10. Topologische Räume

10.1. Grundlegende Begriffe

10.1. Definition Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge

- $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Topologie auf X

  $:\Leftrightarrow$ (1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

  (2) $\mathcal{T}$ abgeschlossen unter bel. Vereinigungen, d.h.: Sei J Indexmenge, sei $A_j \in \mathcal{T}$ $\forall j \in J$ $\Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$

  (3) $\mathcal{T}$ abgeschlossen unter endlichen Schnitten, d.h.: Sei $N \in \mathbb{N}_0$, sei $A_n \in \mathcal{T}$ $\forall n = 1, \dots, N$ $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{T}$

Konvention: $\bigcap_{j \in \emptyset} A_j := X$; $\bigcup_{j \in \emptyset} A_j := \emptyset$; Also (1) folgt aus (2), (3).

- $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum (oft nur X)

- $A \in \mathcal{P}(X)$ offen $:\Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$

- Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf X

  $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$ $:\Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$

  ($\Leftrightarrow$: $\mathcal{T}_2$ gröber als $\mathcal{T}_1$)

10.2. Beispiele

(a) Indiskrete Topologie: $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ gröbste Top. auf X

(b) Diskrete Topologie: $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ feinste Top. auf X

(c) (X, d) metr. Raum und $\mathcal{T}_d := \{A \in \mathcal{P}(X) : \forall x \in A \, \exists r = r_x > 0 : B_r(x) := \{y \in X : d(x,y) < r\} \subseteq A\}$

$\rightsquigarrow$ metrische Topologie (nach Satz 7.15) — offene Mengen in (X,d)

Induzierte Topologie auf Teilmengen:

10.3. Definition $(X, \mathcal{T})$ top. Raum und $A \subseteq X$ (nicht notw. $\in \mathcal{T}$)

Relativtopologie auf A: $\mathcal{T}_A := \{C \cap A : C \in \mathcal{T}\}$

(auch: Spurtopologie, Teilraumtop., induzierten Top.)

10.4. Bemerkung

- $\mathcal{T}_A$ ist Topologie auf A (checken!)
- Warnung: Falls $A \notin \mathcal{T}$ und $C \cap A \in \mathcal{T}_A$ $\overset{\text{i.A.}}{\not\Rightarrow}$ $C \cap A \in \mathcal{T}$

Bsp: $X := \mathbb{R}$ mit metr. Top. von $|\cdot|$

$A := [0,1]$, $C :=]-1, \frac{1}{2}[\in \mathcal{T} \Rightarrow C \cap A = [0, \frac{1}{2}[\in \mathcal{T}_A$, $\notin \mathcal{T}$

- Falls $\mathcal{T}_d$ metrische Top. auf metr. Raum (X, d)

$\Rightarrow$ $\mathcal{T}_A$ ist metr. Top. auf metr. Raum $(A, d|_{A\times A})$,

checken!

d.h. $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_{d|_{A\times A}}$ (siehe 7.3(c))

10.5. Definition Sei X top. Raum, $A \subseteq X$, $x \in X$

(a) A abgeschlossen $:\Leftrightarrow A^c := X \setminus A$ offen

(b) $U \subseteq X$ Umgebung von $x \in X$ $\Big\}$ $:\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{T}$ mit $x \in A \subseteq U$

(c) X Hausdorff-Raum $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall x, y \in X \text{ mit } x \neq y: \\ \exists \text{ Umgebungen } U \text{ von } x \text{ und} \\ V \text{ von } y \text{ mit } U \cap V = \emptyset \end{cases}$

(d) x Randpkt. von A $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall \text{ Umgebungen } U \text{ von } x \text{ gilt:} \\ U \cap A \neq \emptyset \text{ und } U \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$

$\partial A := \{x \in X : x \text{ ist Randpkt. von } A\}$

(e) $\mathring{A} := A \setminus \partial A$ Inneres von A

$\bar{A} := A \cup \partial A$ Abschluss von A

(f) A dicht in X $:\Leftrightarrow \bar{A} = X$

Analog zu Def. 7.12(c) hat man

10.6. Lemma Sei X top. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt:

A offen (d.h. $A \in \mathcal{T}$) $\Leftrightarrow \forall x \in A \; \exists$ Umgebung U von x mit $U \subseteq A$

Beweis

"$\Leftarrow$" per Def. der Umgebung gilt: $\forall x \in A$ $\exists A_x \in \mathcal{T}$ (also offen) mit $x \in A_x$ und $A_x \subseteq A$

$$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} A_x \overset{\text{Def. 10.1.(2)}}{\Rightarrow} A \in \mathcal{T}$$

"$\Rightarrow$" wähle $U = A$ $\forall x \in A$ ∎

10.7. Bemerkung

(a) Def. 10.5. (a), (b), (d), (e) konsistent mit Spezialfällen für metr. Räume (Def. 7.12 (b), 7.17, 7.19)

(b) (X, d) metr. Raum $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_d)$ Hausdorff-Raum

↑ Satz 7.14.

(c) Sätze 7.21 und 7.22 gelten auch für topol. Räume. (checken!)

(d) $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ (per Konstruktion von $\mathbb{R}$; vgl. Satz 2.61).

$\boxed{\text{10.8. Definition}}$ Sei $(X, \mathcal{T})$ top. Raum, und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ eine Familie offener Mengen.

- $\mathcal{B}$ Basis für $\mathcal{T}$ $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{T} = \{$ bel. Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$ $\}$
- $\mathcal{B}$ Subbasis für $\mathcal{T}$ $:\Leftrightarrow$ $\{$ endliche Schnitte von Mengen aus $\mathcal{B}\}$ ist Basis für $\mathcal{T}$
- $\mathcal{B}$ Umgebungsbasis von $x \in X$

$:\Leftrightarrow$ (i) $\forall B \in \mathcal{B}$: B ist Umgebung von x

(ii) $\forall$ Umgebung $\mathcal{U}$ von x $\exists B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq \mathcal{U}$

10.9. Lemma Sei (X, d) metr. Raum. Dann gilt:

(a) $\{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ ist Umgebungsbasis von $x \in X$ für $\mathcal{T}_d$

(b) $\{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}, x \in X\}$ ist Basis für $\mathcal{T}_d$

(c) Sei A dicht in X

$\Rightarrow \{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}, x \in A\}$ ist Basis für $\mathcal{T}_d$

Beweis: (a) aus Def. 7.12 (b)

(b) aus (c) mit $A = X$

(c): Sei $G \in \mathcal{T}_d$ und $x \in G$; $\Rightarrow \exists\, \varepsilon := \varepsilon_x > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq G$

Sei $n := n_x \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $\overline{A} = X \Rightarrow$

$B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$; wähle $a := a_x \in B_{1/n}(x) \cap A$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bullet\ x \in B_{1/n}(a) \\ \bullet\ B_{1/n}(a) \subseteq G \end{array}\right\} \Rightarrow G = \bigcup_{x \in G} B_{\frac{1}{n_x}}(a_x)$$

Δ's-Ungl. für $y \in B_{1/n}(a)$:

$$d(x,y) \leq \underbrace{d(x,a)}_{< \frac{1}{n}} + \underbrace{d(a,y)}_{< \frac{1}{n}} < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

10.10. Definition Sei X topol. Raum.

- X separabel $:\Leftrightarrow \exists\, A \subseteq X$ abzählbar mit $\overline{A} = X$
- X erfüllt erstes Abzählbarkeitsaxiom (1. AA) $:\Leftrightarrow$ jedes $x \in X$ besitzt abzählbare Umgebungsbasis
- X erfüllt zweites Abzählbarkeitsaxiom (2. AA) $:\Leftrightarrow$ $\exists$ abzählbare Subbasis der Topologie

10.11. Bemerkungen

(a) $\exists$ abzählbar Subbasis $\Leftrightarrow$ $\exists$ abzählbar Basis

denn: "$\Leftarrow$": jede Basis ist auch Subbasis

"$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{S}$ abz. Subbasis $\Rightarrow$ zugehörige Basis

$$\mathcal{B} := \bigcup_{N \in \mathbb{N}_0} \underbrace{\{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ ist Schnitt von } N \text{ Mengen aus } \mathcal{S}\}}_{=: \mathcal{B}_N}$$

Die Abb.

$$\overbrace{\mathcal{S} \times \dots \times \mathcal{S}}^{N \text{ Faktoren } (=: \mathcal{S}^N)} \longrightarrow \mathcal{B}_N$$

$$(B_1, \dots, B_N) \longmapsto B_1 \cap \dots \cap B_N$$

ist surjektiv

und da $\mathcal{S}^N$ abzählbar (endl. Kartes. Produkt abz. Mengen (Satz 2.101)) $\overset{\text{Def. 2.96}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{B}_N$ abzählbar $\overset{\text{Satz 2.99}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{B}$ abzählbar (abz. Vereinigung abz. Mengen)

(b) Sei (X, d) metr. Raum $\underset{\text{Lemma 10.9(a)}}{\Longrightarrow}$ X erfüllt 1. AA.

(c) Sei X überabzählbar mit diskreter Topologie ($\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$)

$\Rightarrow$ $\forall x \in X$ gilt: $\{x\} \in \mathcal{T}$ $\Rightarrow$ $\{x\}$ ist Umgebung von x

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}_x := \{\{x\}\}$ ist Umgebungsbasis von x,

also X erfüllt 1. AA.

aber: für jede Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{T}$ gilt:

$$\mathcal{B} \supseteq \bigcup_{x \in X} \{\{x\}\}$$

– also X erfüllt nicht 2. AA.

Das 2. AA ist tatsächlich stärker als das 1. AA.:

10.12. Satz Sei X topol. Raum. Dann gilt:

X erfüllt 2. AA $\Rightarrow$ X erfüllt 1. AA und ist separabel

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ abzählbare Basis von $\mathcal{T}$, sei $x \in X$

- $\Rightarrow \mathcal{N}_x := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ ist Umgebungsbasis von x

  $\Rightarrow \mathcal{N}_x$ abzählbar $\Rightarrow$ 1. AA ✓

- $\forall\, \emptyset \neq B \in \mathcal{B}$ wähle $x_B \in B$

  $\Rightarrow \quad A := \{x_B \in X : \emptyset \neq B \in \mathcal{B}\}$ abzählbar

Beh: $\overline{A} = X$ (also X separabel ✓)

da $\forall x \in X$ $\forall$ Umgebung $\mathcal{U}$ von x gilt:

$\exists\, G \in \mathcal{T}$ mit $x \in G \subseteq \mathcal{U}$. Da G Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B} \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ ∎

In metr. Räumen gilt auch die Umkehrung (siehe Lem. 10.9(c))

10.13. Korollar Sei (X, d) metr. Raum. Dann gilt

$$X \text{ separabel} \Leftrightarrow X \text{ erfüllt 2. AA}$$

(das 1. AA ist nach Bem. 10.11(b) sowieso erfüllt)

10.14. Beispiel

$\mathbb{R}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, ist separabel, da $\mathbb{Q}^\nu$ dicht in $\mathbb{R}^\nu$

$\overset{\text{Kor. 10.13}}{\Longrightarrow}$ 2. AA $\overset{\text{Satz 10.12}}{\Longrightarrow}$ 1. AA.

[Wenn nichts weiter spezifiziert, so wird $\mathbb{R}^\nu$ mit metr. Topol. der Euklid. Norm $\|\cdot\|_2$ versehen.]

10.2. Limiten und Stetigkeit

10.15. Definition Sei X topol. Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kgt. gegen $x \in X$ $:\Leftrightarrow$ $\forall$ Umgebungen $\mathcal{U}$ von x: $\exists$ höchstens endlich viele $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k \notin \mathcal{U}$.

(d.h. $\forall$ Umgeb. $\mathcal{U}$ von x $\exists N = N(x,\mathcal{U})$: $k \geq N \Rightarrow x_k \in \mathcal{U}$)

in Zeichen:

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ oder $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$

10.16. Bemerkung: (a) Def. konsistent mit Kgz. in metr. Räumen

(b) Je gröber die Topologie, desto „leichter" kgt. eine Folge

Extremfälle
- X mit indiskreter Topologie $\mathcal{T} = \{\phi, X\}$

  $\Rightarrow$ jede Folge kgt. gegen jedes $x \in X$
- X mit diskreter Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$:

  $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \Leftrightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}: x_k = x \;\forall k \geq k_0$.

10.17. Satz Sei X Hausdorff-Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$

Dann existiert höchstens ein $x \in X$ mit $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$,

d.h. Grenzwerte sind, falls existiert, eindeutig.

Beweis. Es gelte $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$, $x_k \xrightarrow{k\to\infty} y$ und $x \neq y$

$\overset{\text{Hausdorff}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \mathcal{U}_x$ (bzw. $\mathcal{U}_y$) Umgebung von x (bzw y) mit $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \phi$.

da $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \Rightarrow \exists$ höchstens endlich viele $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in \mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}_x^C$ – also $\lightning$ zu $x_k \to y$ ∎

10.18. Definition Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topol. Räume, sei $f: X \to Y$.

- f stetig $:\iff \forall A \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$
  („Urbilder offener Mengen sind offen")
- f folgenstetig $:\iff \begin{cases} \text{Falls } x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \quad (\text{in } X) \\ \Rightarrow f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x) \quad (\text{in } Y) \end{cases}$

(Def'en konsistent mit denen für metr. Räume; für „stetig" siehe Satz 7.37).

10.19. Satz Seien X, Y topol. Räume und $f: X \to Y$.
Dann gilt
(a) f stetig $\Rightarrow$ f folgenstetig
(b) $\left.\begin{array}{l} f \text{ folgenstetig und} \\ X \text{ erfüllt 1. AA} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ stetig

Wegen Bem. 10.11(b) gilt

10.20 Korollar Sei X metr. Raum, Y top. Raum, $f: X \to Y$
Dann gilt $\qquad f$ stetig $\iff f$ folgenstetig
(vgl. Satz 7.30)

Beweis von Satz 10.19:

(a) Sei $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$, sei $V \subseteq Y$ bel. Umgebung von $f(x)$ und $U := f^{-1}(V)$

n. V. ist U offen und $x \in U \Rightarrow U$ Umgebung von x

$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad x_k \in U \quad \forall k \geq k_0$

$\Rightarrow \quad$ " $\quad : \quad f(x_k) \in f(U) \subseteq V \quad \forall k \geq k_0$

also $f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x)$ ✓

(b) Ann: f nicht stetig.

$\Rightarrow \exists V \subseteq Y$ offen mit $f^{-1}(V)$ nicht offen in X.

Lemma 10.6
$\Rightarrow$ $\exists x \in f^{-1}(V)$, so dass $\forall$ Umgebungen $\mathcal{U}$ von x:

$\mathcal{U} \cap (f^{-1}(V))^c \neq \emptyset$ (1)

n.V. $\exists$ abz. Umgebungsbasis $\{\mathcal{U}_k : k \in \mathbb{N}\}$ von x;

setze $\tilde{\mathcal{U}}_k := \bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{U}_j \Rightarrow$ (2) $\tilde{\mathcal{U}}_k \supseteq \tilde{\mathcal{U}}_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

(3) $\tilde{\mathcal{U}}_k$ Umgebung von x, $\forall k$

$(1) \wedge (3) \overset{\forall k \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} \exists x_k \in \tilde{\mathcal{U}}_k \cap (f^{-1}(V))^c$

$\Rightarrow$ • $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$ (denn: Sei $\mathcal{U}'$ bel. Umgeb. von x

$\{\mathcal{U}_k\}$ Umg.basis
$\Rightarrow$ $\exists k' \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}_{k'} \supseteq \tilde{\mathcal{U}}_{k'}$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $x_k \in \mathcal{U}'$ $\forall k \geq k'$)

• $\forall k \in \mathbb{N}$: $f(x_k) \notin V$

V Umgeb. von $f(x)$
$\Rightarrow$ $f(x_k) \not\to f(x)$ ↯

$\blacksquare$

10.21. Bemerkung

(a) Bsp. für folgenstetige, aber nicht stetige Fkt, siehe Präsenzübung.

(b) Verallg. von Folgen auf gerichtete Indexmengen J (statt $\mathbb{N}$):

$(x_j)_{j\in J}$ (Netz). Dann gilt (ohne 1. AA!):

f netzstetig $\Leftrightarrow$ f stetig

Eine Indexmenge J ist gerichtet $:\Leftrightarrow$

$\exists$ Relation $\triangleleft$ auf J mit

- $j \triangleleft j \quad \forall j \in J$ (reflexiv)
- $j \triangleleft k \wedge k \triangleleft l \Rightarrow j \triangleleft l \quad \forall j,k,l \in J$ (transitiv)
- $\forall j,k \in J \; \exists l \in J : j \triangleleft l \wedge k \triangleleft l$

10.3. Kompaktheit

10.22. Definition Sei X topol. Raum, sei $A \subseteq X$

- A kompakt $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{falls } A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,\ \emptyset \neq \Lambda \text{ Indexmenge}, \\ \quad U_\lambda \text{ offen } \forall \lambda \in \Lambda \\ \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \text{ und } \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda: \\ \quad A \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} U_{\lambda_n} \end{cases}$

„jede offene Überdeckung besitzt endliche Teilüberdeckung"
(Heine-Borel-Eigenschaft).

- A folgenkompakt $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{jede Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \\ \text{besitzt kgt'e Teilfolge in } A, \\ \text{d.h. } \exists x \in A,\ \exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \\ \text{strikt isoton mit } x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x \end{cases}$

(Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft).

10.23. Satz Sei X topol. Raum

(a) Falls X erfüllt 1.AA, dann gilt:

X kompakt $\Rightarrow$ X folgenkompakt

(b) Falls X erfüllt 2.AA, dann gilt:

X kompakt $\Leftrightarrow$ X folgenkompakt

[(a) verallg. "$\Rightarrow$" in Satz 7.40]

Im Beweis von Satz 10.23 wird gebraucht:

$\boxed{\text{10.24. Satz}}$ (Lindelöf)

Sei $\mathbb{X}$ topol. Raum, der 2. AA. genügt, und $\mathbb{X} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda$ eine offene Überdeckung. Dann $\exists$ abzählbare Teilüberdeckung, d. h. $\exists (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Lambda$ (Folge in Λ) mit $\mathbb{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{\lambda_n}$.

Beweis: Sei $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ Basis der Topologie (abzählbar!)

sei $\mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N} : \exists \lambda \in \Lambda$ mit $B_n \subseteq \mathcal{U}_\lambda\}$

jedes $\mathcal{U}_\lambda$ ist Vereinigung aus B_n's $\Longrightarrow$

$$\bigcup_{n \in \mathcal{N}} B_n = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda = \mathbb{X} \qquad (*)$$

$\forall n \in \mathcal{N}$ wähle $\lambda_n \in \Lambda : B_n \subseteq \mathcal{U}_{\lambda_n}$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad X = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} B_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathcal{N}} \mathcal{U}_{\lambda_n} \Rightarrow \mathbb{X} = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} \mathcal{U}_{\lambda_n}$$ abz. Teilüberdeckung ☒

Beweis von Satz 10.23.:

(a) per Widerspruch: Ann.: $\exists$ Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{X}$ ohne kgt'e Teilfolge. $\Big\}$ (WA)

Beh: $\forall x \in \mathbb{X}$ $\exists$ offene Umgebung $\mathcal{U}(x)$ mit $x_n \in \mathcal{U}(x)$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Bew: ebenfalls per Widerspruch; also

Ann: $\exists x \in \mathbb{X}$ $\forall$ offenen Umg. $\mathcal{U}(x)$ von x: $x_n \in \mathcal{U}(x)$ für ∞-viele $n \in \mathbb{N}$ $\Big\}$ $(*)$

1\. AA $\Rightarrow \exists$ abz. Umgebungsbasis $\{\tilde{V}_j : j \in \mathbb{N}\}$ von x aus (*)

Sei $V_k := \bigcap_{j=1}^{k} \tilde{V}_j$ für $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \{V_k : k \in \mathbb{N}\}$ ebenfalls Umgebungsbasis von x (mit $V_{k+1} \subseteq V_k \; \forall k \in \mathbb{N}$)

$\overset{(*) \text{ mit } V_k}{\Longrightarrow}$ $\forall k \in \mathbb{N} : x_n \in V_k$ für ∞-viele $n \in \mathbb{N}$.

Wähle induktiv strikt isotone Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, so dass

$$x_{n_k} \in V_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\overset{V_{k+1} \subseteq V_k}{\Longrightarrow}$ $\forall k \in \mathbb{N}, \forall k' \geq k : x_{n_{k'}} \in V_k \overset{\{V_k\}_k \text{ Umg. basis}}{\Longrightarrow} x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x$ ↯ zu (WA)

$\Rightarrow$ Beh. ist bewiesen. ✓

Nun: Betrachte offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{y \in X} \mathcal{U}(y) \quad \longleftarrow \text{aus Beh.}$$

$\overset{X \text{ kpt.}}{\Longrightarrow} \exists K \in \mathbb{N}, \exists y_1, \ldots, y_K \in X : X = \bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{U}(y_k)$ (**)

Für Folge $(x_n)_n$ aus (WA) gilt gemäß Beh.:

$\forall k \in \{1, \ldots, K\} : \mathcal{U}(y_k)$ enthält nur endlich viele x_n

↯ zu (**) ✓

(b) "$\Rightarrow$" klar, da 2. AA $\Rightarrow$ 1. AA & (a) ✓

"$\Leftarrow$" per Widerspruch: Ann.: X nicht kompakt

d.h. wegen Satz 10.24 (Lindelöf) $\exists$ abz (!) offene Überdeckung $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ ohne endliche Teilüberdeck.

$$\Rightarrow \quad X \setminus \left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathcal{U}_\nu \right) \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Deshalb möglich: $\quad \mathfrak{X}$ folgenkpt

$\forall n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in \mathfrak{X} \setminus \left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathcal{U}_\nu\right) \xrightarrow{\mathfrak{X} \text{ folgenkpt}}$

$\exists x \in \mathfrak{X}$ und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ streng isoton: $x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x$

$\overset{\mathfrak{X} = \bigcup_n \mathcal{U}_n}{\Longrightarrow} \quad x \in \mathcal{U}_{\tilde{n}}$ für ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geq k_0 : x_{n_k} \in \mathcal{U}_{\tilde{n}}$ ↯, denn für k groß genug, ist $n_k \geq \tilde{n}$ ∎

10.25. Bemerkung

$\exists$ Beispiele für kompakte, aber nicht folgenkompakte topol. Räume, sowie für folgenkompakte, aber nicht kompakte topol. Räume (zu aufwändig hier, siehe z.B. v. Querenburg).

In metrischen Räumen fallen beide Begriffe zusammen:

10.26. Satz

Sei $\mathfrak{X}$ metr. Raum. Dann gilt:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} \text{ kompakt} & \Longleftrightarrow & \mathfrak{X} \text{ folgenkompakt} \\ & & \Downarrow \\ \mathfrak{X} \text{ erfüllt 2.AA} & \Longleftrightarrow & \mathfrak{X} \text{ separabel} \end{array}$$

10.27. Bemerkung

$$\mathfrak{X} \text{ separabel} \overset{\text{i.A.}}{\not\Longrightarrow} \mathfrak{X} \text{ (folgen-) kompakt}$$

Bsp: $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$.

Beweis • „kompakt ⇒ folgenkompakt"
siehe Beweis Satz 7.40 oder Satz 10.23(a) & Bem. 10.11.(b) ✓

• „folgenkompakt ⇒ separabel"
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wähle $x_1^{(n)} \in X$; falls $R_1^{(n)} := X \setminus B_{1/n}(x_1^{(n)}) \neq \emptyset$
wähle $x_2^{(n)} \in R_1^{(n)}$, ..., falls $x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}$ gewählt und
$R_k^{(n)} := X \setminus \bigcup_{j=1}^{k} B_{1/n}(x_j^{(n)})) \neq \emptyset$, wähle $x_{k+1}^{(n)} \in R_k^{(n)}$,
usw, ...

Beh. Auswahlprozess stoppt nach endlich vielen Schritten.

Bew: Wenn nicht, erhält man Folge $(x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \subset X$
mit $d(x_k^{(n)}, x_j^{(n)}) \geq \frac{1}{n} \quad \forall j \neq k$

$\Rightarrow (x_k^{(n)})_k$ hat keine kgt'e Teilfolge ↯

Also $\exists K_n \in \mathbb{N}: \quad X = \bigcup_{k=1}^{K_n} B_{1/n}(x_k^{(n)})$

Setze $M_n := \{x_1^{(n)}, \dots, x_{K_n}^{(n)}\}$

$\Rightarrow M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ abzählbar und dicht in X ✓

• „separabel ⇔ 2.AA" nach Kor. 10.13.

• „folgenkompakt ⇒ kompakt": (*)

$$\left.\begin{array}{c} \text{folgenkompakt} \\ \Downarrow \text{ s.o.} \\ \text{separabel} \\ \Downarrow \text{ s.o} \\ \text{2.AA} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{kompakt nach Satz 10.23(b)} \quad \blacksquare$$

Bem: (*) wurde bereits in Satz 7.40 formuliert,
aber dort nicht bewiesen!