7.4. Kompaktheit

$\boxed{\text{7.38. Definition}}$ Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$

- Sei Λ eine (Index-) Menge, $\forall \lambda \in \Lambda$ sei $U_\lambda \subseteq X$ offen

$(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ offene Überdeckung von A $:\Leftrightarrow$ $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

- A kompakt $:\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \forall \text{ offene Überdeck. } (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ von } A \text{ gilt:} \\ \exists \text{ endliche Teilüberdeckung, d.h. } \exists N \in \mathbb{N} \\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda : \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j} \end{array} \right.$

(auch: Heine-Borel-Eigenschaft)

- A folgenkompakt $:\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \forall \text{ Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \text{ gilt:} \\ \exists \text{ Teilfolge } (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}},\ \exists x \in A : \\ \qquad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \end{array} \right.$

(auch: Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft).

7.39. Beispiel (a) X metr. Raum und $(x_n)_n \subset X$ kgt. gegen $x \in X$. Dann ist die Menge $A := \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

(i) folgenkpt.

(ii) kpt.

zu (i): Sei $(y_n)_n$ Folge in A, setze $Y := \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$

1. Fall: Y endliche Menge $\Rightarrow (y_n)_n$ besitzt konstante Teilfolge $\Rightarrow$ kgt. ✓

2. Fall: Y unendliche Menge.

NB: $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow \forall l \in \mathbb{N}$ ist $A \setminus B_{1/l}(x)$ endliche Menge

Da $Y \subseteq A$ und $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ gilt: $\forall l \in \mathbb{N}$: $B_{1/l}(x) \cap Y$ unendl. Menge

$\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$: $y_{n_1} \in B_{1/1}(x) \Rightarrow y_{n_l} \xrightarrow{l\to\infty} x$, also kgt. ✓

zu (ii): Sei $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ bel. offene Überdeck. von A.

$\Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda : x \in U_{\lambda_0} \leftarrow$ Umgebung von x

Da $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : x_n \in U_{\lambda_0}$

Zudem $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1} \in \Lambda : x_j \in U_{\lambda_j}\ \forall j \in \{1, \dots, N-1\}$

$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{j=0}^{N-1} U_{\lambda_j}$ endl. Teilüberdeckung ✓.

Bem: $\tilde{A} := A \setminus \{x\}$ i.a. weder kpt. noch folgenkpt.!

(b) $A = \emptyset$ kpt. und folgenkpt (da nichts zu überprüfen).

7.40 Satz Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt:

$$A \text{ kompakt} \Leftrightarrow A \text{ folgenkompakt.}$$

7.41 Bemerkung

(a) Wegen Satz 7.40 keine Unterscheidung kpt./folgenkpt. in metr. Räumen nötig. (In allg. Räumen schon!)

(b) "$\Rightarrow$" heißt Satz von Bolzano-Weierstraß

(c) Wir zeigen "$\Leftarrow$" erst am Ende der Vorlesung, da aufwändiger und verwenden es bis dahin auch nicht. Siehe aber Spezialfall in Satz 7.42!

Beweis von "$\Rightarrow$" in Satz 7.40

per Widerspruch: Sei A kpt., aber es gebe eine Folge $(x_n)_n \subseteq A$ ohne kgt.'e TF in A (ins.bes. $\Rightarrow \#\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty$)

Beh.: $\forall x \in A : \exists$ offene Umgebung U_x von x mit $x_n \in U_x$ für höchstens endl. viele $n \in \mathbb{N}$.

[In der Tat: Ann: $\exists x \in A$: $\forall l \in \mathbb{N}$ gilt: $\exists$ ∞-viele
$n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_{1/l}(x)$; wähle ein solches
x_n, und nenne es x_{n_l} $\Rightarrow$ $x_{n_l} \xrightarrow{l\to\infty} x$ ↯]

Nun gilt $A \subseteq \bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_x$ (da $x \in \mathcal{U}_x$ $\forall x \in A$!)

A kpt.
$\Rightarrow$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\exists x^{(1)}, \ldots, x^{(N)} \in A$: $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{U}_{x^{(j)}}$

$\Rightarrow$ A enthält nur endlich viele Glieder von $(x_n)_n$ ↯ ☒

In speziellen Fällen gilt mehr (und manches leichter!)

7.42 Satz Sei $X = \mathbb{K}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, und $A \subseteq X$. Dann sind äquiv.

(i) A abgeschlossen und beschränkt
(ii) A kpt.
(iii) A folgenkpt.

} Satz von Heine-Borel

7.43 Bemerkung

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" [bzw. „(i) $\Rightarrow$ (iii)"] ist Besonderheit von $\mathbb{K}^\nu$ mit Euklidischer (oder dazu äquivalenter) Norm.

7.44. Korollar Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}^\nu$ beschränkt

$\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt konvergente Teilfolge.

Zunächst 2 allg. Sätze, die für den Bew. von 7.42 nützlich!

7.45 Satz Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt:

A (folgen-) kompakt $\Rightarrow$ A abgeschl. und beschränkt.

Beweis: Da (Satz 7.40) kpt. $\Rightarrow$ folgenkpt., genügt es den Satz für A folgenkpt. zu zeigen

Gemäß Satz 6.27 genügt es zu zeigen:

Wenn: Folge $(x_n)_n \subseteq A$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in \underline{X}$, dann: $x \in \underline{A}$.

Also: n.V. $\exists$ TF $(x_{n_k})_k \subseteq (x_n)_n$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \tilde{x} \in A$.

Teilfolge einer kgt.'en Folge selben Limes wie Folge(!) $\Rightarrow$ $x = \tilde{x} \in A$ ✓

• Ann.: A unbeschränkt ($\operatorname{diam}(A) = +\infty$)

$\Rightarrow \forall z \in A: \sup\limits_{x\in A} d(z,x) = \infty$ (*)

(denn sonst: $\operatorname{diam}(A) = \sup\limits_{x,y\in A} \underbrace{d(x,y)}_{\leq d(x,z)+d(z,y)} \leq 2 \sup\limits_{x\in A} d(z,x) < \infty$)

(*) $\Rightarrow$ $\exists$ Folge $(x_n)_n \subseteq A$ mit $d(z,x_n) > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ jede Teilfolge von $(x_n)_n$ unbeschränkt $\Rightarrow$ nicht kgt.!

also $\lightning$ folgenkpt. ∎

$\boxed{\text{7.46 Satz}}$ Sei X metr. Raum, $K \subseteq X$ kpt. und $A \subseteq K$ abgeschlossen. Dann ist A kpt.

Beweis: Sei $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ off. Überdeckung an A

$$\Rightarrow \underbrace{(X \setminus A)}_{\text{n.V. offen!}} \cup \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) = X \supseteq K \Rightarrow \text{off. Üb. von } K$$

$\overset{K \text{ kpt.}}{\Longrightarrow} \exists \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda: (X\setminus A) \cup U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_N} \supseteq K$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{N} U_{\lambda_j} \supseteq A$, also A kpt. ∎

7.47. Lemma Für $j = 1, \ldots, \nu$ seien $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ mit $a_j \leq b_j$.
Dann gilt: der abgeschlossene Quader

$$Q := \bigtimes_{j=1}^{\nu} [a_j, b_j] = \{x \in \mathbb{R}^\nu : a_j \leq x_j \leq b_j \ \forall j = 1, \ldots, \nu\}$$

ist kompakt.

7.48 Bemerkung Lemma gilt analog in $\mathbb{C}^\nu$:

Identifiziere $x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{C}^\nu$ mit

$$\eta(x) := (\operatorname{Re} x_1, \operatorname{Im} x_1, \ldots, \operatorname{Re} x_\nu, \operatorname{Im} x_\nu) \in \mathbb{R}^{2\nu}$$

(i) Da $\underset{\text{in } \mathbb{C}^\nu}{\|x\|_2} = \underset{\text{in } \mathbb{R}^{2\nu}}{\|\eta(x)\|_2}$, bleiben alle metrischen Eigenschaften von $\mathbb{C}^\nu$ unter η erhalten

(Jargon: $\mathbb{C}^\nu$ und $\mathbb{R}^{2\nu}$ sind isometrische isomorphe!)

(ii) Setze: Q abgesch. Quader in $\mathbb{C}^\nu :\Leftrightarrow \exists$ abgesch. Quader $\tilde{Q} \subseteq \mathbb{R}^{2\nu}$: $Q = \eta^{-1}(\tilde{Q})$

Sei also $Q = \eta^{-1}(\tilde{Q})$ abgesch. Quader in $\mathbb{C}^\nu$ und $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supseteq Q$ offene Überdeckung $\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \eta(U_\lambda) \supseteq \tilde{Q}$ ist offene Überdeckung

(z.B. da $\eta^{-1} : \mathbb{R}^{2\nu} \to \mathbb{C}^\nu$ stetig)

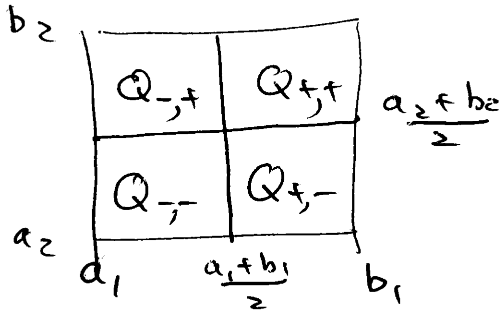
Da $\tilde{Q}$ kpt. nach Lemma 7.47

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \Lambda : \tilde{Q} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \eta(U_{\lambda_j})$$

$$\Rightarrow Q \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j} \Rightarrow \text{kpt.} \checkmark$$

Beweis von Lemma 7.47

$\nu = 2$



Teile Q in 2^ν Quader mit halben Seitenlängen:

$$I_{j+} := \left[\frac{a_j+b_j}{2}, b_j\right]$$

$$I_{j-} := \left[a_j, \frac{a_j+b_j}{2}\right]$$

$$Q = \bigcup_{\substack{\sigma_1=+,-,\\ \dots,\sigma_\nu=+,-}} \underbrace{Q_{\sigma_1,\dots,\sigma_\nu}}_{:= \bigtimes_{j=1}^{\nu} I_{j,\sigma_j}}$$

Ann.: Q nicht kpt. $\Rightarrow \exists$ offene Überdeckung $(\mathcal{U}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Q ohne endl. Teilüberdeckung

$\Rightarrow \exists \tilde{\sigma}_j \in \{+,-\}$: $Q^{(1)} := Q_{\tilde{\sigma}_1,\dots,\tilde{\sigma}_\nu}$ wird nicht von endlich vielen $\mathcal{U}_\lambda$'s überdeckt.

$\Rightarrow$ Teile $Q^{(1)}$ in 2^ν Quader ....

Induktiv folgt: $\exists$ Folge $(Q^{(n)})_n$ von Quadern mit

(o) $Q^{(n+1)} \subseteq Q^{(n)} \quad \forall n$

(i) $\operatorname{diam}(Q^{(n)}) = 2^{-n} \operatorname{diam}(Q) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(ii) $Q^{(n)}$ abgeschlossen $\forall n$

(iii) $\forall n$ gilt: $Q^{(n)}$ wird nicht von endlich vielen der $\mathcal{U}_\lambda$'s überdeckt.

$(o) \wedge (i) \wedge (ii) \overset{\text{Satz 7.28}}{\Longrightarrow} \exists!\, x \in \mathbb{R}^\nu$ mit $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q^{(n)}$

$(\wedge\ Q^{(n)} \neq \emptyset)$

$\Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda : \mathcal{U}_{\lambda_0} \ni x \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : x \in B_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{U}_{\lambda_0}$

Sei $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\operatorname{diam}(Q^{(m)}) < \varepsilon$

$x \in Q^{(m)}$

$\Rightarrow Q^{(m)} \subset B_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{U}_{\lambda_0}$ ↯ zu (iii) ■

Beweis von Satz 7.42

(ii) $\Rightarrow$ (iii) gemäß Satz 7.40 } gilt allg. in metr. R.
(iii) $\Rightarrow$ (i) " " 7.45 }

(i) $\Rightarrow$ (ii) A beschränkt $\overset{\text{Lemma 7.47}}{\underset{\text{+ Bem.}}{\Rightarrow}}$ $\exists$ kpt'er Quader Q mit $A \subseteq Q$

Da A abgeschl. $\overset{\text{Satz 7.46}}{\Rightarrow}$ A kpt. ∎

Zum Abschluss noch Sätze über stetige Abbildungen auf Kompakten:

7.49. Satz Seien X, Y metr. Räume, $f: X \to Y$ stetig und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist $f(K)$ $(\subseteq Y)$ kompakt.

Beweis: Sei $(\mathcal{U}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ bel. offene Überdeckung von $f(K)$ in Y $\overset{\text{Satz 7.37}}{\Rightarrow}$ $V_\lambda := f^{-1}(\mathcal{U}_\lambda)$ offen in X $\forall \lambda \in \Lambda$

$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \overset{K \text{ kpt.}}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda$:
$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^N V_{\lambda_j}$$

$$\Rightarrow f(K) \subseteq f\Big(\bigcup_{j=1}^N V_{\lambda_j}\Big) = \bigcup_{j=1}^N \underbrace{f(V_{\lambda_j})}_{\subseteq \mathcal{U}_{\lambda_j}} \Rightarrow \text{Beh.}$$ ∎

7.50 Satz Sei X kpt'er metr. Raum und $f: X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h. $\exists x_+, x_- \in X$:

$$f(x_\pm) = \begin{matrix}\sup \\ \inf\end{matrix} \{f(x) : x \in X\}.$$

Beweis: Satz 7.49 $\Rightarrow f(X)$ kpt. $\overset{\text{Satz 7.42}}{\Longrightarrow}$ beschränkt (& abgesch.)

$\overset{\text{Ann 1}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Folge $(y_n)_n \subseteq f(X)$ mit $y_n \xrightarrow{n\to\infty} S := \sup f(X) < \infty$
$(f(K) \subseteq \mathbb{R})$

$\overset{f(X) \text{ abgesch.}}{\Longrightarrow}$ $S \in f(X) \Rightarrow S = f(x_+)$ für ein $x_+ \in X$.

analog für inf und x_- ∎

$\boxed{7.51. \text{ Definition}}$ Seien (X, d), $(Y, \tilde{d})$ metr. Räume.

$f: X \to Y$ gleichmäßig stetig $:\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{=\delta_\varepsilon}{\delta} > 0: \forall x, x' \in X: \\ d(x, x') < \delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(x')) < \varepsilon \end{cases}$

$\boxed{7.52. \text{ Satz}}$ Seien (X, d), $(Y, \tilde{d})$ metr. Räume, X kompakt.
und $f: X \to Y$. Dann gilt:

$$f \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ gleichmäßig stetig}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ bel.

f stetig $\Rightarrow \forall x \in X \ \exists \overset{=\delta_{\varepsilon,x}}{\delta_x} > 0 \ \forall x' \in X$:
$d(x, x') < \delta_x \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2}$ (*)

Da $X = \bigcup_{x \in X} B_{\frac{\delta_x}{2}}(x) \overset{X \text{ kpt}}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \ \exists x_1, \ldots, x_N \in X$:

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} B_{\frac{\delta_{x_j}}{2}}(x_j) \quad (**)$$

Definiere: $\delta := \min_{j=1,\ldots,N} \frac{\delta_{x_j}}{2} > 0$.

Seien $x, x' \in X$ bel. mit $d(x, x') < \delta$.

$\overset{(**)}{\Longrightarrow} \exists l \in \{1, \ldots, N\}: x \in B_{\frac{\delta_{x_l}}{2}}(x_l)$

also $d(x_l, x) < \frac{\delta_{x_l}}{2} < \delta_{x_l}$ und $d(x_l, x') \leq \underbrace{d(x_l, x)}_{< \frac{\delta_{x_l}}{2}} + \underbrace{d(x, x')}_{< \delta}$

$< \delta_{x_l}$

$$\Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(x')) \leq \underbrace{\tilde{d}(f(x), f(x_\ell))}_{(*) < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\tilde{d}(f(x_\ell), f(x'))}_{(*) < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \boxtimes$$

setze dort $x' = x_\ell$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ setze dort $x = x_\ell$