10.3. Kompaktheit

10.22. Definition Sei X topol. Raum, sei $A \subseteq X$

- A kompakt $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{falls } A \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda,\ \emptyset \neq \Lambda \text{ Indexmenge}, \\ \qquad U_\lambda \text{ offen } \forall \lambda \in \Lambda \\ \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \text{ und } \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda: \\ \qquad A \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} U_{\lambda_n} \end{cases}$

„jede offene Überdeckung besitzt endliche Teilüberdeckung"
(Heine-Borel-Eigenschaft).

- A folgenkompakt $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{jede Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \\ \text{besitzt kgt'e Teilfolge in } A, \\ \text{d.h. } \exists x \in A,\ \exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \\ \text{stükt isoton mit } x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x \end{cases}$

(Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft).

10.23. Satz Sei X topol. Raum

(a) Falls X erfüllt 1.AA, dann gilt:

X kompakt $\Rightarrow$ X folgenkompakt

(b) Falls X erfüllt 2.AA, dann gilt:

X kompakt $\Leftrightarrow$ X folgenkompakt

[(a) verallg. "$\Rightarrow$" in Satz 7.40]

Im Beweis von Satz 10.23 wird gebraucht:

$\boxed{\text{10.24. Satz}}$ (Lindelöf)

Sei X topol. Raum, der 2. AA. genügt, und $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ eine offene Überdeckung. Dann $\exists$ abzählbare Teilüberdeckung, d.h. $\exists (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Lambda$ (Folge in Λ) mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{\lambda_n}$.

Beweis: Sei $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ Basis der Topologie (abzählbar!)

sei $\mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N} : \exists \lambda \in \Lambda \text{ mit } B_n \subseteq U_\lambda\}$

jedes U_λ ist Vereinigung aus B_n's $\Rightarrow$

$$\bigcup_{n \in \mathcal{N}} B_n = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X \quad (*)$$

$\forall n \in \mathcal{N}$ wähle $\lambda_n \in \Lambda$: $B_n \subseteq U_{\lambda_n}$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad X = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} B_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathcal{N}} U_{\lambda_n} \Rightarrow X = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} U_{\lambda_n}$$ abz. Teilüberdeckung $\blacksquare$

Beweis von Satz 10.23.:

(a) per Widerspruch: Ann.: $\exists$ Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ ohne kgt'e Teilfolge. (WA)

Beh: $\forall x \in X$ $\exists$ offene Umgebung $U(x)$ mit $x_n \in U(x)$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Bew: ebenfalls per Widerspruch; also

Ann: $\exists x \in X$ $\forall$ offenen Umg. $U(x)$ von x: $x_n \in U(x)$ für ∞-viele $n \in \mathbb{N}$ $\quad (*)$

1\. AA $\Rightarrow \exists$ abz. Umgebungsbasis $\{\tilde{V}_j : j \in \mathbb{N}\}$ von x aus (*)

Sei $V_k := \bigcap_{j=1}^{k} \tilde{V}_j$ für $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \{V_k : k \in \mathbb{N}\}$ ebenfalls Umgebungsbasis von x (mit $V_{k+1} \subseteq V_k \ \forall k \in \mathbb{N}$)

$\overset{(*) \text{ mit } V_k}{\Longrightarrow}$ $\forall k \in \mathbb{N} : x_n \in V_k$ für ∞-viele $n \in \mathbb{N}$.

Wähle induktiv strikt isotone Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, so dass

$$x_{n_k} \in V_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\overset{V_{k+1} \subseteq V_k}{\Longrightarrow}$ $\forall k \in \mathbb{N}, \forall k' \geq k : x_{n_{k'}} \in V_k$ $\overset{\{V_k\}_k \text{ Umg. basis}}{\Longrightarrow}$ $x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x$ ↯ zu (WA)

$\Rightarrow$ Beh. ist bewiesen. ✓

<u>Nun</u>: Betrachte offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{y \in X} \mathcal{U}(y) \quad \leftarrow \text{aus Beh.}$$

$\overset{X \text{ kpt.}}{\Longrightarrow}$ $\exists K \in \mathbb{N}, \exists y_1, \dots, y_K \in X : X = \bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{U}(y_k)$ (**)

Für Folge $(x_n)_n$ aus (WA) gilt gemäß Beh.:

$\forall k \in \{1, \dots, K\} : \mathcal{U}(y_k)$ enthält nur endlich viele x_n

↯ zu (**) ✓

(b) "$\Rightarrow$" klar, da 2. AA $\Rightarrow$ 1. AA & (a) ✓

"$\Leftarrow$" per Widerspruch: <u>Ann</u>: X nicht kompakt

d.h. wegen Satz 10.24 (Lindelöf) $\exists$ abz (!) offene Überdeckung $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ ohne endliche Teilüberdeck.

$$\Rightarrow \quad X \setminus \left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathcal{U}_\nu \right) \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Deshalb möglich:

$\forall n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in X \setminus \left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathcal{U}_\nu \right)$ $\xrightarrow{X \text{ folgenkpt}}$

$\exists x \in X$ und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ streng isoton: $x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x$

$\overset{X = \bigcup \mathcal{U}_n}{\underset{n}{\Longrightarrow}}$ $x \in \mathcal{U}_{\tilde{n}}$ für ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : x_{n_k} \in \mathcal{U}_{\tilde{n}}$ $\lightning$, denn für k groß genug, ist $n_k \geq \tilde{n}$ ∎

10.25. Bemerkung

$\exists$ Beispiele für kompakte, aber nicht folgenkompakte topol. Räume, sowie für folgenkompakte, aber nicht kompakte topol. Räume (zu aufwändig hier, siehe z. B. v. Querenburg).

In metrischen Räumen fallen beide Begriffe zusammen:

$\boxed{\text{10.26. Satz}}$

Sei X metr. Raum. Dann gilt:

$$
\begin{array}{ccc}
X \text{ kompakt} & \Longleftrightarrow & X \text{ folgenkompakt} \\
 & & \Downarrow \\
X \text{ erfüllt 2.AA} & \Longleftrightarrow & X \text{ separabel}
\end{array}
$$

10.27. Bemerkung

$$X \text{ separabel} \overset{\text{i.A.}}{\not\Longrightarrow} X \text{ (folgen-) kompakt}$$

Bsp: $X = \mathbb{R}$.

Beweis • „kompakt $\Rightarrow$ folgenkompakt"

siehe Beweis Satz 7.40 oder Satz 10.23(a) & Bem. 10.11.(b) ✓

• „folgenkompakt $\Rightarrow$ separabel"

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wähle $x_1^{(n)} \in X$; falls $R_1^{(n)} := X \setminus B_{1/n}(x_1^{(n)}) \neq \emptyset$ wähle $x_2^{(n)} \in R_1^{(n)}, \ldots,$ falls $x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}$ gewählt und $R_k^{(n)} := X \setminus \bigcup_{j=1}^{k} B_{1/n}(x_j^{(n)})) \neq \emptyset$, wähle $x_{k+1}^{(n)} \in R_k^{(n)}$,

usw, ...

Beh. Auswahlprozess stoppt nach endlich vielen Schritten.

Bew: Wenn nicht, erhält man Folge $(x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \subset X$

mit $d(x_k^{(n)}, x_j^{(n)}) \geq \frac{1}{n} \quad \forall j \neq k$

$\Rightarrow (x_k^{(n)})_k$ hat keine kgt'e Teilfolge ↯

Also $\exists K_n \in \mathbb{N}$: $X = \bigcup_{k=1}^{K_n} B_{1/n}(x_k^{(n)})$

setze $M_n := \{x_1^{(n)}, \ldots, x_{K_n}^{(n)}\}$

$\Rightarrow M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ abzählbar und dicht in X ✓

• „separabel $\Leftrightarrow$ 2. AA" nach Kor. 10.13.

• „folgenkompakt $\Rightarrow$ kompakt": (*)

$$\left.\begin{array}{c} \text{folgenkompakt} \\ \Downarrow \text{ s.o.} \\ \text{separabel} \\ \Downarrow \text{ s.o} \\ \text{2. AA} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{kompakt nach Satz 10.23(b)} \quad \blacksquare$$

Bem: (*) wurde bereits in Satz 7.40 formuliert, aber dort nicht bewiesen!