# 6. Integrieren von Funktionen auf $\mathbb{R}$

Im ganzen Kapitel: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ; $I := [a, b]$
$f : I \to \mathbb{R}$

## 6.1. Riemann-integrierbare Funktionen

### 6.1. Definition

(a) $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion

$$:\Leftrightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N} \text{ und Unterteilung } a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \\ \text{von } I, \text{ und } \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}, \text{ so dass } \forall j = 1, \dots, n : \varphi|_{]x_{j-1}, x_j[} = c_j \end{cases}$$

(Die Werte $\varphi(x_j)$, $j = 0, \dots, n$ sind nicht vorgeg.).

(b) $\mathcal{T}(I) := \{ \varphi : I \to \mathbb{R} \; : \; \varphi \text{ Treppenfkt} \}$

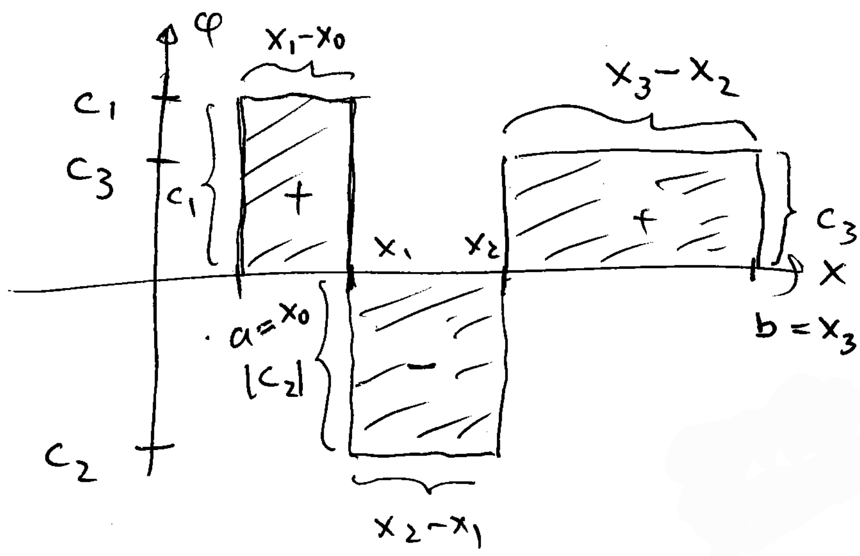
Menge der Treppenfkt.'en auf $I$

(c) Für Treppenfkt $\varphi \in \mathcal{T}(I)$ ist

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx := \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1})$$

(Riemann) Integral von $\varphi$

auch: $\int_a^b dx\, \varphi(x)$ ; $\int_a^b \varphi\, dx$ ; $\int_I \varphi(x)\, dx$ ; $\int_I dx\, \varphi(x)$ etc



## 6.2. Bemerkung

$\int_a^b \varphi(x)\,dx$ ist wohldef., d.h. unabhängig von der gewählten Unterteilung von $\varphi$, denn:

für $x_{j-1} = y_k < y_{k+1} < y_{k+l-1} < y_{k+l} = x_j$ gilt

$$c_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{\kappa=1}^{l} c_j(y_{k+\kappa} - y_{k+\kappa-1})$$

## 6.3 Lemma

(a) $\mathcal{T}(I)$ ist Vektorraum (über $\mathbb{R}$) und $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{T}(I)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x)\,dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx + \mu \int_a^b \psi(x)\,dx$$

Linearität

(b) $\forall \varphi \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi \geq 0$, d.h. $\varphi(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, gilt: $\int_a^b \varphi(x)\,dx \geq 0$

Monotonie

**Beweis** (b) klar, da $c_j \geq 0$ in Darstellung von $\varphi$

(a) • Vektorraum:

- $0 \in \mathcal{T}(I)$ klar
- Sei $\varphi \in \mathcal{T}(I)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\varphi \in \mathcal{T}(I)$, denn $c_j \to \lambda c_j$
- Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}(I)$ mit

$$\varphi|_{]x_{j-1}, x_j[} = c_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\psi|_{]y_{k-1}, y_k[} = d_k, \quad k = 1, \dots, m$$

Definiere eindeutige Unterteilung

$a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{\nu-1} < \xi_\nu = b$, so dass

$\{\xi_\alpha : \alpha = 1,\dots,\nu-1\} = \{x_j : j = 1,\dots,n-1\} \cup \{y_k : k = 1,\dots,m-1\}$

d.h. gröbste Unterteilung, die Unterteilungen von $\varphi$ und $\psi$ enthält ($\Leftrightarrow$: gröbste Verfeinerung)

$$\Rightarrow \quad \varphi\big|_{]\xi_{\alpha-1},\xi_\alpha[} = c_{j(\alpha)}, \quad \psi\big|_{]\xi_{\alpha-1},\xi_\alpha[} = d_{k(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \quad (\varphi+\psi)\big|_{]\xi_{\alpha-1},\xi_\alpha[} = c_{j(\alpha)} + d_{k(\alpha)} =: e_\alpha, \quad \alpha = 1,\dots,\nu.$$

also $\varphi+\psi \in \mathcal{T}(I)$

Linearität: $\int_a^b (\lambda\varphi+\mu\psi)(x) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} (\lambda c_{j(\alpha)} + \mu d_{k(\alpha)})(\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1})$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{\nu} c_{j(\alpha)}(\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1})}_{\overset{\text{wegen } 6.2}{=} \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1})} + \mu \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{\nu} d_{k(\alpha)}(\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1})}_{\overset{\text{wegen } 6.2}{=} \sum_{k=1}^{m} d_k (y_k - y_{k-1})}$$

$$= \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx + \mu \int_a^b \psi(x)\,dx \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{6.4 Definition}}$ Sei $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt ($\exists C>0 : |f(x)| \le C \ \forall x \in I$)

(a) Oberintegral $\mathcal{O}_I(f) := \inf\left\{\int_I \varphi(x)\,dx : \varphi \in \mathcal{T}(I),\ \varphi \ge f\right\}$

Unterintegral $\mathcal{U}_I(f) := \sup\left\{\int_I \psi(x)\,dx : \psi \in \mathcal{T}(I),\ \psi \le f\right\}$

(b) f Riemann-integrierbar (über I) $:\Leftrightarrow$

$$\mathcal{O}_I(f) = \mathcal{U}_I(f) =: \int_I f(x)\,dx$$

Riemann-Integral von f über I

auch: $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_I dx\, f(x)$, $\int_a^b dx\, f(x)$

(c) Sei $f: I \to \mathbb{C}$ beschränkt

- $f$ Riemann-integrierbar $:\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f$ & $\operatorname{Im} f$ Riemann-integrierbar
- $\int_I f(x)\,dx := \int_I (\operatorname{Re} f)(x)\,dx + i \int_I (\operatorname{Im} f)(x)\,dx$

## 6.5 Bemerkung

(i) Falls $m_- \le f \le m_+$ $(m_\pm \in \mathbb{R})$, so ist mit $|I| := b-a$

$$m_- |I| \le \mathcal{U}_I(f) \le \mathcal{O}_I(f) \le m_+ |I|$$

$\varphi = m_-$ zugelassen $\qquad$ $\psi = m_+$ zugelassen

Lemma 6.3(b): $\varphi \le \psi \Rightarrow \int_I \varphi\,dx \le \int_I \psi\,dx$

(ii) $\forall \varphi \in \mathcal{T}(I)$: $\varphi$ ist Riemann-integrierbar mit

$$\int_I \varphi(x)\,dx = \mathcal{O}_I(\varphi) = \mathcal{U}_I(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1})$$

$\varphi|_{]x_{j-1}, x_j[} = c_j$

(iii) $f = 1_{\mathbb{Q}} := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ $\qquad$ nicht (Riemann) integrierbar über $[0,1] =: I$

$\mathcal{O}_I(1_{\mathbb{Q}}) = 1$

inf durch $1_{[0,1]}$ realisiert, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$

$\mathcal{U}_I(1_{\mathbb{Q}}) = 0$

sup durch $0$ realisiert, da $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$

(iv) Name der Integrationsvariablen irrelevant

(so wie Summationsindex!)

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f(t)\,dt = \int_I f(y)\,dy = \ldots$$

**6.6 Definition** Sei $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt

Sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Unterteilung von $I$ und

$\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ „Stützstelle"

- $Z := \left( (x_j)_{j \in \{0,\ldots,n\}}, (\xi_j)_{j \in \{1,\ldots,n\}} \right)$ Zerlegung (= Unterteilung mit Stützstellen)

- $\mu(Z) := \max\limits_{j=1,\ldots,n} (x_j - x_{j-1})$ Feinheit der Zerlegung

- Riemann-Approximante von $f$ zur Zerlegung $Z$:

  Treppenfkt $\varphi_Z \in \mathcal{J}(I)$ mit

  $$\varphi_Z\big|_{]x_{j-1}, x_j[} = f(\xi_j) \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

- Riemann-Summe von $f$ zur Zerlegung $Z$:

  $$R(Z, f) := \int_I \varphi_Z(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

Nächster Satz dient Charakterisierung Riemann-integrierbarer Funktionen:

**6.7 Satz** Sei $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent: (i) $f$ ist Riemann integrierbar

(ii) $\exists\, J \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall$ Zerlegungen $Z$ mit $\mu(Z) < \delta$:

$$|J - R(Z, f)| < \varepsilon$$

symbolische (!) Schreibweise: $\lim\limits_{\mu(Z) \to 0} R(Z, f) = J$

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varphi_\pm \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi_- \le f \le \varphi_+$

und $$\int_I \varphi_+(x)dx - \int_I \varphi_-(x)dx < \varepsilon$$

Trifft eine der Aussagen (i)-(iii) zu, so ist
$$J = \int_I f(x)\,dx.$$

Beweis: (iii) $\Rightarrow$ (i): Da $\forall \varphi_\pm \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi_- \le f \le \varphi_+$:
$$\int_I \varphi_-(x)dx \le \mathcal{U}_I(f) \le \mathcal{O}_I(f) \le \int_I \varphi_+(x)dx \Rightarrow \text{Beh.}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $\varepsilon > 0$ und $a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b$ mit
$$\max_{j=1,\dots,n} (x_j - x_{j-1}) < \delta$$

u.V
$$\Rightarrow \forall j = 1,\dots,n \ \forall \xi_j \in \,]x_{j-1}, x_j[\, : \quad \left| J - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon \quad (*)$$

Sei $$f_j^\pm := \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} \{ f(x) : x \in \,]x_{j-1}, x_j[\, \} \quad (f \text{ beschränkt!})$$

$$\Rightarrow \exists \, (\eta_{j,\nu}^\pm)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \,]x_{j-1}, x_j[\, \text{ mit } \lim_{\nu \to \infty} f(\eta_{j,\nu}^\pm) = f_j^\pm$$

Wähle $\xi_k = \eta_{k,\nu}^\pm$ in $(*)$ $\overset{\nu\to\infty}{\Longrightarrow} \left| J - \sum_{k=1}^n f_k^\pm (x_k - x_{k-1}) \right| \le \varepsilon \quad (**)$

somit gilt für $\varphi_\pm \in \mathcal{T}(I)$,
$$\varphi_\pm \big|_{]x_{k-1}, x_k[} := f_k^\pm, \quad \varphi_\pm(x_k) := f(x_k),$$

dass $\varphi_- \le f \le \varphi_+$ und
$$\int_I \varphi_+(x)dx - \int_I \varphi_-(x)dx \overset{\text{aus } (**)}{\le} 2\varepsilon \quad \checkmark$$

<u>(i) ⟹ (ii)</u>: Sei $\varepsilon > 0$ und $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine gemeinsame Unterteilung von $\varphi_+$ und $\varphi_-$, wobei $\varphi_- \le f \le \varphi_+$ und

$$\left| \int_I \varphi_\pm(x)\,dx - \int_I f(x)\,dx \right| < \varepsilon \qquad (0)$$

Sei $\delta > 0$, so dass

$$2\delta n \left( \sup_{x\in I} |\varphi_+(x)| + \sup_{x \in I} |\varphi_-(x)| \right) < \varepsilon \qquad (1)$$

Sei $Z = \left( (y_k)_{k=0,\dots,m}, (\xi_k)_{k=1,\dots,m} \right)$ bel. Zerlegung mit $\mu(Z) < \delta$

Sei $a = z_0 < z_1 < \dots < z_\nu = b$ gröbste gemeinsame Unterteilung von $(x_j)_j$ und $(y_k)_k$ (gröbste Verfeinerung)

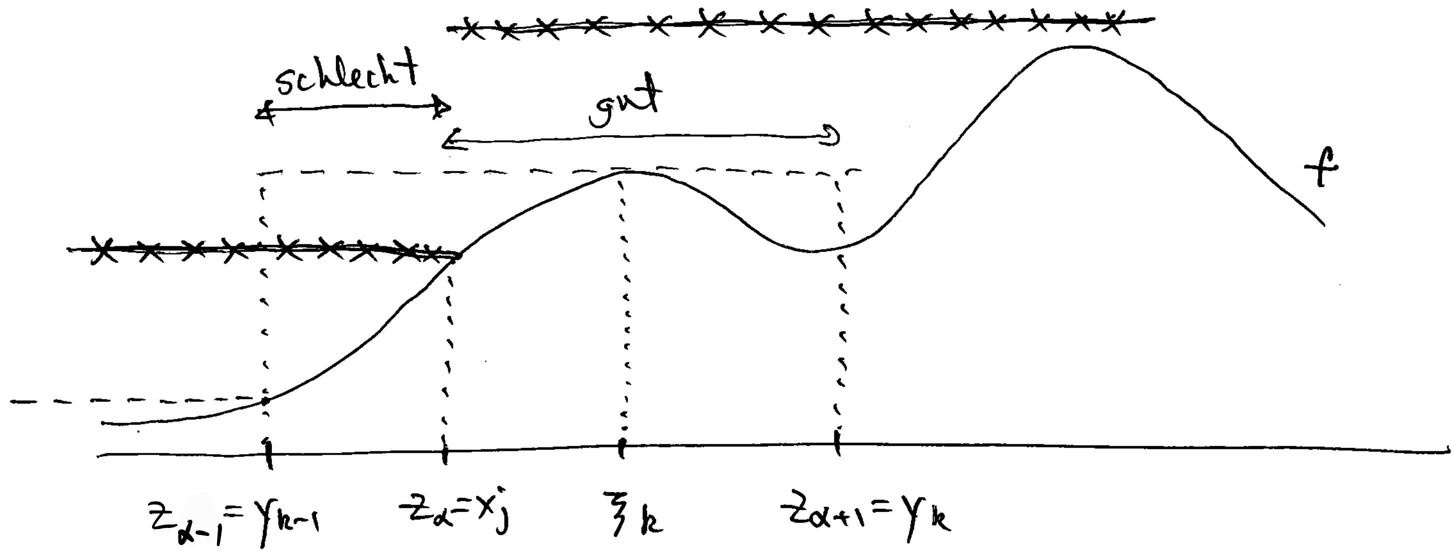
Also $\nu \le m + (n-1)$ [man denke sich die $x_j$'s in die bestehende Unterteilung $(y_k)_k$ „reingeworfen"]

Def. $\alpha \in \{1, \dots, \nu\}$ schlecht $:\Longleftrightarrow \forall k = 1, \dots, m : \xi_k \notin \,]z_{\alpha-1}, z_\alpha[$

ansonsten: $\alpha$ gut

$\Longrightarrow$ (2) $\exists$ höchstens $2(n-1)$ schlechte $\alpha$'s (ungünstigster Fall: $x_j = \xi_{k(j)}$ $\forall j = 1, \dots, n-1$)

(3) $\alpha$ gut $\Longrightarrow$ $\varphi_- \le \varphi_Z \le \varphi_+$ auf $]z_{\alpha-1}, z_\alpha[$




- - - - - - - - Werte von $\varphi_Z$ $(= f(\xi_k)$ auf $]y_{k-1}, y_k[)$

×××××××× Werte von $\varphi_+$ $(\ge f$ auf $]x_{k-1}, x_k[)$

Für $\# \in \{+,-,\mathcal{Z}\}$, $\alpha \in \{1,\dots,\nu\}$, sei $c_{\#,\alpha} := \varphi_\#(w_\alpha)$

wobei $w_\alpha \in ]z_\alpha, z_{\alpha-1}[$ (Intervall, auf dem $\varphi_\#$ konstant)

$$\int_{I,g} \varphi_\#(x)dx := \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \text{ gut}}}^{\nu} c_{\#,\alpha}(z_\alpha - z_{\alpha-1})$$

$$\Rightarrow \quad (4): \left| \int_I \varphi_\#(x)dx - \int_{I,g} \varphi_\#(x)dx \right| \leq \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \text{ schlecht}}}^{\nu} \underbrace{|c_{\#,\alpha}|}_{\leq \sup_{x\in I}|\varphi_+(x)| + \sup_{x\in I}|\varphi_-(x)|} \cdot \underbrace{(z_\alpha - z_{\alpha-1})}_{\leq \mu(\mathcal{Z}) < \delta} \overset{(2),(1)}{<} \varepsilon$$

$$(5): \int_{I,g} \varphi_-(x)dx \overset{(3)}{\leq} \int_{I,g} \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx \overset{(3)}{\leq} \int_{I,g} \varphi_+(x)dx$$

aus (4) $\wedge$ (0) $\Rightarrow$

$$\left| \int_{I,g} \varphi_+(x)dx - \int_{I,g} \varphi_-(x)dx \right| \leq \left| \int_{I,g} \varphi_+(x)dx - \int_I \varphi_+(x)dx \right| + \left| \int_I \varphi_+(x)dx - \int_I \varphi_-(x)dx \right| + \left| \int_I \varphi_-(x)dx - \int_{I,g} \varphi_-(x)dx \right|$$

$$\overset{(0),(4)}{<} \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} \quad (6): \quad 0 \leq \int_{I,g} \varphi_+(x)dx - \int_{I,g} \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx \leq 4\varepsilon$$

Somit

$$\Big| \int_I f(x)dx - \underbrace{R(\mathcal{Z},f)}_{\int_I \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx} \Big| \leq \left| \int_I f(x)dx - \int_I \varphi_+(x)dx \right| + \left| \int_I \varphi_+(x) - \int_{I,g} \varphi_+ dx \right|$$

$$+ \left| \int_{I,g} \varphi_+ dx - \int_{I,g} \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx \right| + \left| \int_{I,g} \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx - \int_I \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx \right|$$

$$\overset{(0),(4),(6),(4)}{<} \varepsilon + \varepsilon + 4\varepsilon + \varepsilon = 7\varepsilon$$

∎

**6.8 Definition** Sei $N \subseteq \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} N \text{ (Lebesgue-)} \\ \underline{\text{Nullmenge}} \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ offene Intervalle } J_n \subseteq \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}: \\ N \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n \quad \text{und} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n| < \varepsilon \end{array}\right.$$

„offene Überdeckung von $N$"

**6.9. Satz** (a) $\forall k \in \mathbb{N}$ sei $N_k \subseteq \mathbb{R}$ Nullmenge

$\Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ ist Nullmenge

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar. Dann ist $M$ Nullmenge

<u>Beweis</u> (a) Sei $\varepsilon > 0$. $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists$ n.V. offene Überdeckung $N_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n^k$ mit Intervallen, so dass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n^k| < 2^{-k}\varepsilon$$

$\Rightarrow \left(\bigcup_k N_k\right) \subseteq \underbrace{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{abzählbar}} J_n^k$ mit offene Intervalle und

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n^k| < \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} = \varepsilon \quad \checkmark$$

(b) . $\forall x \in \mathbb{R}$: $\{x\}$ ist Nullmenge (1 Intervall reicht!) ∎

$\Rightarrow$ Beh. mit (a)

Ein Integrabilitätskriterium:

**6.10 Satz** Sei $f: I \to \mathbb{R}$ und $N_f := \{x \in I : f \text{ nicht stetig in } x\}$

Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ beschränkt} \\ \text{und } N_f \text{ Nullmenge} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow f \text{ Riemann-integrierbar auf } I$$

Beweis: Hier nur "$\Rightarrow$"; für "$\Leftarrow$" siehe z.B. Heuser, Satz 84.2

Sei $\varepsilon > 0$

- Sei $x \in I \setminus N_f \overset{\text{stetig}}{\Longrightarrow} \exists \delta_x > 0 \ \forall x' \in B_{\delta_x}(x) \cap I$:
$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \qquad (1)$$
- Sei $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ offene Überdeckung aus Intervallen von $N_f$ mit
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |J_n| < \varepsilon \quad (2)$$

$\Rightarrow I \subseteq \left( \bigcup_{x \in I \setminus N_f} B_{\delta_x}(x) \right) \cup \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \right)$. Da $I$ kompakt (vgl. Bsp. 3.25) $\xrightarrow[\text{(siehe unten)}]{\text{Satz v. Heine-Borel}}$ $\exists$ endliche Teilüberdeckung,

d.h. $\exists \kappa, \nu \in \mathbb{N} \ \exists x_1, .., x_\kappa \in I \setminus N_f, n_1, .., n_\nu \in \mathbb{N}$ mit
$$I \subseteq \left( \bigcup_{k=1}^{\kappa} B_{\delta_{x_k}}(x_k) \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^{\nu} J_{n_j} \right)$$

Sei $a = z_0 < z_1 < \ldots < z_{\lambda-1} < z_\lambda = b$ Unterteilung von $I = [a,b]$, so dass $\forall l = 1, .., \lambda$: entweder $\exists k = 1, .., \kappa$:
$$I_l := ]z_{l-1}, z_l[ \subseteq B_{\delta_{x_k}}(x_k) \quad (\text{„}l \text{ gut“})$$
oder $\exists j = 1, .., \nu$: $I_l \subseteq J_{n_j}$ („$l$ schlecht“)

Seien $\varphi_\pm \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi_\pm\big|_{I_l} := \sup_{x \in I_l} / \inf_{x \in I_l} f(x)$ konstant $\forall l = 1, .., \lambda$

$$\Rightarrow 0 \leq O_I(f) - U_I(f) \overset{\varphi_- \leq f \leq \varphi_+}{\leq} \int_I \varphi_+ dx - \int_I \varphi_- dx = \sum_{l=1}^{\lambda} \left( \varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l} \right) |I_l|$$

$$= \sum_{l \text{ gut}} \underbrace{\left( \varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l} \right)}_{\leq 2\varepsilon \ (1)} |I_l| + \sum_{l \text{ schlecht}} \underbrace{\left( \varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l} \right)}_{\leq 2 \sup_{x \in I} |f(x)| =: 2S < \infty \ \text{n.V.}} |I_l|$$

$$\leq 2\varepsilon |I| + 2S \underbrace{\sum_{j=1}^{\nu} |J_{n_j}|}_{< \varepsilon \ (2)} < 2\varepsilon (|I| + S) \xRightarrow{\varepsilon > 0 \text{ bel.}} \text{Beh.} \quad \blacksquare$$

Im Beweis von Satz 6.10 wurde ein Spezialfall des Überdeckungssatzes von Heine - Borel (⇝ Ana 2 !) verwendet:

|Spezialfall Heine - Borel| Seien $-\infty < a < b < \infty$; $J$ eine (unendliche) Indexmenge und $\forall \alpha \in J$ sei $I_\alpha$ ein offenes Intervall. Es gelte $[a,b] \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha$

Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ sowie $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in J$, so dass $[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_{\alpha_n}$ (endliche Teilüberdeck.)

Beweis. Per Widerspruch. Ann. $\nexists$ endliche Teilüberdeckung von $[a,b] =: K_0$ $\Rightarrow$ mindestens eines der Intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung; wähle eines davon, $K_1$, aus.

$\overset{\text{induktiv}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Intervallschachtelung $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit

- $K_k \subseteq K_{k-1}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $|K_k| = |K_{k-1}|/2$

(*) • $K_k$ wird nicht durch endlich viele $I_\alpha$'s überdeckt

$\overset{\text{Intervallsch.-Prinzip 2.69}}{\Longrightarrow}$ $\exists! x \in \mathbb{R} : x \in K_k \ \forall k \in \mathbb{N}_0$ (hier wurde die Abgeschlossenheit und Beschränktheit von $[a,b]$ benutzt!)

$\overset{\{I_\alpha\}_{\alpha \in J} \text{ Überd.}}{\Longrightarrow}$ $\exists \alpha_0 \in J : x \in I_{\alpha_0}$; $I_{\alpha_0}$ offen

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : x \in \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subseteq I_{\alpha_0}$

$\Rightarrow$ für $k$ groß genug (so dass $|K_k| < \varepsilon$) $\Rightarrow x \in K_k \subseteq \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subset I_{\alpha_0}$

↯ (zu (*)) ☒

**6.11 Korollar** Sei $f: I \to \mathbb{R}$. Dann gilt:
$f$ stetig oder stückweise stetig (d.h. $N_f$ ist endliche Menge und $f$ besitzt links- u. rechtsseitige Limiten in allen Punkten) $\Rightarrow$ $f$ integrierbar auf $I$.

**6.12 Korollar** Sei $f: I \to \mathbb{R}$ monoton
$\Rightarrow$ $f$ integrierbar auf $I$

Denn, es gilt:

**6.13 Satz** Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist $N_f$ höchstens abzählbar.

Beweis. o.E. sei $f$ isoton (sonst betrachte $-f$)

Monotonie $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$ existiert $\lim_{y \nearrow x} f(y) =: f(x^-) \in \mathbb{R}$

und $\lim_{y \searrow x} f(y) =: f(x^+) \in \mathbb{R}$

Für $M, n \in \mathbb{N}$ setze

$$\mathcal{U}_n^M := \{x \in [-M, M] : f(x^+) - f(x^-) > \tfrac{1}{n}\}$$

$$\Rightarrow \quad N_f = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n^M \qquad (*)$$

Da $0 \leq \underset{\in \mathbb{R}}{f(M)} - \underset{\in \mathbb{R}}{f(-M)} > \frac{1}{n} \cdot \#\{\mathcal{U}_n^M\}$

$\Rightarrow \mathcal{U}_n^M$ endlich $\forall n, M \in \mathbb{N}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $N_f$ abzählbar ∎

## 6.2. Eigenschaften des Riemann-Integrals

$\boxed{\text{6.14 Satz}}$ Seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(a) Dann ist $\lambda f + \mu g$ Riemann-integrierbar und

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(x)\, dx = \lambda \int_I f(x)\, dx + \mu \int_I g(x)\, dx$$

(b) Monotonie: $f \leq g \Rightarrow \int_I f(x)\,dx \leq \int_I g(x)\,dx$

(c) Dreiecksungleichung: $|f| : I \to \mathbb{R}_{\geq}$ ist Riemann-integrierbar und $\left| \int_I f(x)\,dx \right| \leq \int_I |f(x)|\, dx$

(d) Additivität: Sei $I = [a, b]$ und $a < c < b$. Dann sind äquivalent

(i) $f$ Riemann integrierbar auf $I$

(ii) $f$ " " " $[a, c]$ und auf $[c, b]$

Gilt eine der beiden Aussagen, so ist

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\, dx \qquad (*)$$

Konvention

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0 \ ; \quad \int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$$

falls $b < a$ und $f$ Riemann-integrierbar auf $[b, a]$

## Beweis von Satz 6.14

(a) aus Satz 6.7 (i) ⇔ (ii), da

$$R(Z, \lambda f + \mu g) = \lambda R(Z, f) + \mu R(Z, g)$$

[gültig für reellwertige Fkt'en ⇒ gültig für $\mathbb{C}$]

(b) wegen (a) genügt es zu zeigen:

$$g \geq 0 \Rightarrow \int_I g(x)\,dx \geq 0$$

$\varphi_- := 0$ ist Treppenfkt.

mit $\varphi_- \leq g \Rightarrow 0 = \int_I \varphi_-(x)\,dx \leq \mathcal{U}_I(g) = \int_I g(x)\,dx$

g integrierbar

(c) f integrierbar ⇒ Re f ∧ Im f integrierbar

⇓ Satz 6.10 ⇓

beschränkt und stetig bis auf

Nullmenge $N_1$ ; Nullmenge $N_2$

$\Rightarrow x \mapsto |f(x)| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)(x)^2 + (\operatorname{Im} f)(x)^2}$ beschränkt und stetig bis auf $N_1 \cup N_2$ (wieder Nullmenge!)

$\overset{\text{Satz 6.10}}{\Longrightarrow}$ integrierbar

$$\Rightarrow \left|\int_I f(x)\,dx\right| = \lim_{\mu(Z)\to 0} \underbrace{|R(Z,f)|}_{\leq R(Z,|f|)} \leq \int_I |f(x)|\,dx$$

(d) (i) ⇔ (ii) folgt aus Satz. 6.10, und

Glg. (*) aus Satz 6.7. (ii) und einer Zerlegung $Z$ mit c als Stützstelle

▨

**6.15 Satz** (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig ( $\overset{\text{Kor. 6.11}}{\Longrightarrow}$ Riemann-integrierbar)

sei zudem $g \geq 0$.

Dann $\exists \xi \in I$ : $\quad \int_I f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_I g(x) dx$

(hängt von $f, g$ und $I$ ab!)

Speziell für $g = 1$ gilt : $\int_I f(x) dx = f(\xi) |I|$

Beweis : Sei $\begin{matrix} m \\ M \end{matrix} := \begin{matrix} \inf \\ \sup \end{matrix} \{ f(x) : x \in I \} \overset{g \geq 0}{\Longrightarrow} mg \leq fg \leq Mg$

Satz 6.14(b) $\Longrightarrow$

$$m \int_I g(x) dx \leq \int_I f(x) g(x) dx \leq M \int_I g(x) dx$$

$$\Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int_I f(x) g(x) dx = \mu \int_I g(x) dx$$

$\Downarrow$ Zwischenwertsatz ($f$ stetig)

$\exists \xi \in I : \mu = f(\xi)$ $\blacksquare$

Eine unmittelbare Anwendung :

**6.16 Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung**

Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig, sei $x_0 \in I$ und

$$F : \begin{array}{l} I \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(x') dx' =: F(x) \end{array}$$

Dann ist $F$ diff.bar und $F' = f$.

**Beweis** Es genügt Satz für $f: I \to \mathbb{R}$ stetig zu zeigen (daraus folgt Beh. für $\mathbb{C}$)

Sei $x \in I$, $0 \neq h \in \mathbb{R}$, so dass $x+h \in I$

$$\Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \underset{\text{Satz 6.14 (d)}}{=} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x')\,dx' \underset{\substack{\text{Mittelwertsatz 6.15} \\ \exists \xi_h \in [x, x+h] \\ (\text{falls } h>0)}}{=} f(\xi_h) \xrightarrow[\xi_h \to x]{h \to 0} \underset{f \text{ stetig!}}{f(x)}$$

∎

**6.17. Definition** Sei $f: I \to \mathbb{C}$ stetig

$$\left.\begin{array}{l} F: I \to \mathbb{C} \text{ diff.bar ist} \\ \text{Stammfkt. zu } f \end{array}\right\} :\Leftrightarrow F' = f$$

Schreibweise: $F = \int f = \int f(x)\,dx$; $F(x) = \int^x f = \int^x f(t)\,dt$

**6.18. Satz** Sei $f: I \to \mathbb{C}$ stetig und $F$ Stammfkt. zu $f$.

Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} G: I \to \mathbb{C} \text{ diff.bar ist} \\ \text{Stammfkt. zu } f \end{array}\right\} \Leftrightarrow F - G = \text{konst.}$$

**Beweis:** „$\Leftarrow$" $\qquad \underbrace{F'}_{f} - G' = 0$

„$\Rightarrow$" Sei $G$ auch Stammfkt. zu $f$

$$\Rightarrow (G-F)' = G' - F' = f - f = 0$$

$$\xRightarrow[\text{(Übung!)}]{G-F \text{ diff.bar auf } I} G - F = \text{konst.}$$

∎

## 6.19 Korollar

Sei $f: I \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $\forall x_0 \in I$

$I \ni x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ eine Stammfkt. zu $f$ und

$\forall$ Stammfkt'en $F$ von $f$ gilt $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(x_0) =: F(t)\Big|_{x_0}^{x}$

## 6.20 Beispiele

(a) Sei $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $I = [a,b]$ abgeschl. Intervall mit $0 \notin I$. $\Rightarrow$ $\int_a^b x^r\,dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1}\Big|_a^b$

NB: Für $r \geq 0$ braucht mann die Vor. „$0 \notin I$" nicht!

(b) Sei $I$ wie oben (insbes. entweder $a > 0$ oder $b < 0$)

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} \ln x\Big|_a^b, & a > 0 \\ \ln(-x)\Big|_a^b, & b < 0 \end{array}\right\} = \ln|x|\Big|_a^b$$

$$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1)$$

(c) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

---

Falls Stammfkt. nicht offentsichtlich, können die folgenden Integrationsformeln (part. Integr. & Substitution) u. U. nützlich sein.

$\boxed{\text{6.21 Satz}}$ (Partielle Integration) („PI")

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff-bar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx$$

Beweis: Produktregel (diff.) für $\Phi := fg$

$\Rightarrow \Phi' = f'g + fg' =: \varphi$ und Kor 6.19 mit $f = \varphi$, $F = \Phi$ ∎

6.22 Beispiele

(a) Seien $a, b > 0$

$$\int_a^b \underbrace{\ln x}_{\substack{\ln x \cdot 1 \\ f \quad g'}}\, dx \overset{PI}{=} (\ln x)\, x \Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b \underbrace{\frac{1}{x} \cdot x}_{1}\, dx}_{x|_a^b} = x(\ln x - 1)\Big|_a^b$$

(b) $I_m(x) := \int_0^x \underbrace{\sin^m(t)}_{:=(\sin t)^m}\, dt$ , $m \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ • $m = 0, 1$: $I_0(x) = x$ ; $I_1(x) = -\cos x + 1$

• $m \geq 2$:

$$I_m(x) = \int_0^x \underbrace{\sin t}_{g'}\ \underbrace{\sin^{m-1} t}_{f}\, dt = -\cos x \sin^{m-1} x + \int_0^x \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t}\, (m-1) \sin^{m-2} t\, dt$$

$\Rightarrow I_m(x) = -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1) I_{m-2}(x) + (1-m) I_m(x)$

$\Rightarrow I_m(x) = -\frac{1}{m} \cos x \sin^{m-1} x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) I_{m-2}(x)$

- erlaubt rekursive Berechnung aller $I_m(x)$ !
- Insbes.: $I_2(x) = \int_0^x \sin^2 t \, dt = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}$

**6.23 Satz** (Riemannsches Lemma)

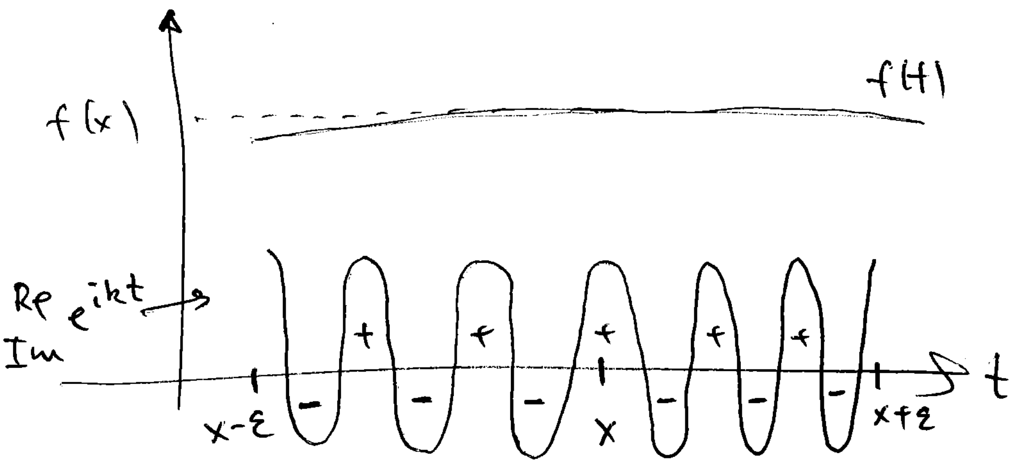
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff.-bar. Dann gilt für

$$\tilde{f}(k) := \int_a^b f(x) e^{ikx} dx \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

dass $\lim_{k \to \pm\infty} \tilde{f}(k) = 0$.

**6.24 Bemerkung**

- $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt Fourier-Transformierte von $f$ (modulo Vorfaktor)
- wird später ($\geq$ Ana 3) verallg. auf integrierbare $f$ $\rightsquigarrow$ Riemann-Lebesgue-Lemma
- Moral: für $|k| \gg \frac{1}{\varepsilon} \gg \sup_{t \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} |f'(t)|$




„+"- und „−"-Anteile heben sich weg für $|k| \to \infty$

**Beweis von Satz 6.23** Sei $k \neq 0$

$$\tilde{f}(k) \overset{PI}{=} f(x)\frac{e^{ikx}}{ik}\Big|_a^b - \frac{1}{ik}\int_a^b f'(x)e^{ikx}\,dx$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}(k)| \leq \frac{1}{|k|}\Big(\underbrace{|f(b)|}_{<\infty} + \underbrace{|f(a)|}_{<\infty}\Big) + \frac{1}{|k|}(b-a)\underbrace{\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|}_{=: M < \infty}$$

$f'$ stetig auf $[a,b] \Rightarrow$ beschr.

■

$\boxed{\text{6.25 Satz}}$ (Substitutionsregel)

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, sei $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff-bar.

Dann gilt
$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy \qquad (*)$$

**Beweis:** (Kettenregel!)

Für $g := (f\circ\varphi)\varphi'$ gilt:

- $g: [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig
- $G := F\circ\varphi$ ist Stammfkt. zu $g$

  ↑ Stammfkt zu $f$ (ex. nach HDI 6.16)

da (Kettenregel!) $G' = (\underbrace{F'}_{f}\circ\varphi)\varphi' = g$

also: rechte Seite $(*) \overset{6.19}{=} F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

linke Seite $(*) \overset{6.19}{=} G(b) - G(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

■

Merkregel: Für $y = \varphi(x)$ gilt

- $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ ; informell (!) : $dy = \varphi'(x)\,dx$
- $x = a$ entspricht $y = \varphi(a)$
  $x = b$ $y = \varphi(b)$

6.26 Beispiele

(a) $$\int_a^b f(\underbrace{mx+c}_{y=\varphi(x)})\,dx \underset{dy = m\,dx}{=} \frac{1}{m}\int_a^b f(\underbrace{mx+c}_{y})\underbrace{m\,dx}_{dy} = \frac{1}{m}\int_{ma+c}^{mb+c} f(y)\,dy$$

für $m, c \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

(b) Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.-bar und $\varphi(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx \underset{y=\varphi(x)}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{y}\,dy \underset{\text{Bsp. 6.20 (b)}}{=} \ln|\varphi(x)|\Big|_a^b$$

(c) $$\int^x \arctan(t)\,dt = \int^x \underbrace{\arctan(t)}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'}\,dt$$

$$\overset{PI}{=} x\arctan(x) - \underbrace{\int^x \frac{1}{1+t^2}\, 2t \cdot \frac{1}{2}\,dt}_{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} \quad (b)$$

( Probe durch Differenzieren ! )

**6.27. Satz** (Vertauschung von Integration mit Limiten)

$\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ($\overset{\text{Satz 3.33}}{\Rightarrow}$ $f$ stetig!)

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \left( = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx \right)$$

Beweis

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \sup_{y\in[a,b]} |f(y)-f_n(y)|}\,dx$$

$$\leq \|f - f_n\|_\infty (b-a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

■

Beispiel: Sei $0 < a < b$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b e^{-nx^2}\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2}\,dx = 0$$

$$\sup_{x\in[a,b]} e^{-nx^2} = e^{-na^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Eine Anwendung:

**6.28. Satz** (Vertauschung von Differentiation mit Limiten)

$\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff.bar, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. punktweise gegen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. gleichmässig auf $[a,b]$. Dann ist $f$ stetig diff.bar und

$$\lim_{n\to\infty} (f_n') = f' \qquad \left( = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' \right)$$

**Beweis**: Sei $g := \lim_{n\to\infty} f_n'$ $\left(\overset{\text{Satz 3.33}}{\Longrightarrow} g \text{ stetig auf } [a,b]\right)$

zu zeigen: $g = f'$. Nach HDI 6.16:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b]$$

$$\Big\downarrow \text{pkt.-w. Kgz.} \qquad \qquad \Big\downarrow \text{Satz 6.27}$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt \quad \overset{\text{HDI 6.16}}{\Longrightarrow} \quad f \text{ diff.-bar und } f' = g \text{, also stetig diff.-bar} \quad \blacksquare$$

**6.29 Warnung**

$$f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx) \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} \underbrace{|f_n(x)|}_{\le \frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

also $(f_n)_n$ glm. gegen 0 kgt.,

**Aber**: $f_n'(x) = \cos(nx)$ kgt. nicht für $n \to \infty$.

$\boxed{\textbf{6.30 Korollar}}$ (Gliedweise Differentiation von Potenzreihen)

Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ Potenzreihe mit Kgz.-radius $R$. Dann gilt

$$\forall x \in\, ]-R,R[\,: \quad \frac{d}{dx}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot n x^{n-1}$$

(insbes. ist $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ diff.-bar).

**Zusatz**: $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ bel. oft diff.-bar auf $]-R,R[$

<u>Beweis</u>: Für $N \in \mathbb{N}$ sei $f_N(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \quad \forall x \in ]-R,R[$

Sei $0 < \rho < R$ bel. fest

(i) $\forall N \in \mathbb{N}$ ist $f_N$ stetig diff.-bar auf $[-\rho,\rho]$

(ii) $f_N(x) \xrightarrow{N\to\infty} f(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n \quad \forall x \in [-\rho,\rho]$

(iii) $f_N'(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) a_{n+1} x^n$

Beh.: Kgz. radius von $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} (n+1) a_{n+1} x^n$ ist $R$, da

- $(n+1)^{1/n} = e^{1/n \ln(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad (= e^0)$
- Satz von Hadamard ✓

$\overset{\text{Satz 4.23}}{\Rightarrow} \quad (f_N')_N$ kgt. <u>glm.</u> auf $[-\rho,\rho]$

(i) - (iii) $\overset{\text{Satz 6.28}}{\Rightarrow}$ $f$ diff. bar auf $[-\rho,\rho]$ und

$$f'(x) = \lim_{N\to\infty} f_N'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \forall x \in [-\rho,\rho]$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} n a_n x^{n-1}$$

$\rho < R$ bel.
$\Rightarrow$ Beh.

Zusatzbeh. per Induktion $\rightsquigarrow$ Übung! $\blacksquare$
(siehe expl. gemacht...)

<u>6.31 Beispiel</u> Für $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n x^n = x \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{n x^{n-1}}_{\frac{d}{dx} x^n} \overset{\text{Kor. 6.30}}{=} x \frac{d}{dx} \Big( \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n}_{\frac{1}{1-x} - 1} \Big)$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

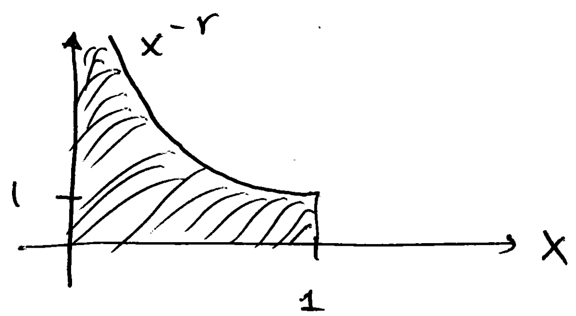
# 6.3. Uneigentliches Riemann-Integral

## 6.32. Motivation

- $0 < r < 1,\ a > 0 \Rightarrow \int_a^1 \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{1-r} x^{1-r}\Big|_a^1$

$$= \frac{1}{1-r}(1 - a^{1-r}) \xrightarrow{a \downarrow 0} \frac{1}{1-r} \text{ existiert}$$

d.h. endliche Fläche



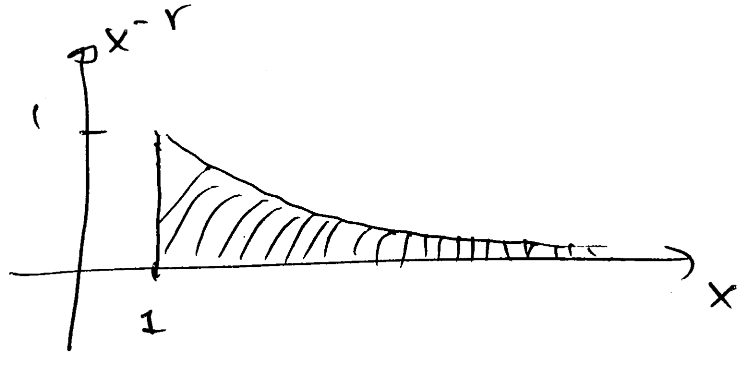
$\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,dx$ sollte def. sein, obwohl $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^r} = +\infty$, also nicht existiert,

also $x \mapsto \frac{1}{x^r}$ nicht Riemann-integr. auf $[0,1]$

da nicht beschr.

- $r > 1 \Rightarrow \int_1^b \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{1-r}(b^{1-r} - 1) \xrightarrow{b \to \infty} \frac{1}{r-1}$ exist.

d.h. endliche Fläche



$\int_1^\infty \frac{1}{x^r}\,dx$ sollte def. sein, obwohl $[1, \infty[$ uneigentliches Intervall (nicht beschr.).

## 6.33. Definition

(a) Sei $f: [a,\infty[ \to \mathbb{C}$, so dass $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar $\forall b > a$.

$$\left.\begin{array}{l}f \text{ uneigentlich Riemann-} \\ \text{integrierbar über (auf) } [a,\infty[\end{array}\right\} :\iff \left\{\begin{array}{l} I := \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \\ \text{existiert}\end{array}\right.$$

Notation: $\int_a^\infty f(x)\,dx := I$

(analog für $]-\infty,a]$)

(b) Sei $f: ]a,b] \to \mathbb{C}$, so dass $f: [a+\varepsilon,b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar $\forall \varepsilon \in ]0,b-a[$.

$$\left.\begin{array}{l}f \text{ uneigentlich Riemann-} \\ \text{integrierbar über (auf) } [a,b]\end{array}\right\} :\iff \left\{\begin{array}{l} I := \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \\ \text{existiert}\end{array}\right.$$

Notation: $\int_a^b f(x)\,dx := I$

(analog für $f: [a,b[ \to \mathbb{C}$)

(c) Analog für alle mögliche Kombinationen von (a) und (b)

## 6.34. Bemerkung

$f: [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar

$\Rightarrow$ $f$ uneigentlich Riemann-integrierbar auf/über $[a,b]$

Bew.: z.B HDI 6.16, da

Stamfkt $F$ diff. bar $\Rightarrow$ $F$ stetig $\blacksquare$

**6.35. Beispiel** Sei $r \in ]-1,\infty[$.

$$f: \begin{array}{l} ]0,\infty[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^r e^{-x} \end{array}$$ uneigentlich Riemann-integr. auf $[0,\infty[$.

zu zeigen: $\lim_{a \searrow 0} \lim_{b \nearrow \infty} \underbrace{\int_a^b x^r e^{-x}\,dx}_{\int_a^1 x^r e^{-x}\,dx + \int_1^M x^r e^{-x}\,dx + \int_M^b x^r e^{-x}\,dx}$ existiert

(Reihenfolge egal!)

$M \leftarrow$ wird später bestimmt

- untere Grenze: hier nur im Fall $r \in ]-1,0[$ etwas zu zeigen (ansonsten ist $f$ Riem. integr. auf $[0,1]$)

Sei also $r \in ]-1,0[$ und $a \in ]0,1[$:

$$\int_a^1 x^r e^{-x}\,dx \overset{PI}{=} \underbrace{\frac{1}{r+1} x^{r+1} e^{-x} \Big|_a^1}_{\frac{e^{-1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1} e^{-a}} + \int_a^1 \underbrace{\frac{x^{r+1}}{r+1}}_{\text{stetig auf } [0,1],\ \text{da } r+1>0 \Rightarrow \text{R. integr. auf } [0,1]} e^{-x}\,dx$$

$$\xrightarrow{a \searrow 0} \frac{e^{-1}}{r+1} + \int_0^1 \frac{x^{r+1}}{r+1} e^{-x}\,dx \quad \text{existiert!}$$

- obere Grenze: Sei $M > 1$ so groß, dass $x^{r+2} e^{-x} \leq 1 \quad \forall x \geq M$ (und $b > M$)

$$F(b) := \int_M^b \underbrace{x^r e^{-x}}_{\underbrace{x^{r+2} e^{-x}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{x^2}}\,dx \leq \int_M^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_M^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{M} \xrightarrow{b \nearrow \infty} \frac{1}{M}$$

da $b \mapsto F(b)$ isoton und beschränkt

$\Rightarrow \lim_{b \to \infty} F(b)$ existiert

$\Rightarrow$ Beh. ✓

Zwei Anwendungen uneigentlicher Integrale:

**6.36. Satz** (Integralkriterium für Reihen)

Sei $f:[1,\infty[\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ antiton. Dann gilt $\forall N\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

Insbesondere: $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ kgt. $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx$ existiert

Beweis: Übung.

**6.37. Definition** Eulersche Gamma-Funktion (ca. 1730)

$$\Gamma: \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} \\ x \longmapsto \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt \end{array}$$

(wohldef. als uneig. Riemann-Integral nach Bsp. 6.35)

**6.38. Satz**

(a) Funktionalgleichung: $x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \quad \forall x>0$

(b) $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) \underset{\text{Subst } u=\sqrt{t}}{=} 2\underbrace{\int_0^\infty e^{-u^2}\,du}_{\text{Gauß-Integral}} = \sqrt{\pi}$

Beweis: (a) $\forall \varepsilon, R, x>0$

$$\int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\,dt \overset{PI}{=} -t^x e^{-t}\Big|_\varepsilon^R + x\underbrace{\int_\varepsilon^R t^{x-1}e^{-t}\,dt}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \varepsilon\searrow 0,\ R\to\infty & \downarrow & \downarrow \\ \Gamma(x+1) & 0 & \Gamma(x) \end{array}$$

(b) $\Gamma(1)=1$ klar, $\Gamma(\frac{1}{2})$ via Gauß-Integral (Üb.!)

$\boxed{6.39.\ \text{Korollar}}$ $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Ind. Beweis. $n=0$: $\Gamma(1) = 1 = 0!$ (nach 6.38(b))

$n \to n+1$: $\Gamma(n+1) \underset{\uparrow 6.38(b)}{=} n \underbrace{\Gamma(n)}_{(n-1)!\ \text{Ind.-Ann.}} = n!$

$\boxed{6.40\ \text{Satz}}$ Stirling-Formel

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \gamma_n^- \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \gamma_n^+$

mit $\gamma_n^- := e^{\frac{1}{12n+1}}$, $\gamma_n^+ := e^{\frac{1}{12n}}$

Insbes. $n! \overset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ asymptotische Gleichheit

$$:\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1$$

---

Beweis: Wir zeigen nur schwächere Variante mit

$$\gamma_n^- = e^{\frac{1}{12(n+1)}} \quad \text{und} \quad \gamma_n^+ = e^{\frac{1}{12(n-1)}} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$$

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\ln k}_{\int_1^k \frac{1}{x}dx} = \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx$$

s. unten (*)

$$= \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx}_{(n+\frac{1}{2})\sum_{j=1}^{n-1}[\ln(j+1)-\ln j]} - \sum_{j=1}^{n-1}\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln n - \sum_{j=1}^{n-1}\underbrace{\int_j^{j+1}\frac{j+\frac{1}{2}-x}{x}\,dx}_{\int_0^1 \frac{1/2-x}{j+x}dx =: I_j} - n + 1$$

Begründung von (*): Sei $\Theta(y) := \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$

(Heaviside-Fkt.)

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} a_j}_{\sum_{j=1}^{n-1} \Theta(k-1-j) a_j} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \Theta(k-1-j)}_{\sum_{k=1+j}^{n} 1} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j (n-j).$$

Vertauschung endl. Summen

---

Beh.: (i) $\frac{1}{(j+1)^2} \leq 12 I_j \leq \frac{1}{j^2} \quad \forall j \in \mathbb{N}$ (Beweis unten)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} I_j =: 1 - \ln C \quad \text{existiert}$$

(ii) $\frac{1}{n+1} \leq 12 \sum_{j=n}^{\infty} I_j \leq \frac{1}{n-1}$

folgt aus Integralkriterium (Satz 6.36) und (i)

---

zu (i): nütze Wegheben positiver & negativer Anteile aus:

$$I_j = \int_0^{1/2} \frac{1/2 - x}{j+x}\,dx + \underbrace{\int_{1/2}^{1} \frac{1/2 - x}{j+x}\,dx}_{\int_0^{1/2} \frac{y - \frac{1}{2}}{j+1-y}\,dy}$$

$y = 1-x$ (Subst)

$$= \int_0^{1/2} \left(\tfrac{1}{2} - x\right) \underbrace{\left[\frac{1}{j+x} - \frac{1}{j+1-x}\right]}_{\frac{\cancel{j}+1-x-\cancel{j}-x}{(j+x)(j+1-x)}} dx = 2 \int_0^{1/2} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} - x\right)^2}_{\geq 0} \underbrace{\frac{1}{(j+x)(j+1-x)}}_{=: A_j(x)}\,dx$$

Da • $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]: \frac{1}{(j+\frac{1}{2})(j+1)} \leq A_j(x) \leq \frac{1}{j(j+\frac{1}{2})}$

• $\int_0^{1/2} (\frac{1}{2}-x)^2 dx = -\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-x)^3 \Big|_0^{1/2} = +\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{24}$

$$\Rightarrow \frac{1/12}{(j+\frac{1}{2})(j+1)} \leq I_j \leq \frac{1/12}{j(j+1/2)} \Rightarrow (i) \checkmark$$

---

Somit: $\ln(n!) \overset{(i)}{=} (n+\frac{1}{2})\ln n - n + \ln C_1 + \sum_{j=n}^{\infty} I_j$

$$\Rightarrow n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} C_1 \underbrace{e^{\sum_{j=n}^{\infty} I_j}}_{=:\phi_n} \qquad (1)$$

(ii)

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{12(n+1)}} \leq \frac{n!}{C_1\sqrt{n}\,(\frac{n}{e})^n} \leq e^{\frac{1}{12(n-1)}}$$

Es verbleibt zu zeigen: $C_1 = (2\pi)^{+\frac{1}{2}}$

<u>1. Schritt</u>: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \overset{(1)}{=} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} C_1 \phi_{2n}}{n^{2n+1} e^{-2n} C_1^2 (\phi_n)^2}$

$$\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow C = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}} \qquad (2)$$

<u>2. Schritt</u>: Wallissches Produkt (siehe Blatt 1)

$$\pi = 2\prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi} = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\sqrt{2n+1}}$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\underbrace{\frac{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (2n)^2}{(2n)!}}_{2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n)!}}}_{(2)\quad C/\sqrt{2}}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}}}_{1}$$

$\boxtimes$

## 6.4. Taylor-Reihen

Bekannt: Potenzreihen definieren Funktionen

Frage: Lässt sich geg. Fkt. als Potenzreihe darstellen?

Dafür hilft

$\boxed{\text{6.41 Satz}}$ (Taylor, 1715)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{C}$ $(n+1)$-mal stetig diff-bar. Dann gilt, $\forall x \in I$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu}_{=: T_{n,a}(x) =: T_n(x)} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt}_{=: R_{n,a}(x) =: R_n(x)}$$

n-tes Taylor-Polynom (bei a) $\qquad$ n'tes Restglied (bei a)

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

(Taylor) „Entwicklung von f um a"

---

Beweis: Zeige ~~ind.~~ rekursiv $f = T_j + R_j \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$

$j=0$: $T_0(x) + R_0(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \overset{HDI}{=} f(x) \quad \forall x \in I$ ✓

$j-1 \to j$:

gelte also $f = T_{j-1} + R_{j-1}$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$.

Da
$$R_{j-1}(x) = \frac{1}{(j-1)!}\underbrace{\int_a^x f^{(j)}(t)\underbrace{(x-t)^{j-1}}_{-\frac{1}{j}\frac{d}{dt}(x-t)^j}\,dt}_{-\frac{1}{j}f^{(j)}(t)(x-t)^j\Big|_a^x + \frac{1}{j}\int_a^x f^{(j+1)}(t)(x-t)^j\,dt}$$
PI, $f^{(j)}$ stetig diff.bar für $j \leq n$

$$= \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)(x-a)^j + R_j(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{T_{j-1}(x) + \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)(x-a)^j}_{T_j(x)} + R_j(x) \quad \forall x \in I$$

■

**6.42 Satz** (Lagrange-Form des Restglieds)

Vorauss. wie in Satz 6.41 und zusätzlich $f(I) \subseteq \mathbb{R}$.

Dann gilt: $\forall x \in I\ \exists$ Zwischenwert $\xi = \xi_{x,a,n} \in \begin{cases}[x,a] & \text{falls } x < a\\ [a,x] & \text{falls } x \geq a\end{cases}$

so dass
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

---

Beweis: Fall: $x \geq a$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\underbrace{(x-t)^n}_{\geq 0}\,dt = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\underbrace{\int_a^x (x-t)^n\,dt}_{-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}\Big|_a^x}$$

Mittelwertsatz d. Integralrechnung 6.15 ($\exists \xi$ ..)

Fall: $x < a$ analog; Satz 6.15 gilt auch für $g \leq 0$!

■

**6.43. Definition** (Landau-Symbole)

Seien $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Sei $g \neq 0$ „in der Nähe" von $x_0$, d.h.

- falls $x_0 \in \mathbb{R}$: $\exists \varepsilon > 0 : x \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[ \setminus \{x_0\} \Rightarrow g(x) \neq 0$
- falls $x_0 = \infty$: $\exists N \in \mathbb{N} : x > N \Rightarrow g(x) \neq 0$
- falls $x_0 = -\infty$: " $x < -N \Rightarrow g(x) \neq 0$.

$f(x) = O(g(x))$ für $x \to x_0$ („f ist groß-O von g") $:\Leftrightarrow \limsup_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$

$f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$ („f ist klein-O von g") $:\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

**6.44 Korollar** Unter den Vor. von Satz 6.41 gilt, für $x \to a$:

$$R_{n,a}(x) = O((x-a)^{n+1}), \text{ insbes.}$$

$$R_{n,a}(x) = o((x-a)^n).$$

---

Beweis: Separate Anwendung von Satz 6.42 auf $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$

$\Rightarrow$ $\exists$ Zwischenwerte $\xi_1, \xi_2 \in \begin{matrix}[x,a] \\ [a,x]\end{matrix}$ für $\begin{matrix} x < a \\ x \geq a \end{matrix}$ :

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{\operatorname{Re} f^{(n+1)}(\xi_1) + i \operatorname{Im} f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}$$

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(a)|}{(n+1)!} < \infty$$

da:
- $x \to a \Rightarrow \xi_1, \xi_2 \to a$
- $f^{(n+1)}$ stetig.

∎

**6.45 Korollar** (Entwicklung in Taylor-Reihe)

Sei $f: I \to \mathbb{C}$ bel. oft. diff-bar, seien $a, x \in I$. Äquiv. sind:

(i) $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ (Taylor-Reihe von $f$ um $a$)

(ii) $\lim_{n \to \infty} R_{n,a}(x) = 0$

**6.46. Bemerkungen**

(a) Alle Eigenschaften von Potenzreihen $\sum_n c_n x^n$ in Kap. 4 gelten analog für $\sum_n c_n (x-a)^n$

(b) Warnung: Es kann sein, dass $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ kgt., aber nicht gegen $f(x)$! In dem Fall gilt $\lim_{n \to \infty} R_{n,a}(x)$ existiert und $\neq 0$ (vgl. Üb.!)

(c) Falls $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} c_n (x-a)^n$ Potenzreihe, kgt. für $|x-a| < R$, $R > 0$ ($R$: Konv.radius)

$\Rightarrow$ Potenzreihe = Taylor-Reihe, da:

Kor 6.30 $\Rightarrow$

$$f^{(k)}(a) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} c_n \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^n \Big|_{x=a}}_{\delta_{k,n} \cdot n!} = c_k k!$$

Kronecker-delta: $\delta_{k,n} := \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$.

## 6.47. Beispiele

(a) Sei $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x)^\alpha$

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)\,(1+x)^{\alpha-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \underset{(a=0)}{R_{3,0}(x)}$$

Es gilt: $R_{n,0}(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \forall |x| < 1$ (Siehe z.B. Forster)

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left( \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha+1-j}{j} \right)}_{=: \binom{\alpha}{n}} x^n \quad \forall |x| < 1$$

($\Leftarrow$ stimmt für $\alpha \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!\,n!}$ überein)

Spezialfälle:

- $\alpha = -1$: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad (x \to 0)$
- $\alpha = \frac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^4) \quad (x \to 0)$

(b) Effizientes Berechnen des Taylor-Polynoms um $0$ von

$f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ bis auf Terme $\mathcal{O}(x^3)$:

$$f(x) = e^{1 + x/2 - x^2/8 + \mathcal{O}(x^3)} = e \cdot e^{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{e} = 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right) + \frac{1}{2!} \underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right)^2}_{\frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^3)}$$

$$+ \underbrace{\mathcal{O}\left(\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right)^3\right)}_{\mathcal{O}(x^3)}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

(c) Logarithmus-Reihe: $\forall |x| < 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4(x)$$

Beweis

$$\ln(1+x) = \int_0^x \underbrace{\frac{1}{1+t}}_{\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(-1)^n t^n} dt = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \underbrace{\int_0^x (-1)^n t^n \, dt}_{(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

Vertauschung nach Satz 6.27,

da $S_N(t) := \sum_{n=0}^{N} (-t)^n$ glm. kgt.

in $|t| \leq |x| < 1$ (Satz 4.23 + Bsp. 4.18 (iii))

Zusatz: Aussage bleibt wahr für $x = +1$;
verwende Abelschen Grenzwertsatz
(siehe z.B. Forster)

$$\Rightarrow \quad \ln 2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$