6.4. Taylor-Reihen

Bekannt: Potenzreihen definieren Funktionen

Frage: Lässt sich geg. Fkt. als Potenzreihe darstellen?

Dafür hilft

$\boxed{\text{6.41 Satz}}$ (Taylor, 1715)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $a \in I$, $f: I \to \mathbb{C}$ $(n+1)$-mal stetig diff-bar. Dann gilt, $\forall x \in I$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^{\nu}}_{=:\, T_{n,a}(x) =:\, T_n(x)} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt}_{=:\, R_{n,a}(x) =:\, R_n(x)}$$

n-tes Taylor-Polynom (bei a) $\qquad$ n'tes Restglied (bei a)

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

(Taylor) „Entwicklung von f um a"

Beweis: Zeige ~~ind.~~ rekursiv $f = T_j + R_j \quad \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$j=0$: $T_0(x) + R_0(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \overset{\text{HDI}}{=} f(x) \quad \forall x \in I$ ✓

$j-1 \to j$:

gelte also $f = T_{j-1} + R_{j-1}$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Da

$$R_{j-1}(x) = \frac{1}{(j-1)!}\underbrace{\int_a^x f^{(j)}(t)\underbrace{(x-t)^{j-1}}_{-\frac{1}{j}\frac{d}{dt}(x-t)^j}dt}_{-\frac{1}{j}f^{(j)}(t)(x-t)^j\Big|_a^x + \frac{1}{j}\int_a^x f^{(j+1)}(t)(x-t)^j\,dt}$$

PI, $f^{(j)}$ stetig diff.bar für $j \le n$

$$= \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)(x-a)^j + R_j(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{T_{j-1}(x) + \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)(x-a)^j}_{T_j(x)} + R_j(x) \qquad \forall x \in I$$

∎

6.42 Satz (Lagrange-Form des Restglieds)

Vorauss. wie in Satz 6.41 und zusätzlich $f(I) \subseteq \mathbb{R}$.

Dann gilt: $\forall x \in I\ \exists$ Zwischenwert $\xi = \xi_{x,a,n} \in \begin{cases} [x,a] & \text{falls } x < a \\ [a,x] & \text{falls } x \ge a \end{cases}$

so dass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Beweis: Fall: $x \ge a$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\underbrace{(x-t)^n}_{\ge 0}dt = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\underbrace{\int_a^x (x-t)^n\,dt}_{-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}\Big|_a^x}$$

Mittelwertsatz d. Integralrechnung 6.15 ($\exists \xi \ldots$)

Fall: $x < a$ analog; Satz 6.15 gilt auch für $g \le 0$!

∎

6.43. Definition (Landau-Symbole)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Sei $g \neq 0$ „in der Nähe" von x_0, d.h.

- falls $x_0 \in \mathbb{R}$: $\exists \varepsilon > 0 : x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\} \Rightarrow g(x) \neq 0$
- falls $x_0 = \infty$: $\exists N \in \mathbb{N} : x > N \Rightarrow g(x) \neq 0$
- falls $x_0 = -\infty$: " $x < -N \Rightarrow g(x) \neq 0$.

$f(x) = O(g(x))$ für $x \to x_0$ („f ist groß-O von g") $:\Leftrightarrow \limsup\limits_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$

$f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$ („f ist klein-O von g") $:\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

6.44 Korollar Unter den Vor. von Satz 6.41 gilt, für $x \to a$:

$$R_{n,a}(x) = O((x-a)^{n+1}), \text{ insbes.}$$
$$R_{n,a}(x) = o((x-a)^n).$$

Beweis: Separate Anwendung von Satz 6.42 auf Re f und Im f

$\Rightarrow$ $\exists$ Zwischenwerte $\xi_1, \xi_2 \in \begin{matrix} [x,a] \\ [a,x] \end{matrix}$ für $\begin{matrix} x < a \\ x \geq a \end{matrix}$:

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{\operatorname{Re} f^{(n+1)}(\xi_1) + i \operatorname{Im} f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}$$

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(a)|}{(n+1)!} < \infty$$

da:
- $x \to a \Rightarrow \xi_1, \xi_2 \to a$
- $f^{(n+1)}$ stetig.

$\blacksquare$

6.45 Korollar (Entwicklung in Taylor-Reihe)

Sei $f: I \to \mathbb{C}$ bel. oft. diff.bar, seien $a, x \in I$. Äquiv. sind:

(i) $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ (Taylor-Reihe von f um a)

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$

6.46. Bemerkungen

(a) Alle Eigenschaften von Potenzreihen $\sum\limits_n c_n x^n$ in Kap. 4 gelten analog für $\sum\limits_n c_n (x-a)^n$

(b) Warnung: Es kann sein, dass $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ kgt., aber nicht gegen $f(x)$! In dem Fall gilt $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,a}(x)$ existiert und $\neq 0$ (vgl. Üb.!)

(c) Falls $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} c_n (x-a)^n$ Potenzreihe, kgt. für $|x-a| < R$, $R > 0$ (R: Konv.radius)

$\Rightarrow$ Potenzreihe = Taylor-Reihe, da:

Kor 6.30 $\Rightarrow$

$$f^{(k)}(a) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^n \Big|_{x=a}}_{\delta_{k,n}\cdot n!} = c_k\, k!$$

Kronecker-delta: $\delta_{k,n} := \begin{cases} 1, & k=n \\ 0, & k\neq n \end{cases}.$

6.47. Beispiele

(a) Sei $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x)^\alpha$

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)\,(1+x)^{\alpha-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \underset{(a=0)}{R_{3,0}(x)}$$

Es gilt: $R_{n,0}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall |x| < 1$ (Siehe z.B. Forster)

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha+1-j}{j}\right)}_{=:\binom{\alpha}{n}} x^n \qquad \forall |x| < 1$$

($\Leftarrow$ stimmt für $\alpha \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!\,n!}$ überein)

Spezialfälle:

- $\alpha = -1$: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad (x \to 0)$
- $\alpha = \frac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^4) \quad (x \to 0)$

(b) Effizientes Berechnen des Taylor-Polynoms um 0 von

$f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ bis auf Terme $\mathcal{O}(x^3)$:

$$f(x) = e^{1 + x/2 - x^2/8 + \mathcal{O}(x^3)} = e \cdot e^{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{e} = 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right) + \frac{1}{2!}\underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right)^2}_{\frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^3)}$$

$$+ \underbrace{\mathcal{O}\left(\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right)^3\right)}_{\mathcal{O}(x^3)}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

(c) Logarithmus-Reihe: $\forall |x| < 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4(x)$$

Beweis

$$\ln(1+x) = \int_0^x \underbrace{\frac{1}{1+t}}_{\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(-1)^n t^n} dt = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \underbrace{\int_0^x (-1)^n t^n \, dt}_{(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

Vertauschung nach Satz 6.27,

da $S_N(t) := \sum_{n=0}^{N} (-t)^n$ glm. kgt.

in $|t| \leq |x| < 1$ (Satz 4.23 + Bsp. 4.18(iii)) $\blacksquare$

Zusatz: Aussage bleibt wahr für $x = +1$;

verwende Abelschen Grenzwertsatz

(siehe z.B. Forster)

$$\Rightarrow \quad \ln 2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$