10.2. Limiten und Stetigkeit

10.15. Definition Sei X topol. Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kgt. gegen $x \in X$ $:\Leftrightarrow$ $\forall$ Umgebungen $\mathcal{U}$ von x: $\exists$ höchstens endlich viele $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k \notin \mathcal{U}$.

(d.h. $\forall$ Umgeb. $\mathcal{U}$ von x $\exists N = N(x, \mathcal{U})$: $k \geq N \Rightarrow x_k \in \mathcal{U}$)

in Zeichen:

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ oder $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$

10.16. Bemerkung: (a) Def. konsistent mit Kgz. in metr. Räumen

(b) Je gröber die Topologie, desto „leichter" kgt. eine Folge

Extremfälle
- X mit indiskreter Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ $\Rightarrow$ jede Folge kgt. gegen jedes $x \in X$
- X mit diskreter Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$:

  $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \iff \exists k_0 \in \mathbb{N}: x_k = x \ \forall k \geq k_0$.

10.17. Satz Sei X Hausdorff-Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$

Dann existiert höchstens ein $x \in X$ mit $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$,

d.h. Grenzwerte sind, falls existiert, eindeutig.

Beweis. Es gelte $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$, $x_k \xrightarrow{k\to\infty} y$ und $x \neq y$

$\overset{\text{Hausdorff}}{\Longrightarrow}$ $\exists \mathcal{U}_x$ (bzw. $\mathcal{U}_y$) Umgebung von x (bzw y) mit $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$.

da $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \Rightarrow \exists$ höchstens endlich viele $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in \mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}_x^C$ - also $\lightning$ zu $x_k \to y$ ∎

10.18. Definition Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topol. Räume, sei $f: X \to Y$.

- f <u>stetig</u> $:\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$
  („Urbilder offener Mengen sind offen")
- f <u>folgenstetig</u> $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{Falls } x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \quad (\text{in } X) \\ \Rightarrow f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x) \quad (\text{in } Y) \end{cases}$

(Def'en konsistent mit denen für metr. Räume; für „stetig" siehe Satz 7.37).

10.19. Satz Seien X, Y topol. Räume und $f: X \to Y$.

Dann gilt

(a) f stetig $\Rightarrow$ f folgenstetig

(b) $\left.\begin{array}{l} f \text{ folgenstetig und} \\ X \text{ erfüllt 1. AA} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ stetig

Wegen Bem. 10.11(b) gilt

10.20 Korollar Sei X metr. Raum, Y top. Raum, $f: X \to Y$

Dann gilt
(vgl. Satz 7.30)

$$f \text{ stetig} \Leftrightarrow f \text{ folgenstetig}$$

<u>Beweis von Satz 10.19:</u>

(a) Sei $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$, sei $V \subseteq Y$ bel. Umgebung von $f(x)$

und $U := f^{-1}(V)$

n. V. ist U offen und $x \in U \Rightarrow U$ Umgebung von x

$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad x_k \in U \quad \forall k \ge k_0$

$\Rightarrow \quad$ " $\quad : \quad f(x_k) \in f(U) \subseteq V \quad \forall k \ge k_0$

also $f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x)$ ✓

(b) <u>Ann.</u>: f nicht stetig.

$\Rightarrow \exists V \subseteq Y$ offen mit $f^{-1}(V)$ nicht offen in X.

Lemma 10.6
$\Rightarrow$ $\exists x \in f^{-1}(V)$, so dass $\forall$ Umgebungen $\mathcal{U}$ von x:
$$\mathcal{U} \cap (f^{-1}(V))^c \neq \emptyset \quad (1)$$

n.V. $\exists$ abz. Umgebungsbasis $\{\mathcal{U}_k : k \in \mathbb{N}\}$ von x;

setze $\tilde{\mathcal{U}}_k := \bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{U}_j \Rightarrow$ (2) $\tilde{\mathcal{U}}_k \supseteq \tilde{\mathcal{U}}_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(3) $\tilde{\mathcal{U}}_k$ Umgebung von x, $\forall k$

$(1) \wedge (3) \overset{\forall k \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} \exists x_k \in \tilde{\mathcal{U}}_k \cap (f^{-1}(V))^c$

$\Rightarrow$ • $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$ (denn: Sei $\mathcal{U}'$ bel. Umgeb. von x

$\{\mathcal{U}_k\}$ Umg.basis
$\Rightarrow$ $\exists k' \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}_{k'} \supseteq \tilde{\mathcal{U}}_{k'}$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $x_k \in \mathcal{U}' \quad \forall k \geq k'$)

• $\forall k \in \mathbb{N}$: $f(x_k) \notin V$

V Umgeb. von $f(x)$
$\Rightarrow$ $f(x_k) \not\rightarrow f(x)$ ↯

$\blacksquare$

10.21. Bemerkung

(a) Bsp. für folgenstetige, aber nicht stetige Fkt, siehe Präsenzübung.

(b) Verallg. von Folgen auf gerichtete Indexmengen J (statt $\mathbb{N}$):

$(x_j)_{j \in J}$ (Netz). Dann gilt (ohne 1. AA!):

f netzstetig $\Leftrightarrow$ f stetig

Eine Indexmenge J ist gerichtet $:\Leftrightarrow$

$\exists$ Relation $\triangleleft$ auf J mit

- $j \triangleleft j \quad \forall j \in J$ (reflexiv)
- $j \triangleleft k \wedge k \triangleleft l \Rightarrow j \triangleleft l \quad \forall j, k, l \in J$ (transitiv)
- $\forall j, k \in J \ \exists l \in J : j \triangleleft l \wedge k \triangleleft l$
