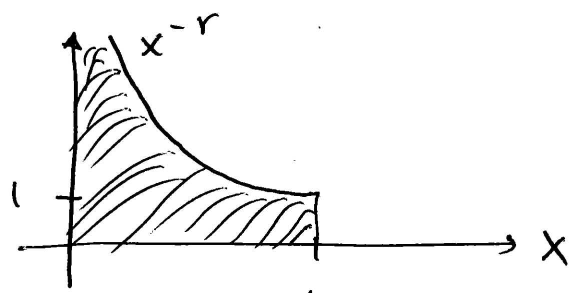
6.3. Uneigentliches Riemann-Integral

6.32. Motivation

- $0 < r < 1,\ a > 0 \Rightarrow \int_a^1 \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{1-r} x^{1-r}\Big|_a^1$

$$= \frac{1}{1-r}\left(1 - a^{1-r}\right) \xrightarrow{a \downarrow 0} \frac{1}{1-r} \quad \text{existiert}$$

d.h. endliche Fläche



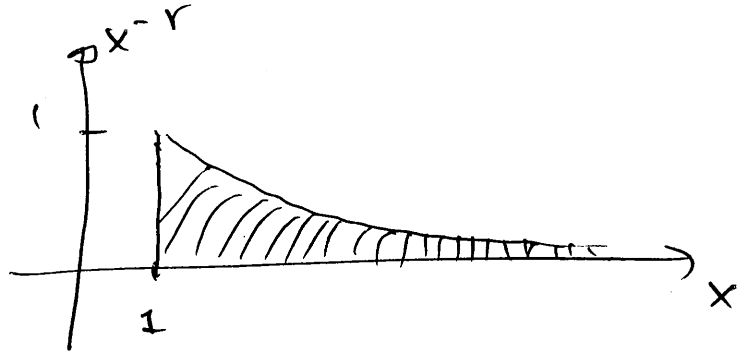
$\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,dx$ sollte def. sein, obwohl $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^r} = +\infty$, also nicht existiert,

also $x \mapsto \frac{1}{x^r}$ nicht Riemann-integr. auf $[0,1]$

da nicht beschr.

- $r > 1 \Rightarrow \int_1^b \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{1-r}\left(b^{1-r} - 1\right) \xrightarrow{b \to \infty} \frac{1}{r-1}$ exist.

d.h. endliche Fläche



$\int_1^\infty \frac{1}{x^r}\,dx$ sollte def. sein, obwohl $[1,\infty[$

uneigentliches Intervall

(nicht beschr.).

6.33. Definition

(a) Sei $f : [a,\infty[\to \mathbb{C}$, so dass $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar $\forall\, b > a$.

$$\left.\begin{array}{l} \underline{f \text{ uneigentlich Riemann-}} \\ \underline{\text{integrierbar über } [a,\infty[} \\ \text{(auf)} \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I := \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \\ \text{existiert} \end{array}\right.$$

Notation: $\int_a^\infty f(x)\,dx := I$

(analog für $]-\infty, a]$)

(b) Sei $f :]a,b] \to \mathbb{C}$, so dass $f : [a+\varepsilon, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar $\forall\, \varepsilon \in]0, b-a[$.

$$\left.\begin{array}{l} \underline{f \text{ uneigentlich Riemann-}} \\ \underline{\text{integrierbar über } [a,b]} \\ \text{(auf)} \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I := \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \\ \text{existiert} \end{array}\right.$$

Notation: $\int_a^b f(x)\,dx := I$

(analog für $f : [a,b[\to \mathbb{C}$)

(c) Analog für alle mögliche Kombinationen von (a) und (b)

6.34. Bemerkung

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar

$\Rightarrow$ f uneigentlich Riemann-integrierbar auf/über $[a,b]$

Bew.: z.B HDI 6.16, da

Stamfkt F diff.bar $\Rightarrow$ F stetig ∎

6.35. Beispiel Sei $r \in]-1,\infty[$.

$$f: \begin{array}{l}]0,\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^r e^{-x} \end{array}$$ uneigentlich Riemann-integr. auf $[0,\infty[$.

zu zeigen: $\lim\limits_{a \searrow 0} \lim\limits_{b \nearrow \infty} \underbrace{\int_a^b x^r e^{-x}\,dx}_{\int_a^1 x^r e^{-x}dx + \int_1^M x^r e^{-x}dx + \int_M^b x^r e^{-x}dx}$ existiert

(Reihenfolge egal!)

$M \leftarrow$ wird später bestimmt

- untere Grenze: hier nur im Fall $r \in]-1,0[$ etwas zu zeigen (ansonsten ist f Riem. integr. auf $[0,1]$)

Sei also $r \in]-1,0[$ und $a \in]0,1[$:

$$\int_a^1 x^r e^{-x}\,dx \overset{PI}{=} \underbrace{\frac{1}{r+1} x^{r+1} e^{-x}\Big|_a^1}_{\frac{e^{-1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1} e^{-a}} + \int_a^1 \underbrace{\frac{x^{r+1}}{r+1}}_{\substack{\text{stetig auf } [0,1], \text{ da } r+1>0 \\ \Rightarrow \text{ R. integr. auf } [0,1]}} e^{-x}\,dx$$

$$\xrightarrow{a \searrow 0} \frac{e^{-1}}{r+1} + \int_0^1 \frac{x^{r+1}}{r+1} e^{-x}\,dx \quad \text{existiert!}$$

- obere Grenze: Sei $M > 1$ so groß, dass $x^{r+2} e^{-x} \le 1 \quad \forall x \ge M$ (und $b > M$)

$$F(b) := \int_M^b \underbrace{x^r e^{-x}}_{\underbrace{x^{r+2}e^{-x}}_{\le 1} \cdot \frac{1}{x^2}}\,dx \le \int_M^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_M^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{M} \xrightarrow{b \nearrow \infty} \frac{1}{M}$$

da $b \mapsto F(b)$ isoton und beschränkt

$\Rightarrow \lim\limits_{b \to \infty} F(b)$ existiert

$\Rightarrow$ Beh. ✓

Zwei Anwendungen uneigentlicher Integrale:

6.36. Satz (Integralkriterium für Reihen)

Sei $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ antiton. Dann gilt $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

Insbesondere: $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ kgt. $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx$ existiert

Beweis: Übung.

6.37. Definition Eulersche Gamma-Funktion (ca. 1730)

$$\Gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} & \to & \mathbb{R}_{>0} \\ x & \longmapsto & \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt \end{array}$$

(wohldef. als uneig. Riemann-Integral nach Bsp. 6.35)

6.38. Satz

(a) Funktionalgleichung: $x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \quad \forall x > 0$

(b) $\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) \underset{\text{Subst } u=\sqrt{t}}{=} 2\underbrace{\int_0^\infty e^{-u^2}\,du}_{\text{Gauß-Integral}} = \sqrt{\pi}$

Beweis: (a) $\forall \varepsilon, R, x > 0$

$$\int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\,dt \overset{PI}{=} -t^x e^{-t}\Big|_\varepsilon^R + x\underbrace{\int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t}\,dt}$$

$\varepsilon \searrow 0$, $R \to \infty$: $\quad \Gamma(x+1) \qquad 0 \qquad \Gamma(x)$

(b) $\Gamma(1) = 1$ klar, $\Gamma(\tfrac{1}{2})$ via Gauß-Integral (Üb.!)

6.39. Korollar $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Ind. Beweis. $n=0$: $\Gamma(1) = 1 = 0!$ (nach 6.38(b))

$n \to n+1$: $\Gamma(n+1) \underset{\uparrow 6.38(b)}{=} n\,\underbrace{\Gamma(n)}_{(n-1)!\ \text{Ind.-Ann.}} = n!$ ■

6.40 Satz Stirling-Formel

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \gamma_n^- \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \gamma_n^+$

mit $\gamma_n^- := e^{\frac{1}{12n+1}}$, $\gamma_n^+ := e^{\frac{1}{12n}}$

Insbes. $n! \overset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ asymptotische Gleichheit

$$:\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1$$

Beweis: Wir zeigen nur schwächere Variante mit

$$\gamma_n^- = e^{\frac{1}{12(n+1)}} \quad \text{und} \quad \gamma_n^+ = e^{\frac{1}{12(n-1)}} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$$

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\ln k}_{\int_1^k \frac{1}{x}dx} = \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx$$

s. unten (*)

$$= \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx}_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{n-1}\left[\ln(j+1)-\ln j\right]} - \sum_{j=1}^{n-1}\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln n - \sum_{j=1}^{n-1}\underbrace{\int_j^{j+1}\frac{j+\frac{1}{2}-x}{x}\,dx}_{\int_0^1 \frac{1/2-x}{j+x}dx =: I_j} - n + 1$$

Begründung von (*): Sei $\Theta(y) := \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$

(Heaviside-Fkt.)

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} a_j}_{\sum_{j=1}^{n-1} \Theta(k-1-j) a_j} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \Theta(k-1-j)}_{\sum_{k=1+j}^{n} 1} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j (n-j).$$

Vertauschung end. Summen

Beh.: (i) $\frac{1}{(j+1)^2} \leq 12 I_j \leq \frac{1}{j^2} \quad \forall j \in \mathbb{N}$ (Beweis unten)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} I_j =: 1 - \ln C \quad \text{existiert}$$

(ii) $\frac{1}{n+1} \leq 12 \sum_{j=n}^{\infty} I_j \leq \frac{1}{n-1}$

folgt aus Integralkriterium (Satz 6.36) und (i)

---

zu (i): nütze Wegheben positiver & negativer Anteile aus:

$$I_j = \int_0^{1/2} \frac{1/2 - x}{j+x}\,dx + \underbrace{\int_{1/2}^{1} \frac{1/2 - x}{j+x}\,dx}_{\int_0^{1/2} \frac{y-\frac{1}{2}}{j+1-y}\,dy} \quad y = 1-x \text{ (Subst)}$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\tfrac{1}{2} - x\right) \underbrace{\left[\frac{1}{j+x} - \frac{1}{j+1-x}\right]}_{\frac{j+\cancel{1}-x-\cancel{j}-x}{(j+x)(j+1-x)}} dx = 2 \int_0^{1/2} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} - x\right)^2}_{\geq 0} \underbrace{\frac{1}{(j+x)(j+1-x)}}_{=: A_j(x)}\,dx$$

Da $\bullet\ \forall x \in [0,\tfrac{1}{2}]: \dfrac{1}{(j+\frac{1}{2})(j+1)} \le A_j(x) \le \dfrac{1}{j(j+\frac{1}{2})}$

$\bullet\ \displaystyle\int_0^{1/2} (\tfrac{1}{2}-x)^2 dx = -\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}-x)^3\Big|_0^{1/2} = +\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{24}$

$$\Rightarrow \frac{1/12}{(j+\frac{1}{2})(j+1)} \le I_j \le \frac{1/12}{j(j+1/2)} \Rightarrow (i) \checkmark$$

Somit: $\ln(n!) \overset{(i)}{=} (n+\tfrac{1}{2})\ln n - n + \ln C_1 + \sum_{j=n}^{\infty} I_j$

$$\Rightarrow n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} C_1 \underbrace{e^{\sum_{j=n}^{\infty} I_j}}_{=:\phi_n} \qquad (1)$$

(ii)

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{12(n+1)}} \le \frac{n!}{C_1\sqrt{n}\,(\frac{n}{e})^n} \le e^{\frac{1}{12(n-1)}}$$

Es verbleibt zu zeigen: $C_1 = (2\pi)^{+\frac{1}{2}}$

1. Schritt: $\displaystyle\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \overset{(1)}{=} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} C_1 \phi_{2n}}{n^{2n+1} e^{-2n} C_1^2 (\phi_n)^2}$

$$\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow C = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}} \qquad (2)$$

2. Schritt: Wallissches Produkt (siehe Blatt 1)

$$\pi = 2\prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi} = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\sqrt{2n+1}}$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\frac{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (2n)^2}{(2n)!}}_{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}}}_{(2)\qquad C/\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}}}_{1}$$

$\boxtimes$

6.4. Taylor-Reihen

Bekannt: Potenzreihen definieren Funktionen

Frage: Lässt sich geg. Fkt. als Potenzreihe darstellen?

Dafür hilft

6.41 Satz (Taylor, 1715)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $a \in I$, $f: I \to \mathbb{C}$ $(n+1)$-mal stetig diff-bar. Dann gilt, $\forall x \in I$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu}_{=: T_{n,a}(x) =: T_n(x)} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt}_{=: R_{n,a}(x) =: R_n(x)}$$

T_n: n-tes Taylor-Polynom (bei a) $\qquad$ R_n: n'tes Restglied (bei a)

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

(Taylor) „Entwicklung von f um a"

Beweis: Zeige ~~ind.~~ rekursiv $f = T_j + R_j \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$

$j = 0$: $T_0(x) + R_0(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \overset{HDI}{=} f(x) \quad \forall x \in I$ ✓

$j-1 \to j$:

gelte also $f = T_{j-1} + R_{j-1}$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$.

Da
$$R_{j-1}(x) = \frac{1}{(j-1)!}\int_a^x f^{(j)}(t)\underbrace{(x-t)^{j-1}}_{-\frac{1}{j}\frac{d}{dt}(x-t)^j}dt$$

$$\overset{\text{PI},\ f^{(j)} \text{ stetig diff.bar für } j\le n}{=} -\frac{1}{j} f^{(j)}(t)(x-t)^j \Big|_a^x + \frac{1}{j}\int_a^x f^{(j+1)}(t)(x-t)^j\,dt$$

$$= \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a)^j + R_j(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{T_{j-1}(x) + \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a)^j}_{T_j(x)} + R_j(x) \quad \forall x \in I$$

∎

6.42 Satz (Lagrange-Form des Restglieds)

Vorauss. wie in Satz 6.41 und zusätzlich $f(I) \subseteq \mathbb{R}$.

Dann gilt: $\forall x \in I\ \exists$ Zwischenwert $\xi = \xi_{x,a,n} \in \begin{cases} [x,a] & \text{falls } x < a \\ [a,x] & \text{falls } x \ge a \end{cases}$

so dass
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Beweis: Fall: $x \ge a$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\underbrace{(x-t)^n}_{\ge 0}dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\underbrace{\int_a^x (x-t)^n dt}_{-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}\Big|_a^x}$$

Mittelwertsatz d. Integralrechnung 6.15 ($\exists \xi$ ..)

Fall: $x < a$ analog; Satz 6.15 gilt auch für $g \le 0$!

∎

6.43. Definition (Landau-Symbole)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Sei $g \neq 0$ „in der Nähe" von x_0, d.h.

- falls $x_0 \in \mathbb{R}$: $\exists \varepsilon > 0 : x \in \,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\} \Rightarrow g(x) \neq 0$
- falls $x_0 = \infty$: $\exists N \in \mathbb{N} : x > N \Rightarrow g(x) \neq 0$
- falls $x_0 = -\infty$: " $x < -N \Rightarrow g(x) \neq 0$.

$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to x_0$ („f ist groß-O von g") $:\Leftrightarrow \limsup\limits_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$

$f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$ („f ist klein-O von g") $:\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

6.44 Korollar Unter den Vor. von Satz 6.41 gilt, für $x \to a$:

$$R_{n,a}(x) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1}), \text{ insbes.}$$

$$R_{n,a}(x) = o((x-a)^n).$$

Beweis: Separate Anwendung von Satz 6.42 auf Re f und Im f

$\Rightarrow$ $\exists$ Zwischenwerte $\xi_1, \xi_2 \in \begin{matrix} [x,a] \\ [a,x] \end{matrix}$ für $\begin{matrix} x < a \\ x \geq a \end{matrix}$:

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{\mathrm{Re}\, f^{(n+1)}(\xi_1) + i\, \mathrm{Im}\, f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}$$

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(a)|}{(n+1)!} < \infty$$

da:
- $x \to a \Rightarrow \xi_1, \xi_2 \to a$
- $f^{(n+1)}$ stetig. ∎

6.45 Korollar (Entwicklung in Taylor-Reihe)

Sei $f: I \to \mathbb{C}$ bel. oft diff.-bar, seien $a, x \in I$. Äquiv. sind:

(i) $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ (Taylor-Reihe von f um a)

(ii) $\lim_{n \to \infty} R_{n,a}(x) = 0$

6.46. Bemerkungen

(a) Alle Eigenschaften von Potenzreihen $\sum_n c_n x^n$ in Kap. 4 gelten analog für $\sum_n c_n (x-a)^n$

(b) Warnung: Es kann sein, dass $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ kgt., aber nicht gegen $f(x)$! In dem Fall gilt $\lim_{n \to \infty} R_{n,a}(x)$ existiert und $\neq 0$ (vgl. Üb.!)

(c) Falls $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} c_n (x-a)^n$ Potenzreihe, kgt. für $|x-a| < R$, $R > 0$ (R: Konv.-radius)

$\Rightarrow$ Potenzreihe = Taylor-Reihe, da:

Kor 6.30 $\Rightarrow$

$$f^{(k)}(a) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} c_n \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^n \Big|_{x=a}}_{\delta_{k,n} \cdot n!} = c_k k!$$

Kronecker-delta: $\delta_{k,n} := \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$.

6.47. Beispiele

(a) Sei $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x)^\alpha$

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)\,(1+x)^{\alpha-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \underset{(a=0)}{R_{3,0}(x)}$$

Es gilt: $R_{n,0}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall |x| < 1$ (siehe z.B. Forster)

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha+1-j}{j}\right)}_{=:\binom{\alpha}{n}} x^n \quad \forall |x| < 1$$

($\Leftarrow$ stimmt für $\alpha \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!\,n!}$ überein)

Spezialfälle:

- $\alpha = -1$: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad (x \to 0)$
- $\alpha = \frac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^4) \quad (x \to 0)$

(b) Effizientes Berechnen des Taylor-Polynoms um 0 von

$f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ bis auf Terme $\mathcal{O}(x^3)$:

$$f(x) = e^{1 + x/2 - x^2/8 + \mathcal{O}(x^3)} = e \cdot e^{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{e} = 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right) + \frac{1}{2!}\underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right)^2}_{\frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^3)}$$

$$+ \underbrace{\mathcal{O}\left(\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right)^3\right)}_{\mathcal{O}(x^3)}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

(c) Logarithmus-Reihe: $\forall |x| < 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4(x)$$

Beweis

$$\ln(1+x) = \int_0^x \underbrace{\frac{1}{1+t}}_{\sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n t^n} dt = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \underbrace{\int_0^x (-1)^n t^n \, dt}_{(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

Vertauschung nach Satz 6.27,

da $S_N(t) := \sum_{n=0}^{N} (-t)^n$ glm. kgt.

in $|t| \leq |x| < 1$ (Satz 4.23 + Bsp. 4.18 (iii)) ∎

Zusatz: Aussage bleibt wahr für $x = +1$;

verwende Abelschen Grenzwertsatz

(siehe z.B. Forster)

$$\Rightarrow \quad \ln 2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$