlegung } 0 = x_0 < x_1 < \ldots x_{N-1} < x_N = 2\pi \\ \text{und } \varphi_j \in C^1([x_{j-1}, x_j]).\ \forall j = 1, \ldots, N: \\ f|_{]x_{j-1}, x_j[} = \varphi_j|_{]x_{j-1}, x_j[} \quad \forall j \end{cases}$$

(in Zeichen: $f \in PC^1$)

7.62. Bemerkung. (a) $\forall j = 1, \ldots, N$ gilt

- $\varphi_j(x_{j-1}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x_{j-1} + \varepsilon)$, $\varphi_j(x_j) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x_j - \varepsilon)$
- $\varphi'_{j,+}(x_{j-1}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f'(x_{j-1} + \varepsilon)$, $\varphi'_{j,-}(x_j) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f'(x_j - \varepsilon)$

rechts-/linksseitige Ableitung, vgl. Def. 5.1.

(b) $\{f \in C^1(\mathbb{R}) : f \ 2\pi\text{-periodisch}\} \subseteq PC^1 \subseteq \mathcal{R}$

(c) $f \in PC^1 \Rightarrow f'$ eindeutig bis auf Sprungstellen und $f' \in \mathcal{R}$

7.63. Definition Sei $f \in PC^1$. Arithmetisch gemittelte Funktion

$$f_{am} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2}[f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon)] \end{array}$$

7.64. Bemerkung. Mit der Notation aus Def. 7.61:

- $f|_{]x_{j-1}, x_j[} = f_{am}|_{]x_{j-1}, x_j[} \quad \forall j = 1, \ldots, N$

- an möglichen Unstetigkeitsstellen von f mittelt f_{am} rechts- u. linksseitigen Grenzwert.

7.65. Satz

(a) Sei $f \in PC^1$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty} (\mathcal{F}_N f)(x) = \underline{f_{am}}(x)$$

(b) Sei $f \in C(\mathbb{R}) \cap PC^1$. Dann konvergiert $(\mathcal{F}_N f)_{N\in\mathbb{N}}$ absolut und gleichmässig gegen f für $N \to \infty$.

(Siehe Satz 4.22)

(c) Sei $f \in PC^1$ und $I \subseteq \,]x_{j-1}, x_j[$ ein abgeschlossenes Intervall, wobei $j \in \{1, \dots, N\}$ und die Notation aus Def. 7.61 gilt. Dann konvergiert $(\mathcal{F}_N f)_{N\in\mathbb{N}}$ gleichmässig auf I gegen f für $N \to \infty$.

7.66. Bemerkung

(a) In 7.65(a) kann i. A. keine glm. Kgz. gelten, da sonst die Limesfkt. stetig wäre.

(b) Dubois-Reymond (1873): $\exists f \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{R}$ und $\exists x \in \mathbb{R}$:
(du Bois-Reymond)
$(\mathcal{F}_N f)(x)$ nicht konvergent!

Mann muss also Ausnahmepunkte zulassen, wenn man weniger Regularität von f hat.
Dies führt auf Antwort 2 zur Frage in Bem. 7.60:

7.67. Satz Sei $f \in \mathcal{R}$. Dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \mathcal{F}_N f\|_2 = 0 \quad \text{Kgz. im quadratischen Mittel}$$

Insbesondere gilt die Vollständigkeitsrelation (auch: Parseval-Glg.)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle \mathcal{E}_k, f\rangle|^2 = \|f\|_2^2$$

Jargon: $\{\mathcal{E}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{R}$

7.68. Bemerkung: Seien $f, f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ integrierbar, $n \in \mathbb{N}$

(a) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig $\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ im quadr. Mittel

(b) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise $\overset{\text{i.a.}}{\not\Rightarrow}$ " " (vgl. Übung!)

(c) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ im quadr. Mittel $\Rightarrow$ $\forall$ Teilfolgen $(f_{n_k})_k$ $\exists$ Teilfolge $(f_{n_{k_\ell}})_\ell$ und $\exists$ Nullmenge $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}$: $f_{n_{k_\ell}}(x) \xrightarrow{\ell\to\infty} f(x)$ $\forall x \in [0,2\pi]\setminus\mathcal{N}$

(siehe Ana. III)

7.69. Lemma Sei $f \in \mathcal{R}$. Dann gilt $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\|f - \mathcal{F}_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^{N} |\langle \mathcal{E}_k, f\rangle|^2 = \|f\|_2^2 - \|\mathcal{F}_N f\|_2^2$$

Beweis

- $$\langle f, \mathcal{F}_N f\rangle = \sum_{k=-N}^{N} \underbrace{\langle f, \langle \mathcal{E}_k, f\rangle \mathcal{E}_k\rangle}_{\langle \mathcal{E}_k, f\rangle \langle f, \mathcal{E}_k\rangle} = \sum_{k=-N}^{N} |\langle \mathcal{E}_k, f\rangle|^2$$

- $$\langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f\rangle = \left\langle \sum_{k=-N}^{N} \langle \mathcal{E}_k, f\rangle \mathcal{E}_k, \sum_{l=-N}^{N} \langle \mathcal{E}_l, f\rangle \mathcal{E}_l \right\rangle$$

$$= \sum_{k,l=-N}^{N} \overline{\langle \mathcal{E}_k, f\rangle} \langle \mathcal{E}_l, f\rangle \underbrace{\langle \mathcal{E}_k, \mathcal{E}_l\rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=-N}^{N} |\langle \mathcal{E}_k, f\rangle|^2$$

Somit $\|f-\mathcal{F}_N f\|_2^2 = \langle f-\mathcal{F}_N f, f-\mathcal{F}_N f\rangle$
$= \|f\|_2^2 - \langle f, \mathcal{F}_N f\rangle - \langle \mathcal{F}_N f, f\rangle + \langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f\rangle$
$= \|f\|_2^2 - \|\mathcal{F}_N f\|_2^2$ ☒

7.70. Korollar (Besselsche Ungleichung) Für $f \in \mathcal{R}$ gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle \mathcal{E}_k, f\rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 .$$

Beweis: Lemma 7.69: $0 \leq \|f-\mathcal{F}_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|\mathcal{F}_N f\|_2^2 \quad \forall N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{k=-N}^{N} |\langle \mathcal{E}_k, f\rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \quad \forall N \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Beh. mit $N \to \infty$
(Existenz d. limes, da isotone beschränkte Folge!) ☒

7.71. Bemerkung: (a) Beweis zeigt $\forall N \in \mathbb{N}\ \forall f \in \mathcal{R}$

$$\|\mathcal{F}_N f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

(b) Aus Lemma 7.69 und Kor. 7.70 folgt

$$\lim_{N\to\infty} \|f-\mathcal{F}_N f\|_2 = 0 \iff \begin{cases} \text{In Bessel-Ungleichung gilt} \\ \text{Gleichheit (Parseval-Glg.)} \end{cases}$$

7.72. Korollar (Riemannsches Lemma - Verschärfung von Satz 6.23)
dort $f \in C^1$

Sei $f \in \mathcal{R}$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx}\, dx = 0$$

Beweis. Kor. 7.70 $\Rightarrow \langle \mathcal{E}_k, f\rangle \xrightarrow{k\to\infty} 0$ ☒

7.73. Lemma Für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\sigma_N(x) := \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \begin{cases} \dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ N+\frac{1}{2}, & x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Es gilt $\sigma_N \in C(\mathbb{R})$, gerade, 2π-period. und

$$\int_0^\pi \sigma_N(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis:

- $\sigma_N(x) = \frac{1}{2} e^{-iNx} \underbrace{\sum_{n=0}^{2N} e^{inx}}_{\frac{e^{i(2N+1)}-1}{e^{ix}-1}} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}$

  $x \notin 2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow$
  (2.24(iv))

- Sei $k \in \mathbb{Z}$.

  $$\lim_{x \to 2\pi k} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} (N+\tfrac{1}{2}) \underbrace{\lim_{x\to 2\pi k} \frac{\cos(N+\frac{1}{2})x}{\cos\frac{x}{2}}}_{=1}$$

  – ansonsten Stetigkeit klar, da Nenner $\neq 0$.

- $$\int_0^\pi \sigma_N(x)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\int_0^\pi e^{inx}\,dx}_{\pi\delta_{n0} + (1-\delta_{n0})\frac{1}{in}(e^{in\pi}-1)} = \frac{\pi}{2}$$

  - Null für n gerade
  - Terme für n und $-n$ heben sich weg

$\blacksquare$

7.74. Lemma Sei $f \in PC^1 \cap C(\mathbb{R})$. Seien c_k', $k \in \mathbb{Z}$, die Fourier-Koeffz. von f'. Dann gilt

$$c_k' = ik\, c_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Mit der Notation von Def. 7.61:

$$c_k' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} \underbrace{\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j'(x) e^{-ikx}\,dx}_{\overset{PI}{=}\ \varphi_j(x)e^{-ikx}\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} + ik\int_{x_{j-1}}^{x_j}\varphi_j(x)e^{-ikx}\,dx}$$

f stetig
$\varphi_j(x_j) = \varphi_{j+1}(x_j)$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\underbrace{\varphi_N(2\pi)}_{f(2\pi)}\underbrace{e^{-ik2\pi}}_{1} - \underbrace{\varphi_1(0)}_{f(0)}\Big) + ik\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx}_{c_k}$$

f stetig u. 2π-per.

$\underbrace{\qquad\qquad}_{0}$ f 2π-period.

∎

Beweis von Satz 7.65.

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$

- $$(\mathcal{F}_N f)(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iky}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\underbrace{\sigma_N(x-y)}_{\sigma_N(y-x)}\,dy$$

$$(t := y-x) \quad = \frac{1}{\pi}\int_{-x}^{2\pi-x} f\underbrace{(t+x)\sigma_N(t)}_{2\pi\text{-period.}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\sigma_N(t)\,dt$$

- $$f_{am}(x) \overset{\text{Lemma 7.73}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{f_+(x)}_{:=\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} f(x+\varepsilon)} \sigma_N(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \underbrace{f_-(x)}_{:=\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} f(x-\varepsilon)} \sigma_N(t)\,dt$$

$$\Rightarrow (\mathcal{F}_N f)(x) - f_{am}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)\,\sin\left[\left(N+\tfrac{1}{2}\right)t\right] dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{g_x(t)\,e^{it/2}}_{=:\,\tilde g_x(t)}\, e^{iNt}\,dt\Big) \qquad (*)$$

mit

$$g_x(t) := \begin{cases} \dfrac{f(x+t)-f_+(x)}{2\sin(t/2)}, & t \in \,]0,\pi[\, + 2\pi\mathbb{Z} \\ 0, & t \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{f(x+t)-f_-(x)}{2\sin(t/2)}, & t \in \,]-\pi,0[\, + 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Es gilt:

(i) g_x beschränkt auf $[-\pi,\pi]$ ($\Rightarrow$ auf $\mathbb{R}$, da $f\in\mathcal{R}$)
(Beweis: Siehe unten!).

(ii) g_x höchstens auf Nullmenge $\mathcal{N}\cup\pi\mathbb{Z}$ unstetig
(da $f\in\mathcal{R} \Rightarrow$ höchstens auf Nullmenge $\mathcal{N}$ unstetig).

$\Rightarrow$ (i) $\wedge$ (ii) gilt auch für $\tilde g_x$. Da $\tilde g_x$ 2π-period. $\Rightarrow \tilde g_x \in \mathcal{R}$

$\Rightarrow$ aus $(*)$ und Kor. 7.72 (Riemann-Lemma) : $\lim\limits_{N\to\infty}\left[(\mathcal{F}_N f)(x) - f_{am}(x)\right] = 0$ ✓

(b) (i) $\forall\, 0 \neq k\in\mathbb{Z}$: $|c_k| = \frac{1}{|k|}|kc_k| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + k^2|c_k|^2\right)$

Binom-Ungl. für $a,b\in\mathbb{R}$: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

(ii) Besselsche-Ungleichung (Kor. 7.70):

$f\in PC^1 \Rightarrow f'\in\mathcal{R} \Rightarrow \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k'|^2 < \infty$
Fourier-Koeffz. von f'

(iii) $f\in C(\mathbb{R})\cap PC^1$ u. Lem. 7.74

$\Rightarrow c_k' = ik\,c_k$

also: $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |c_k e^{ikx}| = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| \overset{(i)}{\leq} |c_0| + \frac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\Big(\frac{1}{k^2} + \underbrace{k^2|c_k|^2}_{|c_k'|^2 \ (iii)}\Big) \overset{(ii)}{<} \infty$

$\Rightarrow$ Beh. mit Kgz.kriterium von Weierstraß,
Satz 4.22. ✓

Beschränktheit von g_x auf $[-\pi,\pi]$:

Es ist nur Umgebung von $t=0$ zu untersuchen; Rest klar, da f beschränkt ($f\in\mathcal{R}$)

Sei $x\in\mathbb{R}$ bel.

Da $$\frac{f(x+t)-f_\pm(x)}{2\sin t/2} = \frac{f(x+t)-f_\pm(x)}{t}\cdot\underbrace{\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}}_{\xrightarrow{t\to 0} 1}$$

ist nur 1. Faktor für $t\to 0$ zu analysieren.

1. Fall: $t>0$ o.E sei $x\in[0,2\pi[$ (da f 2π-period.)

$f\in PC^1$; mit Notation von Def. 7.61 $\exists j: x\in[x_{j-1},x_j[$

und $f\big|_{]x_{j-1},x_j[} = \varphi_j\big|_{]x_{j-1},x_j[}$ wobei $\varphi_j\in C^1([x_{j-1},x_j])$

$\Rightarrow f_+(x)=\varphi_j(x)$, $f(x+t)=\varphi_j(x+t)$ $\forall t>0$ hinreich. klein

$$\Rightarrow \lim_{t\searrow 0}\frac{f(x+t)-f_+(x)}{t} = \varphi'_{j,+}(x) \quad (=\varphi_j'(x)\ \forall x\in]x_{j-1},x_j[)$$

2. Fall: $t<0$: Analog: o.E. sei $x\in]0,2\pi]$

$\exists j: x\in]x_{j-1},x_j]$ und $f\big|_{]x_{j-1},x_j[} = \varphi_j\big|_{]x_{j-1},x_j[}$ mit $\varphi_j\in C^1([x_{j-1},x_j])$

$\Rightarrow f_-(x)=\varphi_j(x)$, $f(x+t)=\varphi_j(x+t)$ $\forall t\leq 0$ hinreichend nahe bei 0

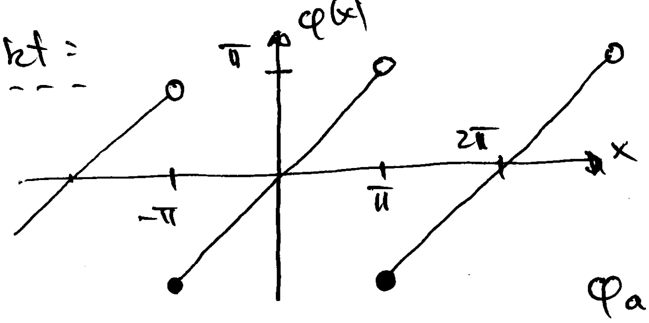
$$\Rightarrow \lim_{t\nearrow 0}\frac{f(x+t)-f_-(x)}{t} = \varphi'_{j,-}(x)$$

$$(=\varphi_j'(x)\ \forall x\in]x_{j-1},x_j[)$$

□

(c) (vom Satz 7.65)

Hilfsfkt:



φ 2π - period.

$\varphi\big|_{[-\pi,\pi[} = id$

$\varphi_{am}(l\pi) = 0, \; l \in \mathbb{Z}$

Es gilt, $\forall x \in \mathbb{R}$:
(Übung!)
$$\varphi_{am}(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$$

Beh.: $\forall\, 0 < r < \pi$ gilt: $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$ glm. kgt. für $x \in [-r, r]$

(Beweis unten)

$\Rightarrow \forall \tau \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\varphi_\tau := 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin[k(\cdot - \tau)] \in PC^1$
  (d.h. $\varphi_\tau(x) = \varphi_{am}(x - \tau) \; \forall x$)
- stetig bis auf $\tau + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$ ungerade, dort Sprung um -2π

Sei $f \in PC^1$ mit Sprungstellen bei $\tau_1, \dots, \tau_m \in [-\pi, \pi[$ und Sprüngen $\Delta_j := f_+(\tau_j) - f_-(\tau_j)$

$$\Rightarrow g := f_{am} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_j}{2\pi} \varphi_{\tau_j, am}(\cdot + \pi)} \in \underline{\underline{C(\mathbb{R})}} \cap PC^1$$

(b) $\Downarrow$ Fourier-Reihe kgt. glm.

$\Downarrow$ Beh. (oben) Fourier-Reihe kgt. glm. weg von τ_j's

$\Rightarrow$ Fourier-Reihe von f_{am} kgt. glm. weg von τ_j's. ✓

Beweis der Beh.:

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \quad \text{für } |x| \le r, \; 0 < r < \pi, \; n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow \forall n, m \in \mathbb{N}$.

$$2\left|S_{n+m}(x)-S_n(x)\right| \cdot \cos\frac{x}{2} = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underbrace{2\sin(kx)\cos\frac{x}{2}}_{\sin\left[(k+\frac{1}{2})x\right]+\sin\left[(k-\frac{1}{2})x\right]}\right|$$

$$= \left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\sin\left[(n+\tfrac{1}{2})x\right] + \frac{(-1)^{n+m+1}}{n+m}\sin\left[(n+m+\tfrac{1}{2})x\right] + \sum_{k=n+1}^{n+m-1}(-1)^{k+1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)}_{\frac{1}{k(k+1)}}\sin\left[(k+\tfrac{1}{2})x\right]\right|$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[-r,r]}\left|S_{n+m}(x)-S_n(x)\right| \le \frac{1}{\cos\frac{r}{2}}\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+m}+\sum_{k=n+1}^{n+m-1}\frac{1}{k^2}\right)}_{\xrightarrow{m\to\infty}\ \underbrace{\frac{1}{n+1}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}}$$ ∎

Nun noch Vorbereitungen für Beweis von Satz 7.67.:

7.75. Lemma Sei $f \in \mathcal{R}$ und $\varepsilon > 0$.
Dann $\exists g \in C([0,2\pi]) \cap PC^1$ mit $\|g\|_\infty \le \|f\|_\infty$
und $\|f-g\|_2 < \varepsilon$.

Beweis O.E. sei f reellwertig
[Sonst zerlege in $Re(f)$ und $Im(f)$].

Sei $\varepsilon > 0$.

1. Akt: Wir konstruieren g mit $\int_0^{2\pi} |f(x)-g(x)|\,dx < \varepsilon$.

Satz 6.7. $\Rightarrow \exists$ Unterteilung $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\pi$ mit Stützstellen $\xi_j^{\pm} \in [x_{j-1}, x_j]$ def. durch $f(\xi_j^{\pm}) = \max\limits_{\min} \, f(x)$, $x \in [x_{j-1}, x_j]$ $=: m_j^{\pm}$

so dass
$$0 \le \sum_{j=1}^{n} (m_j^+ - m_j^-)(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon$$

Für $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$, sei

$$g(x) := \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} f(x_{j-1}) + \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} f(x_j)$$

d.h. g stückweise linear mit $g(x_j) = f(x_j)$ $\forall j = 0, \ldots, n$

$$m_j^- \le f(x) \le m_j^+ \qquad \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$$
$$m_j^- \le g(x) \le m_j^+$$

$\Rightarrow$ • $|f(x) - g(x)| \le m_j^+ - m_j^-$ $\forall x \in [x_{j-1}, x_j]$

• $|m_j^{\pm}| \le \|f\|_\infty$ $\forall j$ $\Rightarrow$ $\|g\|_\infty \le \|f\|_\infty$

und
$$\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\le m_j^+ - m_j^-}\,dx$$
$$\le \sum_{j=1}^{n} (m_j^+ - m_j^-)(x_j - x_{j-1})$$
$$< \varepsilon.$$

2. Art $\|f-g\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(x)-g(x)|}_{\leq |f(x)-g(x)|\,(\underbrace{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty}_{\leq 2\|f\|_\infty})}{}^2\,dx \overset{1. \text{ Art}}{\leq} 2\|f\|_\infty\,\varepsilon$ ☒

Beweis von Satz 7.67.

Sei $f \in \mathcal{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Sei g wie in Lemma 7.75.

$$\Rightarrow \|f - \mathcal{F}_N f\|_2 \leq \underbrace{\|f-g\|_2}_{<\varepsilon} + \|g - \mathcal{F}_N g\|_2 + \|\underbrace{\mathcal{F}_N g - \mathcal{F}_N f}_{\mathcal{F}_N(g-f)}\|_2$$

$$\underbrace{\qquad}_{\substack{\text{Bessel-Ungl.} \\ (\text{Bem. 7.71-(a)})}} \leq \|g-f\|_2$$

$$< 2\varepsilon + \|g - \mathcal{F}_N g\|_2$$

$g \in C(\mathbb{R}) \cap PC^1 \overset{\text{Satz 7.65(b)}}{\Longrightarrow} \mathcal{F}_N g \xrightarrow{N\to\infty} g$ gleichmässig

$\overset{\text{Bem. 7.68(a)}}{\Longrightarrow}$ auch im quadr. Mittel

$$\rightarrow \limsup_{N\to\infty} \|f - \mathcal{F}_N f\|_2 \leq 2\varepsilon;$$

da $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow$ Beh. ☒