7.2. Offene und abgeschlossene Mengen

7.12 Definition Sei (X, d) metrischer Raum.

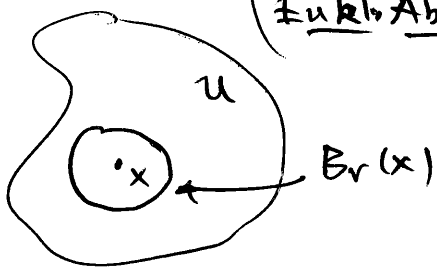
(a) Sei $a \in X$, $r > 0$

$B_r(a) := \{x \in X : d(x,a) < r\}$ — offene Kugel (Ball) um a mit Radius r

(b) Sei $x \in X$ und $U \subseteq X$

U Umgebung von x $:\Leftrightarrow$ $\exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U$

Bild: ($\mathbb{R}^2$ mit Eukl. Abst.)



(c) Sei $A \subseteq X$

A offen (offene Menge) $:\Leftrightarrow$ $\forall x \in A\ \exists$ Umgebung U von x mit $U \subseteq A$

(„A ist Umgebung aller Punkte von A")

7.13. Bemerkungen

(a) $X = \mathbb{R}$ (mit $|\cdot|$ als Norm), seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$\Rightarrow\ ]a,b[$ ist offen, $]a,b]$ ist nicht offen

für $x \in]a,b[$ sei $\varepsilon_x := \min\{x-a, b-x\}$
$\Rightarrow B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq]a,b[$

$\forall r > 0 : B_r(b) \not\subseteq]a,b]$

(b) $\forall x \in X\ \forall r > 0 :$ $B_r(x)$ ist Umgebung von x.

(c) A offen $\Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists r_x > 0: B_{r_x}(x) \subseteq A$

Beweis: "$\Rightarrow$" aus Def. 7.12(b)
"$\Leftarrow$" aus Bem. 7.13(b)

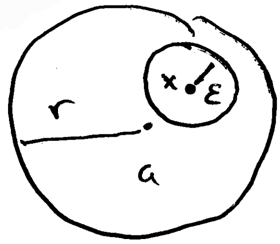
(d) Jede offene Kugel in (X, d) ist offen
(offene Menge)

Bew: Sei $x \in B_r(a)$

$\Rightarrow \varepsilon := r - d(x,a) > 0$, und $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(a)$,

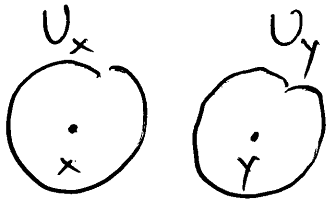
denn: $\forall y \in B_\varepsilon(x)$ gilt: $d(y,a) \leq \underbrace{d(y,x)}_{<\varepsilon} + d(x,a)$

$< \varepsilon + d(x,a) = r.$ ■



$\boxed{7.14\ \text{Satz}}$ (Hausdorffsches Trennungsaxiom)

Sei (X, d) metr. Raum. $\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$.
$\exists$ Umgebungen U_x von x, U_y von y, so dass $U_x \cap U_y = \emptyset$



Beweis: $x \neq y \Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{3} d(x,y) > 0$

Wir zeigen $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$

($\overset{7.13(b)}{\Rightarrow}$ Beh.) Also: Sei $z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$

$\Rightarrow 3\varepsilon = d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(z,y)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$ ↯ ☒

$\boxed{7.15.\ \text{Satz}}$ (Eigenschaften offener Mengen in metr. Raum X)

(a) $\emptyset$ und X sind offen.

(b) $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, offen $\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} A_j$ offen.

(c) Sei $J \neq \emptyset$ Menge und $\forall j \in J$ sei $A_j \subseteq X$ offen

$\Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j$ offen.

<u>also</u>: <u>endliche</u> Schnitte u. <u>bel.</u> Vereinigungen off. Mengen sind offen!

<u>Beweis</u>: (a) X offen, da $\forall x \in X$: X ist Umgebung von x

$\emptyset$ offen, da nichts nachzuprüfen.

(b) Es genügt zu zeigen: $A_1 \cap A_2$ offen.

sei $x \in A_1 \cap A_2$; $A_{1/2}$ offen $\Rightarrow \exists r_{1/2} : B_{r_{1/2}} \subseteq A_{1/2}$

(1 <u>und</u> 2)

Sei $r := \min(r_1, r_2) > 0 \Rightarrow B_r(x) \subseteq A_1 \cap A_2$ ✓

(c) Sei $x \in \bigcup_{j \in J} A_j \overset{\text{per Def.}}{\Longleftrightarrow} \exists j_0 \in J : x \in A_{j_0}$

da A_{j_0} offen $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A_{j_0} \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$ ∎

<u>7.16. Warnung</u>: Selbst ab<u>zähl</u>bare Schnitte offener Mengen sind <u>i.a.</u> nicht offen!

<u>Bsp.</u>: $\forall j \in \mathbb{N}$ sei $A_j := \left]-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right[\Rightarrow \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \{0\}$.

7.17 Definition X metr. Raum.

$$A \subseteq X \text{ \underline{abgeschlossen}} :\Longleftrightarrow \underbrace{X \setminus A}_{= A^c} \text{ offen.}$$

<u>7.18. Bemerkungen</u>

(a) $\emptyset, X$ sowohl offen als auch abgeschlossen.

(b) Sei $A \subseteq X$: $\neg(A \text{ offen}) \not\Rightarrow A$ abgesch.

Bsp.: $[0,1[$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgesch.,

da $\mathbb{R} \setminus [0,1[\; = \;]-\infty,0[\cup [1,\infty[$

nicht offen.

7.19. Definition Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$.

(a) $x \in X$ Randpunkt von A $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall \text{ Umgebung } U \text{ von } x \text{ gilt} \\ U \cap A \neq \emptyset \text{ und } U \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$

$\partial A := \{x \in X : x \text{ ist Randpkt. von } A\}$ Rand von A

(b) $\mathring{A} := A \setminus \partial A$ Inneres von A

(c) $\overline{A} := A \cup \partial A$ Abschluss von A

7.20. Beispiele (a) $X = \mathbb{R}^{\circledast}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $A := [a,b[$

$\Rightarrow \partial A = \{a,b\}$, $\mathring{A} =]a,b[$, $\overline{A} = [a,b]$

(b) $X = \mathbb{R}^{\circledast}$, $A = \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

($^{\circledast}$ versehen mit $|\cdot|$)

7.21. Satz Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt

(a) $\mathring{A}$ ist offen

(b) $\overline{A}$ ist abgeschlossen

(c) ∂A ist abgeschlossen.

Beweis: (a) falls $\mathring{A} = \emptyset$ klar; sei nun also $\mathring{A} \neq \emptyset$ und $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists$ Umgebung U von x mit $U \cap A^c = \emptyset$ (denn sonst $x \in \partial A$). $\Rightarrow U \subseteq A$

O.E., sei U zudem offen (sonst, verkleinere auf offene Teilmenge von U, die x enthält – z.B. $\exists r > 0: B_r(x) \subseteq U$)

$\Rightarrow U \cap \partial A = \emptyset$ (Ann: $\exists y \in U \cap \partial A \overset{U \text{ offen}}{\Longrightarrow} U$ ist auch Umgebung von $y \Rightarrow U \cap A^c \neq \emptyset$ (da $y \in \partial A$) $\lightning$).

$\Rightarrow U \subseteq \mathring{A}$ ✓

(b) per. def gilt stets $\partial A = \partial(A^c)$

und (a) $\Rightarrow \mathring{(A^c)}$ offen

$$\Rightarrow \overline{A} = A \cup \partial A = (X \setminus A^c) \cup \partial(A^c)$$

$$= X \setminus \underbrace{(A^c \setminus \partial(A^c))}_{\mathring{(A^c)}} \Rightarrow \text{abgeschlossen}$$

(c) $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

$$\Rightarrow X \setminus \partial A = \underbrace{(X \setminus \overline{A})}_{\overset{(b)}{\text{offen}}} \cup \underbrace{\mathring{A}}_{\overset{(a)}{\text{offen}}} \quad \text{offen}$$

nach Satz 7.15.(c)

∎

$\boxed{\text{7.22. Satz}}$ Sei X metr. Raum. Dann gilt:

(a) A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $A = \bar{A}$

(b) A ist offen $\Leftrightarrow$ $A = \mathring{A}$

Beweis. (a) "$\Leftarrow$" Satz 7.21 (b)

"$\Rightarrow$" Wir zeigen $\partial A \subseteq A$ (denn $\Rightarrow \bar{A} \subseteq A$; zusammen mit $A \subseteq \bar{A}$ (aus def. !) $\Rightarrow$ Beh.).

Per Widerspruch: Ann: $\exists x \in \partial A$ mit $x \in A^c$

n. V. A^c offen

$\Rightarrow \exists$ Umgebung U von x : $U \subseteq A^c$ $\lightning$ zu $x \in \partial A$ ✓

(b) "$\Leftarrow$" Satz 7.21 (a)

"$\Rightarrow$" Übung! $\blacksquare$