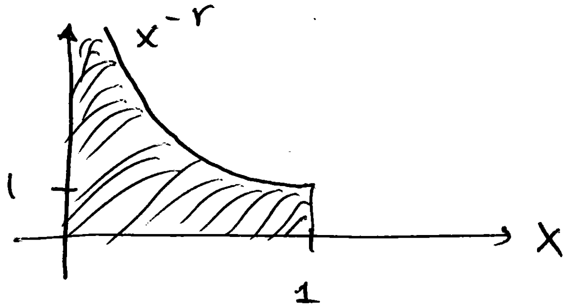
6.3. Uneigentliches Riemann-Integral

6.32. Motivation

- $0 < r < 1,\ a > 0 \Rightarrow \int_a^1 \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{1-r} x^{1-r}\Big|_a^1$

$$= \frac{1}{1-r}\left(1-a^{1-r}\right) \xrightarrow{a \downarrow 0} \frac{1}{1-r} \text{ existiert}$$

d.h. endliche Fläche

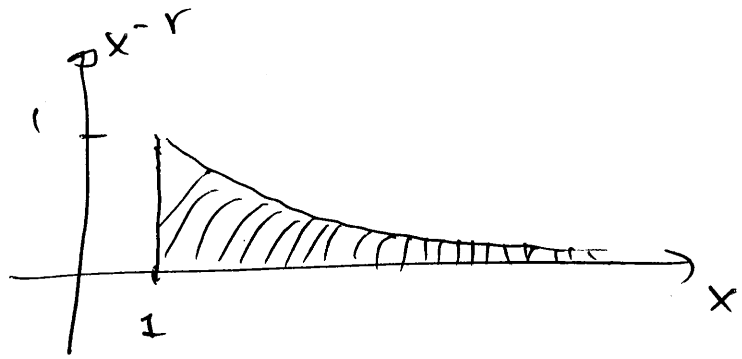


$\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,dx$ sollte def. sein, obwohl $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^r} = +\infty$, also nicht existiert,

also $x \mapsto \frac{1}{x^r}$ nicht Riemann-integr. auf $[0,1]$ da nicht beschr.

- $r > 1 \Rightarrow \int_1^b \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{1-r}\left(b^{1-r}-1\right) \xrightarrow{b \to \infty} \frac{1}{r-1}$ exist.

d.h. endliche Fläche



$\int_1^\infty \frac{1}{x^r}\,dx$ sollte def. sein, obwohl $[1,\infty[$ uneigentliches Intervall (nicht beschr.).

6.33. Definition

(a) Sei $f : [a,\infty[\to \mathbb{C}$, so dass $f : [a,b] \to \mathbb{C}$

Riemann-integrierbar $\forall\, b > a$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ uneigentlich Riemann-} \\ \text{integrierbar über (auf) } [a,\infty[\end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I := \lim\limits_{b\to\infty} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \\ \text{existiert} \end{array}\right.$$

Notation: $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx := I$

(analog für $]-\infty, a]$)

(b) Sei $f :]a,b] \to \mathbb{C}$, so dass $f : [a+\varepsilon, b] \to \mathbb{C}$

Riemann-integrierbar $\forall\, \varepsilon \in]0, b-a[$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ uneigentlich Riemann-} \\ \text{integrierbar über (auf) } [a,b] \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I := \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \displaystyle\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \\ \text{existiert} \end{array}\right.$$

Notation: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := I$

(analog für $f : [a,b[\to \mathbb{C}$)

(c) Analog für alle mögliche Kombinationen von (a) und (b)

6.34. Bemerkung

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar

$\Rightarrow$ f uneigentlich Riemann-integrierbar auf/über $[a,b]$

Bew.: z.B HDI 6.16, da

Stamfkt F diff.bar $\Rightarrow$ F stetig $\blacksquare$

6.35. Beispiel Sei $r \in]-1,\infty[$.

$$f: \begin{array}{l}]0,\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^r e^{-x} \end{array}$$ uneigentlich Riemann-integr. auf $[0,\infty[$.

zu zeigen: $\lim\limits_{a \searrow 0} \lim\limits_{b \nearrow \infty} \underbrace{\int_a^b x^r e^{-x}\,dx}_{\int_a^1 x^r e^{-x}\,dx + \int_1^M x^r e^{-x}\,dx + \int_M^b x^r e^{-x}\,dx}$ existiert

(Reihenfolge egal!)

$M \leftarrow$ wird später bestimmt

- untere Grenze: hier nur im Fall $r \in]-1,0[$ etwas zu zeigen (ansonsten ist f Riem. integr. auf $[0,1]$)

Sei also $r \in]-1,0[$ und $a \in]0,1[$:

$$\int_a^1 x^r e^{-x}\,dx \overset{PI}{=} \underbrace{\frac{1}{r+1} x^{r+1} e^{-x} \Big|_a^1}_{\frac{e^{-1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1} e^{-a}} + \int_a^1 \underbrace{\frac{x^{r+1}}{r+1}}_{} e^{-x}\,dx$$

stetig auf $[0,1]$, da $r+1>0$
$\Rightarrow$ R. integr. auf $[0,1]$

$$\xrightarrow{a \searrow 0} \frac{e^{-1}}{r+1} + \int_0^1 \frac{x^{r+1}}{r+1} e^{-x}\,dx \quad \text{existiert !}$$

- obere Grenze: Sei $M>1$ so groß, dass $x^{r+2} e^{-x} \leq 1 \quad \forall x \geq M$ (und $b>M$)

$$F(b) := \int_M^b \underbrace{x^r e^{-x}}_{\underbrace{x^{r+2} e^{-x}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{x^2}}\,dx \leq \int_M^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_M^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{M} \xrightarrow{b \nearrow \infty} \frac{1}{M}$$

da $b \mapsto F(b)$ isoton und beschränkt

$\Rightarrow \lim\limits_{b\to\infty} F(b)$ existiert

$\Rightarrow$ Beh. ✓

Zwei Anwendungen uneigentlicher Integrale:

6.36. Satz (Integralkriterium für Reihen)

Sei $f:[1,\infty[\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ antiton. Dann gilt $\forall N\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

Insbesondere: $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ kgt. $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx$ existiert

Beweis: Übung.

6.37. Definition Eulersche Gamma-Funktion (ca. 1730)

$$\Gamma: \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} \\ x \longmapsto \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \end{array}$$

(wohldef. als uneig. Riemann-Integral nach Bsp. 6.35)

6.38. Satz

(a) Funktionalgleichung: $x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \quad \forall x>0$

(b) $\Gamma(1)=1, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) \underset{\text{Subst } u=\sqrt{t}}{=} \underbrace{2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du}_{\text{Gauß-Integral}} = \sqrt{\pi}$

Beweis: (a) $\forall \varepsilon, R, x > 0$

$$\underbrace{\int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\,dt}_{\xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon\searrow 0}\ \Gamma(x+1)} \overset{PI}{=} \underbrace{-t^x e^{-t}\Big|_\varepsilon^R}_{\to\ 0} + x\underbrace{\int_\varepsilon^R t^{x-1}e^{-t}\,dt}_{\to\ \Gamma(x)}$$

(b) $\Gamma(1)=1$ klar, $\Gamma(\frac{1}{2})$ via Gauß-Integral (Üb.!)

6.39. Korollar $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Ind. Beweis. $n=0$: $\Gamma(1) = 1 = 0!$ (nach 6.38(b))

$n \to n+1$: $\Gamma(n+1) \underset{\uparrow 6.38(b)}{=} n \underbrace{\Gamma(n)}_{(n-1)!\ \text{Ind.-Ann.}} = n!$

6.40 Satz Stirling-Formel

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \gamma_n^- \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \gamma_n^+$

mit $\gamma_n^- := e^{\frac{1}{12n+1}}$, $\gamma_n^+ := e^{\frac{1}{12n}}$

Insbes. $n! \overset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ asymptotische Gleichheit

$$:\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1$$

Beweis: Wir zeigen nur schwächere Variante mit

$$\gamma_n^- = e^{\frac{1}{12(n+1)}} \quad \text{und} \quad \gamma_n^+ = e^{\frac{1}{12(n-1)}} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$$

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\ln k}_{\int_1^k \frac{1}{x}dx} = \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx$$

s. unten (*)

$$= \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx}_{(n+\frac{1}{2})\sum_{j=1}^{n-1}[\ln(j+1)-\ln j]} - \sum_{j=1}^{n-1}\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln n - \sum_{j=1}^{n-1}\underbrace{\int_j^{j+1}\frac{j+\frac{1}{2}-x}{x}\,dx}_{\int_0^1 \frac{1/2-x}{j+x}dx =: I_j} - n + 1$$

Begründung von (*): Sei $\Theta(y) := \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$

(Heaviside-Fkt.)

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} a_j}_{\sum_{j=1}^{n-1} \Theta(k-1-j) a_j} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \Theta(k-1-j)}_{\sum_{k=1+j}^{n} 1} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j (n-j).$$

Vertauschung endl. Summen

Beh.: (i) $\frac{1}{(j+1)^2} \leq 12 I_j \leq \frac{1}{j^2} \quad \forall j \in \mathbb{N}$ (Beweis unten)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} I_j =: 1 - \ln C \quad \text{existiert}$$

(ii) $\frac{1}{n+1} \leq 12 \sum_{j=n}^{\infty} I_j \leq \frac{1}{n-1}$

folgt aus Integralkriterium (Satz 6.36) und (i)

---

zu (i): nütze Wegheben positiver & negativer Anteile aus:

$$I_j = \int_0^{1/2} \frac{1/2 - x}{j+x}\,dx + \underbrace{\int_{1/2}^{1} \frac{1/2 - x}{j+x}\,dx}_{\int_0^{1/2} \frac{y - \frac{1}{2}}{j+1-y}\,dy}$$

$y = 1 - x$ (Subst)

$$= \int_0^{1/2} \left(\tfrac{1}{2} - x\right) \underbrace{\left[\frac{1}{j+x} - \frac{1}{j+1-x}\right]}_{\frac{\cancel{j}+1-x-\cancel{j}-x}{(j+x)(j+1-x)}} dx = 2 \int_0^{1/2} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} - x\right)^2}_{\geq 0} \underbrace{\frac{1}{(j+x)(j+1-x)}}_{=: A_j(x)}\,dx$$

Da $\bullet\ \forall x \in [0, \frac{1}{2}] : \frac{1}{(j+\frac{1}{2})(j+1)} \leq A_j(x) \leq \frac{1}{j(j+\frac{1}{2})}$

$\bullet\ \int_0^{1/2} (\frac{1}{2} - x)^2 dx = -\frac{1}{3}(\frac{1}{2} - x)^3 \Big|_0^{1/2} = +\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$

$$\Rightarrow \frac{1/12}{(j+\frac{1}{2})(j+1)} \leq I_j \leq \frac{1/12}{j(j+1/2)} \qquad \Rightarrow (i) \checkmark$$

Somit : $\ln(n!) \stackrel{(i)}{=} (n+\frac{1}{2})\ln n - n + \ln C + \sum_{j=n}^{\infty} I_j$

$$\Rightarrow n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} C \underbrace{e^{\sum_{j=n}^{\infty} I_j}}_{=: \phi_n} \qquad (1)$$

(ii)

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{12(n+1)}} \leq \frac{n!}{C\sqrt{n}\,(\frac{n}{e})^n} \leq e^{\frac{1}{12(n-1)}}$$

Es verbleibt zu zeigen: $C = (2\pi)^{+\frac{1}{2}}$

1.Schritt: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} C \phi_{2n}}{n^{2n+1} e^{-2n} C^2 (\phi_n)^2}$

$$\phi_n \xrightarrow{n \to \infty} 1 \Rightarrow C = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}} \qquad (2)$$

2.Schritt: Wallissches Produkt (siehe Blatt 1)

$$\pi = 2 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi} = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\sqrt{2n+1}}$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\frac{2^2\cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2}{(2n)!}}_{2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n)!}}}_{C/\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}}}_{1}$$

(2)

$\boxtimes$