7. Metrische Räume

- bislang: $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ bewertete Körper
  hier: nur Abstandsbegriff (keine Körpereigenschaften)
- ausreichend für Gültigkeit mancher fundamentaler Sätze über stetige Funktionen aus Kap. 3.4
- Vektorräume $\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\nu, \nu \in \mathbb{N}$, als Spezialfälle

7.1. Metriken und Normen

$\boxed{\text{7.1. Definition}}$ Sei X Menge und $d: X \times X \to \mathbb{R}$

$$d \text{ Metrik auf } X \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{(M1)} \ \forall x,y \in X: d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ \text{(M2) Symmetrie} \ \forall x,y \in X: \\ \qquad d(x,y) = d(y,x) \\ \text{(M3) Dreiecks-Ungleichung:} \\ \qquad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \\ \qquad \forall x,y,z \in X \end{cases}$$

(X, d) heißt metrischer Raum

[meist auch nur X, falls klar welches d]

7.2 Bemerkung: Aus den Axiomen der Metrik folgt $\forall x,y \in X$

$$0 \overset{(M1)}{=} d(x,x) \overset{(M3)}{\leq} d(x,y) + d(y,x) \overset{(M2)}{=} 2\, d(x,y)$$

also $\quad d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

(dies wird manchmal auch vorausgesetzt, wäre aber nicht nötig).

7.3. Beispiele (a) $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $d(x,y) := |x-y|$ ← Betrag

Euklidischer Abstand

(b) Für bel. Menge X ist $d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

sog. diskrete Metrik

[(M1), (M2) klar; zu (M3): klar für $x = y$; falls $x \neq y$
$\Rightarrow d(x,y) = 1$ und $d(x,z) + d(z,y) \geq 1$
da $x = z \wedge y = z$ nicht möglich!]

(c) Falls (X,d) metrischer Raum und $A \subseteq X$

$\Rightarrow (A, d|_{A\times A})$ metrischer Raum

Einschränkung von d auf A = induzierte Metrik

Wichtiger Spezialfall:

7.4. Definition Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

$\|\cdot\|$ Norm auf V :$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{(N1)} & \forall x \in V: \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \text{(N2)} & \forall x \in V\ \forall \lambda \in \mathbb{K}: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \\ \text{(N3)} & \forall x,y \in V: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{cases}$

Betrag in $\mathbb{K}$

$(V, \|\cdot\|)$ normierter (Vektor-) Raum

[meist auch nur V, falls klar welches $\|\cdot\|$]

7.5. Lemma Sei $(V, \|\cdot\|)$ norm. Raum. Dann def. $d(x,y) := \|x-y\| \ \forall x,y \in V$ eine Metrik auf V

Beweis: (M1) aus (N1) & Def., (M2) aus (N2) & Def.

$$(M3):\quad d(x,y) = \|\underbrace{x-y}_{x-z+z-y}\| \overset{(N3)}{\leq} \underbrace{\|x-z\|}_{d(x,z)} + \underbrace{\|z-y\|}_{d(z,y)} \quad \blacksquare$$

7.6. Bemerkung (a) Der Absolutbetrag $|\cdot|$ auf $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist eine Norm.

(b) Jede symmetrische, pos. definite Sesquilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf Vektorraum V induziert Norm gemäß

$$V \ni x \longmapsto \|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

7.7. Satz Sei $V=\mathbb{K}^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$, und $p\in[1,\infty]$

(a) Dann def.

$$\mathbb{K}^\nu \ni \underset{(x_1,\dots,x_\nu)}{\overset{\|}{x}} \longmapsto \|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{\nu} |x_j|^p\right)^{1/p}, & p<\infty \\ \max\{|x_1|,\dots,|x_\nu|\}, & p=\infty \end{cases}$$

eine Norm auf $\mathbb{K}^\nu$, die p-Norm.

(b) Sei $\mathbb{K}^\nu\times\mathbb{K}^\nu \ni (x,y) \longmapsto \sum_{j=1}^{\nu} \overline{x}_j y_j =: \langle x,y\rangle =: x\cdot y$

Euklidisches (Standard-)Skalarprodukt und $p,q\in[1,\infty]$

mit $\underbrace{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}$ (Konvention: $\frac{1}{\infty}:=0$).

(Hölder-) konjugierter Exponenten

Dann gilt:

$\forall x, y \in \mathbb{K}^\nu$: $\quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ (Hölder-Ungleich.)

Spezialfall $p = q = 2$: Cauchy-Schwarz-Ungl.

Der Beweis beruht auf

$\boxed{\text{7.8 Satz}}$ Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ 2 mal stetig diff. bar. Dann gilt:

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f \text{ konvex auf } I$$

Erinnerung: $f: I \to \mathbb{R}$ konvex $:\iff \forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad (*)$$

(vgl. Tutorienblatt 13, Aufg 1!)

Beweis "$\Rightarrow$" Sei $x := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, o.E. $x_1 < x_2$ (Fall $x_1 = x_2$ klar; $x_1 > x_2$ analog) also $x_1 < x < x_2$

Mittelwertsatz: $\exists \xi_1 \in]x_1, x[$; $\exists \xi_2 \in]x, x_2[$, so dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{\underbrace{x - x_1}_{(1-\lambda)(x_2 - x_1)}} = f'(\xi_1) \underset{f'' \geq 0 \Rightarrow f' \text{ isoton}}{\leq} f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{\underbrace{x_2 - x}_{\lambda(x_2 - x_1)}}$$

$$\Rightarrow \lambda[f(x) - f(x_1)] \leq (1-\lambda)[f(x_2) - f(x)] \Rightarrow (*)$$

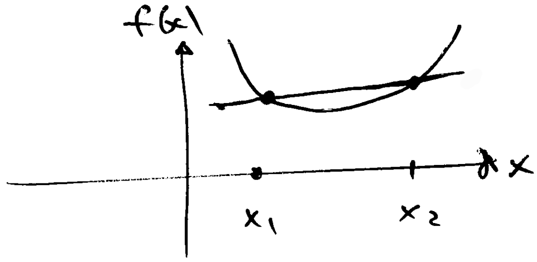
"$\Leftarrow$" ⊛ siehe z.B. Forster, Analysis I, §16, Satz 6

⊛ Wir benötigen im folgenden diese Richtung nicht, deshalb ist nur "$\Rightarrow$" wiedergegeben

7.9. Bemerkung

(a) f **konkav** $:\Leftrightarrow -f$ konvex

(b) geom. Interpretation von konvex: Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ liegt zwischen x_1 und x_2 **über** dem Graphen von f



(c) exp konvex auf $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{7.10. Korollar}}$ (Youngsche Ungleichung)

Seien $a, b \in [0,\infty[$, seien $p, q \in [1,\infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Dann gilt
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beweis: Klar, falls $a = 0 \vee b = 0$. Seien nun $a, b \neq 0$

$$ab = e^{\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)} \underset{\text{exp konvex}}{\leq} \frac{1}{p} e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q} e^{\ln(b^q)} \qquad \blacksquare$$

Beweis von Satz 7.7. (b) $|\langle x, y\rangle| \overset{\Delta\text{'s-Ungl}}{\leq} \sum_{j=1}^{\nu} |x_j y_j|$

1. Fall: $p = \infty$ ($\Rightarrow q = 1$) $\quad \sum_{j=1}^{\nu} |x_j y_j| \leq \left(\max_{k=1,\dots,\nu} |x_k|\right) \sum_{j=1}^{\nu} |y_j|$ ✓

[analog: $q = \infty$ ($\Rightarrow p = 1$)]

2. Fall: $p, q < \infty$. $\quad$ o.E. sei $x \neq 0$ und $y \neq 0$ (sonst klar)

$$\text{für } j = 1,\dots,\nu, \text{ setze } \xi_j := \frac{|x_j|}{\|x\|_p}, \quad \eta_j := \frac{|y_j|}{\|y\|_q}.$$

$$\Rightarrow \frac{|x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \xi_j \eta_j \overset{\text{Young-Ungl.}}{\leq} \frac{\xi_j^p}{p} + \frac{\eta_j^q}{q}$$

$$\sum_j \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{\nu} |x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \text{Beh.} \checkmark$$

(a) (N1), (N2) klar

zu zeigen (N3): $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ (Minkowski-Ungleichung)

1. Fall: $p = \infty$: $\|x+y\|_\infty = \max_{j=1,\dots,\nu} \underbrace{|x_j+y_j|}_{\leq |x_j|+|y_j|} \leq \max_j |x_j| + \max_j |y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \checkmark$

2. Fall: $p = 1$: $\|x+y\|_1 = \sum_{j=1}^{\nu} \underbrace{|x_j+y_j|}_{\leq |x_j|+|y_j|} \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 \checkmark$

3. Fall: $p \in]1;\infty[$: Sei $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} := 1$ und

$z_j := |x_j+y_j|^{p-1}$ für $j = 1,\dots,\nu$, o.E. $x+y \neq 0$ (sonst klar)

da $q(p-1) = qp(1-\frac{1}{p}) = p \Rightarrow z_j^q = |x_j+y_j|^p$

$$\Rightarrow \|z\|_q = \|x+y\|_p^{p/q}$$

Somit

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{j=1}^{\nu} \underbrace{|x_j+y_j| z_j}_{\leq |x_j| z_j + |y_j| z_j} \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|x\|_p \|z\|_q + \|y\|_p \|z\|_q$$

mit $p - \frac{p}{q} = p(1-\frac{1}{q}) = 1 \underset{\|z\|_q \neq 0}{\Rightarrow}$ Beh

$\boxtimes$

7.11. Lemma Sei M Menge und

$$B(M) := \{ f : M \to \mathbb{K} \text{ mit } \underbrace{f \text{ beschränkt}}_{\Leftrightarrow \|f\|_\infty := \sup_{x \in M} |f(x)| < \infty} \}$$

Dann ist $(B(M), \|\cdot\|_\infty)$ norm. Raum.

Beweis: Übung!