7.3. Folgen, Limiten, Stetigkeit

7.23 Definition Sei (X, d) metr. Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge, $x \in X$.

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. gegen x
in Zeichen: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$
bzw. $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

$:\Leftrightarrow \left\{ \forall\, \mathcal{U}, \text{ Umgebung von } x \ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: x_n \in \mathcal{U} \right.$

(b) $(x_n)_n$ Cauchy-Folge $:\Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N\ d(x_n, x_m) < \varepsilon \right.$

(c) X vollständig $:\Leftrightarrow$ jede Cauchy-Folge in X kgt.

7.24. Bemerkung

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \underbrace{x_n \in B_\varepsilon(x)}_{\Leftrightarrow\, d(x_n, x) < \varepsilon}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$

"$\Rightarrow$" Bem. 7.13(b); "$\Leftarrow$" per def. 7.12(b) von $\mathcal{U}$.

(b) $(x_n)_n$ kgt. $\Rightarrow (x_n)_n$ Cauchy-Folge

Bew: Übung

(c) Im Fall $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit Norm $|\cdot|$ ist Def. 7.23 im Einklang mit den Begriffsbildungen aus Analysis I!

Spezialfall $(\mathbb{K}^\nu, \|\cdot\|_p)$ wird auf Körper $\mathbb{K}$ zurückgeführt.

$\boxed{\text{7.25 Satz}}$ Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, versehen mit der p-Norm für $1 \le p \le \infty$. Dann gilt:

(a) Mit $x_n := (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(\nu)})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $x := (x^{(1)}, \dots, x^{(\nu)}) \in \mathbb{K}^\nu$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall j = 1, \dots, \nu : \lim_{n\to\infty} x_n^{(j)} = x^{(j)}$$

Also: Kgz. $\iff$ komponentenweise Kgz.

(b) $\mathbb{K}^\nu$ ist vollständig (mit p-Norm!) (vollst. norm. Raum =: Banach-Raum)

Beweis: Beachte: $\forall j = 1, \dots, \nu, \forall y \in \mathbb{K}^\nu : |y^{(j)}| \le \|y\|_p$ $(*)$

(a) "$\Rightarrow$" $\overset{(*)}{\Rightarrow} 0 \le |x_n^{(j)} - x^{(j)}| \le \|x_n - x\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\Rightarrow x_n^{(j)} - x^{(j)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ in } \mathbb{K}.$$

"$\Leftarrow$" Sei $\lim_{n\to\infty} x_n^{(j)} = x^{(j)}$ $\forall j = 1, \dots, \nu$, sei $\varepsilon > 0$ bel.

$$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, \nu\ \exists N_{j,\varepsilon} \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N_{j,\varepsilon}$$
$$|x_n^{(j)} - x^{(j)}| < \varepsilon.$$

Sei $N_\varepsilon := \max(N_{1,\varepsilon}, \dots, N_{\nu,\varepsilon})$ $(\in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow \forall n \ge N_\varepsilon : \quad \|x_n - x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{\nu} |x_n^{(j)} - x^{(j)}|^p\right)^{1/p} < \sqrt[p]{\nu}\,\varepsilon & p < \infty \\ \max_{j=1,\dots,\nu} |x_n^{(j)} - x^{(j)}| < \varepsilon & p = \infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p = 0.$$

(b) Aus (*): $(x_n)_n \subseteq \mathbb{K}^\nu$ Cauchy bzgl. $\|\cdot\|_p$

$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, \nu$: $(x_n^{(j)})_n \subseteq \mathbb{K}$ Cauchy (bzgl. $|\cdot|$)

$\mathbb{K}$ vollst.
$\Rightarrow \forall j \in 1, \dots, \nu \; \exists x^{(j)} \in \mathbb{K}$: $\lim_{n\to\infty} x_n^{(j)} = x^{(j)}$.

Somit nach (a): $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, wobei $x := (x^{(1)}, \dots, x^{(\nu)})$ ∎

$\boxed{\text{7.26 Satz}}$ Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt

$$A \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x \in X \\ \qquad \Rightarrow x \in A \end{array} \right.$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow \forall\, U$ Umgebung von x gilt: $\exists x_n$ mit $x_n \in U$ d.h. $U \cap A \neq \emptyset$

$\overset{A^c \text{ offen}}{\Rightarrow} \; x \notin A^c$ also $x \in A$ ✓

"$\Leftarrow$": Sei $x \in A^c$; Beh.: $\exists n \in \mathbb{N}$: $B_{1/n}(x) \subseteq A^c$

(Beh. $\Rightarrow A^c$ offen $\Rightarrow A$ abgeschl. ✓)

Beh. ist wahr, denn andernfalls: $\forall n \in \mathbb{N}$: $B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ wähle $x_n \in B_{1/n}(x) \cap A$ aus

$\Rightarrow (x_n)_n \subset A$ und $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow x \in A$ ↯ ∎

$\boxed{\text{7.27. Definition}}$ Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$

- Durchmessser $\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y\in A} d(x,y)$
- A beschränkt $:\Leftrightarrow \operatorname{diam}(A) < \infty$

7.28. Satz (verallg. Intervallschachtelungsprinzip)

Sei X vollständiger metr. Raum und $A_n \subseteq X$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\forall n \in \mathbb{N}$ gelte:
- $A_n \neq \emptyset$
- A_n abgeschlossen
- $A_{n+1} \subseteq A_n$

dazu:
- $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$

Dann $\exists!\, x \in X$ mit $x \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Existenz: $\forall n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in A_n$

- Da $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$: $\operatorname{diam}(A_n) < \varepsilon$

und da $\forall n, m \geq N$: $x_n, x_m \in A_N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)_n$ Cauchy $\overset{X \text{ vollst}}{\Longrightarrow}$ $\exists x \in X$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

- $\forall N \in \mathbb{N}$ gilt: $(x_n)_{n \geq N} \subseteq A_N \xrightarrow[\text{Satz 7.26}]{A_N \text{ abgeschl.}} x \in A_N$

Eindeutigkeit: Für $x, y \in X$ gelte: $x, y \in A_N$ $\forall N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow d(x,y) \leq \operatorname{diam}(A_N)$ $\forall N \in \mathbb{N} \overset{N \to \infty}{\Longrightarrow} d(x,y) \leq 0$

$\Rightarrow x = y$ ☒

7.29 Definition Seien (X, d), $(Y, \tilde{d})$

metr. Räume, $f: X \to Y$ und $a \in X$

- f folgenstetig in a :$\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_n \subseteq X$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ gilt: bzgl. d

  $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$ bzgl. $\tilde{d}$

- f stetig in a :$\Leftrightarrow$ $\forall$ Umgebungen V von $f(a)$ gilt: $\exists$ Umgebung U von a mit $f(U) \subseteq V$

Übung $\overset{\text{(Metr. R.)}}{\Longleftrightarrow}$ (MR) $\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \overset{=\delta_{\varepsilon,a}}{\delta > 0} : \forall x \in X : \\ d(x,a) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(a)) < \varepsilon \end{array} \right.$

7.30. Satz Unter den Gegebenheiten von Def. 7.29 gilt

$$f \text{ stetig in } a \iff f \text{ folgenstetig in } a$$

Bew: „$\Rightarrow$": Sei $(x_n)_n \subseteq X$ Folge mit $x_n \xrightarrow{n \to \infty} a$

Sei V bel. Umgebung von $f(a) \underset{\text{in } a}{\overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow}} \exists$ Umgeb. U von a mit $f(U) \subseteq V$ (*)

Da $x_n \xrightarrow{n \to \infty} a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : x_n \in U \overset{(*)}{\Rightarrow} f(x_n) \in V$

$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(a)$ ✓

„$\Leftarrow$": (analog Satz 3.8 in Ana 1)

Ann: f nicht stetig in $a \iff \exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 :$
$\exists x \in X$ mit $d(x,a) < \delta$ und $\tilde{d}(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$

$\overset{\delta = \frac{1}{n}}{\iff} \exists \varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in X$ mit $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ und $\tilde{d}(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = a$ und $(f(x_n))_n$ kgt. nicht gegen $f(a)$ ↯ ☒

7.31. Bemerkung

(a) Wegen Satz 7.30 fortan keine Unterscheidung zwischen stetig und folgenstetig in metr. Räumen – wir nennen beides stetig!

(b) In allgemeineren Kontext (topol. Räume) bleiben die Def. von folgenstetig und stetig sinnvoll, nicht aber die Äquivalenz „(MR)".

Konsequenz: „$\Leftarrow$" in Satz 7.30 gilt dort (in top. R.) nicht notwendigerweise!

(c) Def. 7.29 ist im Einklang mit Def. 3.7 für den Spezialfall $X = (D, d)$, $Y = (\mathbb{K}, |\cdot|)$

$D \subset \mathbb{K}^n$ Einschränkung des euklid. Abstands $|\cdot|$ auf D

$\boxed{\text{7.32. Satz}}$ Sei X metr. Raum und $f: X \to \mathbb{K}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)

Da $\underset{\in X}{f(x)} = \underset{\in \mathbb{K}^\nu}{y} = (y_1, \dots, y_\nu) =: (f_1(x), \dots, f_\nu(x)) \quad \forall x \in X$

induziert f Abbildungen $f_j : X \to \mathbb{K}$ für $j = 1, \dots, \nu$

Dann gilt $\forall a \in X$:

$$f \text{ stetig in } a \iff \forall j = 1, \dots, \nu : f_j \text{ stetig in } a$$

Konvention: Wenn nicht anderweitig spezifiziert, versehen wir immer $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit $|\cdot|$ (Absolutbetrag) und $\mathbb{K}^\nu$ mit Euklidischer Norm $\|\cdot\|_2$ (die äquivalent zu $\|\cdot\|_p$, vgl. Übung).

Beweis von Satz 7.32: Folgenkriterium und Satz 7.25 (a) ∎

Ebenso mittels Folgen:

$\boxed{\text{7.33. Satz}}$ Sei X metr. Raum, $f, g : X \to \mathbb{K}$ stetig in $a \in X$

Dann gilt (i) $f+g$ stetig in a (ii) fg stetig in a

(iii) falls $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ stetig in a.

$\boxed{\text{7.34 Korollar}}$ Polynome auf $\mathbb{K}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, sind stetig.

$$\mathbb{K}^\nu \ni \underset{(x_1, \dots, x_\nu)}{x} \overset{P}{\longmapsto} \sum_{A_{N,\nu}} \gamma_{n_1, \dots, n_\nu} x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_\nu^{n_\nu} \in \mathbb{K}, \quad \text{mit } N \in \mathbb{N}_0$$

und $A_{N,\nu} := \{ n = (n_1, \dots, n_\nu) \in \mathbb{N}_0^\nu : n_1 + \dots + n_\nu \leq N \}$,

$(\gamma_{n_1, \dots, n_\nu})_{n \in A_{N,\nu}} \in \mathbb{K}^{A_{N,\nu}}$ (P: Polynom des Grades N)

Beweis: Satz 7.33 und $\begin{array}{l} \mathbb{K}^\nu \to \mathbb{K} \\ x \mapsto x_j \end{array}$ stetig $\forall j \in \{1, \dots, \nu\}$

Übung!

Analog zu Satz 3.16 gilt und beweist man:

$\boxed{\text{7-35 Satz}}$ Seien (X_j, d_j), $j = 1,2,3$, metr. Räume und $a \in X_1$. Sei $f: X_1 \to X_2$ stetig in a und $g: X_2 \to X_3$ stetig in $f(a)$. Dann ist $g \circ f: X_1 \to X_3$ stetig in a.

$\boxed{\text{7-36 Definition}}$ Seien (X, d) und $(Y, \tilde{d})$ metrische Räume und $f: X \to Y$.

f stetig $:\Leftrightarrow$ $\forall a \in X$ gilt: f stetig in a

$\boxed{\text{7-37. Satz}}$ Seien (X, d), $(Y, \tilde{d})$ metr. Räume und $f: X \to Y$

Dann gilt:

$$f \text{ stetig} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall V \subseteq Y,\ V \text{ offen (in } Y) \text{ gilt:} \\ \qquad f^{-1}(V) \text{ offen (in } X) \end{cases}$$

Beweis:

„$\Leftarrow$": Sei $a \in X$ bel. und V Umgebung von $f(a)$

$\Rightarrow \exists \tilde{V} \subseteq V$ mit $\tilde{V}$ offen und $f(a) \in \tilde{V}$

$\overset{\text{n.V.}}{\Rightarrow} U := f^{-1}(\tilde{V})$ offen und $a \in U$,

also U Umgebung von a und $f(U) \subseteq \tilde{V} \subseteq V$. ✓

„$\Rightarrow$": Sei $V \subseteq Y$ offen, sei $a \in f^{-1}(V)$ bel.

$\Rightarrow \exists$ Umgebung $V_{f(a)}$ von $f(a)$ in V

$\overset{\text{n.V.}}{\Rightarrow} \exists U_a$ Umgebung von a mit $f(U_a) \subseteq V_{f(a)}$,

also $U_a \subseteq f^{-1}(V_{f(a)}) \subseteq f^{-1}(V)$

$\Rightarrow f^{-1}(V)$ offen ∎