10. Topologische Räume

10.1. Grundlegende Begriffe

10.1. Definition Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge

- $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Topologie auf X

  $:\Leftrightarrow$ (1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

  (2) $\mathcal{T}$ abgeschlossen unter bel. Vereinigungen,
  d.h.: Sei J Indexmenge, sei $A_j \in \mathcal{T} \ \forall j \in J$
  $\Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$

  (3) $\mathcal{T}$ abgeschlossen unter endlichen Schnitten,
  d.h.: Sei $N \in \mathbb{N}_0$, sei $A_n \in \mathcal{T} \ \forall n = 1, \dots, N$
  $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{T}$

Konvention: $\bigcap_{j \in \emptyset} A_j := X$; $\bigcup_{j \in \emptyset} A_j := \emptyset$; Also (1) folgt aus (2), (3).

- $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum (oft nur X)

- $A \in \mathcal{P}(X)$ offen $:\Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$

- Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf X

  $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$ $:\Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$

  ($\Leftrightarrow$: $\mathcal{T}_2$ gröber als $\mathcal{T}_1$)

10.2. Beispiele

(a) Indiskrete Topologie: $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ gröbste Top. auf X

(b) Diskrete Topologie: $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ feinste Top. auf X

(c) (X, d) metr. Raum und $\mathcal{T}_d := \{A \in \mathcal{P}(X) : \forall x \in A\ \exists r = r_x > 0 : B_r(x) := \{y \in X : d(x,y) < r\} \subseteq A\}$

$\rightsquigarrow$ metrische Topologie (nach Satz 7.15) — offene Mengen in (X, d)

Induzierte Topologie auf Teilmengen:

10.3. Definition $(X, \mathcal{T})$ top. Raum und $A \subseteq X$ (nicht notw. $\in \mathcal{T}$)

Relativtopologie auf A: $\mathcal{T}_A := \{C \cap A : C \in \mathcal{T}\}$
(auch: Spurtopologie, Teilraumtop., induzierten Top.)

10.4. Bemerkung

- $\mathcal{T}_A$ ist Topologie auf A (checken!)
- Warnung: Falls $A \notin \mathcal{T}$ und $C \cap A \in \mathcal{T}_A$ $\overset{\text{i.A.}}{\not\Rightarrow}$ $C \cap A \in \mathcal{T}$

Bsp: $X := \mathbb{R}$ mit metr. Top. von $|\cdot|$

$A := [0,1]$, $C :=]-1, \frac{1}{2}[\in \mathcal{T} \Rightarrow C \cap A = [0, \frac{1}{2}[\in \mathcal{T}_A$, $\notin \mathcal{T}$

- Falls $\mathcal{T}_d$ metrische Top. auf metr. Raum (X, d)

$\Rightarrow \mathcal{T}_A$ ist metr. Top. auf metr. Raum $(A, d|_{A \times A})$,

checken!

d.h. $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_{d|_{A \times A}}$ (siehe 7.3(c))

10.5. Definition Sei X top. Raum, $A \subseteq X$, $x \in X$

(a) A abgeschlossen $:\Leftrightarrow A^c := X \setminus A$ offen

(b) $U \subseteq X$ Umgebung von $x \in X$ $:\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{T}$ mit $x \in A \subseteq U$

(c) X Hausdorff-Raum $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall x, y \in X \text{ mit } x \neq y: \\ \exists \text{ Umgebungen } U \text{ von } x \text{ und} \\ V \text{ von } y \text{ mit } U \cap V = \emptyset \end{cases}$

(d) x Randpkt. von A $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall \text{ Umgebungen } U \text{ von } x \text{ gilt:} \\ U \cap A \neq \emptyset \text{ und } U \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$

$\partial A := \{x \in X : x \text{ ist Randpkt. von } A\}$

(e) $\mathring{A} := A \setminus \partial A$ Inneres von A

$\bar{A} := A \cup \partial A$ Abschluss von A

(f) A dicht in X $:\Leftrightarrow \bar{A} = X$

Analog zu Def. 7.12(c) hat man

10.6. Lemma Sei X top. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt:

A offen (d.h. $A \in \mathcal{T}$) $\Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists$ Umgebung U von x mit $U \subseteq A$

Beweis

"$\Leftarrow$" per Def. der Umgebung gilt: $\forall x \in A$ $\exists A_x \in \mathcal{T}$ (also offen) mit $x \in A_x$ und $A_x \subseteq A$

$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} A_x \overset{\text{Def. 10.1.(2)}}{\Rightarrow} A \in \mathcal{T}$

"$\Rightarrow$" wähle $U = A$ $\forall x \in A$ ∎

10.7. Bemerkung

(a) Def. 10.5. (a), (b), (d), (e) konsistent mit Spezialfällen für metr. Räume (Def. 7.12 (b), 7.17, 7.19)

(b) (X, d) metr. Raum $\Longrightarrow$ $(X, \mathcal{T}_d)$ Hausdorff-Raum
Satz 7.14.

(c) Sätze 7.21 und 7.22 gelten auch für topol. Räume. (checken!)

(d) $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ (per Konstruktion von $\mathbb{R}$; vgl. Satz 2.61).

10.8. Definition Sei $(X, \mathcal{T})$ top. Raum, und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ eine Familie offener Mengen.

- $\mathcal{B}$ Basis für $\mathcal{T}$:$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T} = \{$ bel. Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}\}$
- $\mathcal{B}$ Subbasis für $\mathcal{T}$:$\Longleftrightarrow$ $\{$endliche Schnitte von Mengen aus $\mathcal{B}\}$ ist Basis für $\mathcal{T}$
- $\mathcal{B}$ Umgebungsbasis von $x \in X$

:$\Longleftrightarrow$ (i) $\forall B \in \mathcal{B}$: B ist Umgebung von x

(ii) $\forall$ Umgebung U von x $\exists B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$

10.9. Lemma Sei (X, d) metr. Raum. Dann gilt:

(a) $\{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ ist Umgebungsbasis von $x \in X$ für $\mathcal{T}_d$

(b) $\{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}, x \in X\}$ ist Basis für $\mathcal{T}_d$

(c) Sei A dicht in X

$\Rightarrow \{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}, x \in A\}$ ist Basis für $\mathcal{T}_d$

Beweis: (a) aus Def. 7.12 (b)

(b) aus (c) mit $A = X$

(c): Sei $G \in \mathcal{T}_d$ und $x \in G$; $\Rightarrow \exists\, \varepsilon := \varepsilon_x > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq G$

Sei $n := n_x \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $\overline{A} = X \Rightarrow$

$B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$; wähle $a := a_x \in B_{1/n}(x) \cap A$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bullet\ x \in B_{1/n}(a) \\ \bullet\ B_{1/n}(a) \subseteq G \end{array}\right\} \Rightarrow G = \bigcup_{x \in G} B_{\frac{1}{n_x}}(a_x)$$

Δ's-Ungl. für $y \in B_{1/n}(a)$:

$$d(x,y) \leq \underbrace{d(x,a)}_{< \frac{1}{n}} + \underbrace{d(a,y)}_{< \frac{1}{n}} < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

10.10. Definition Sei X topol. Raum.

- X separabel $:\Leftrightarrow \exists\, A \subseteq X$ abzählbar mit $\overline{A} = X$
- X erfüllt erstes Abzählbarkeitsaxiom (1. AA) $:\Leftrightarrow$ jedes $x \in X$ besitzt abzählbare Umgebungsbasis
- X erfüllt zweites Abzählbarkeitsaxiom (2. AA) $:\Leftrightarrow$ $\exists$ abzählbare Subbasis der Topologie

10.11. Bemerkungen

(a) $\exists$ abzählbar Subbasis $\Leftrightarrow$ $\exists$ abzählbar Basis

denn: "$\Leftarrow$": jede Basis ist auch Subbasis

"$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{S}$ abz. Subbasis $\Rightarrow$ zugehörige Basis

$$\mathcal{B} := \bigcup_{N\in\mathbb{N}_0} \underbrace{\{A\in\mathcal{P}(X) : A \text{ ist Schnitt von } N \text{ Mengen aus } \mathcal{S}\}}_{=:\mathcal{B}_N}$$

Die Abb.

$$\overbrace{\mathcal{S}\times\ldots\times\mathcal{S}}^{N \text{ Faktoren } (=:\mathcal{S}^N)} \longrightarrow \mathcal{B}_N$$

$$(B_1,\ldots,B_N) \longmapsto B_1\cap\ldots\cap B_N$$

ist surjektiv

und da $\mathcal{S}^N$ abzählbar $\overset{\text{Def. 2.96}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{B}_N$ abzählbar $\overset{\text{Satz 2.99}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{B}$ abzählbar

(endl. Kartes. Produkt abz. Mengen (Satz 2.101)) (abz. Vereinigung abz. Mengen)

(b) Sei (X,d) metr. Raum $\overset{\text{Lemma 10.9(a)}}{\Longrightarrow}$ X erfüllt 1. AA.

(c) Sei X überabzählbar mit diskreter Topologie ($\mathcal{T}=\mathcal{P}(X)$)

$\Rightarrow$ $\forall x\in X$ gilt: $\{x\}\in\mathcal{T} \Rightarrow \{x\}$ ist Umgebung von x

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}_x := \{\{x\}\}$ ist Umgebungsbasis von x,

also X erfüllt 1. AA.

aber: für jede Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{T}$ gilt:

$$\mathcal{B} \supseteq \bigcup_{x\in X}\{\{x\}\}$$

– also X erfüllt <u>nicht</u> 2. AA.

Das 2. AA ist tatsächlich stärker als das 1. AA.

10.12. Satz Sei X topol. Raum. Dann gilt:

X erfüllt 2. AA $\Rightarrow$ X erfüllt 1. AA und ist separabel

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ abzählbare Basis von $\mathcal{T}$, sei $x \in X$

- $\Rightarrow \mathcal{N}_x := \{ B \in \mathcal{B} : x \in B \}$ ist Umgebungsbasis von x

  $\Rightarrow \mathcal{N}_x$ abzählbar $\Rightarrow$ 1. AA ✓

- $\forall\, \emptyset \neq B \in \mathcal{B}$ wähle $x_B \in B$

  $\Rightarrow A := \{ x_B \in X : \emptyset \neq B \in \mathcal{B} \}$ abzählbar

Beh: $\overline{A} = X$ (also X separabel ✓)

da $\forall x \in X$ $\forall$ Umgebung $\mathcal{U}$ von x gilt:

$\exists\, G \in \mathcal{T}$ mit $x \in G \subseteq \mathcal{U}$. Da G Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B} \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ ∎

In metr. Räumen gilt auch die Umkehrung (siehe Lem. 10.9(c))

10.13. Korollar Sei (X, d) metr. Raum. Dann gilt

$$X \text{ separabel} \iff X \text{ erfüllt 2. AA}$$

(das 1. AA ist nach Bem. 10.11 (b) sowieso erfüllt)

10.14. Beispiel

$\mathbb{R}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, ist separabel, da $\mathbb{Q}^\nu$ dicht in $\mathbb{R}^\nu$

$\overset{\text{Kor. 10.13}}{\Longrightarrow}$ 2. AA $\overset{\text{Satz 10.12}}{\Longrightarrow}$ 1. AA.

[Wenn nichts weiter spezifiziert, so wird $\mathbb{R}^\nu$ mit metr. Topol. der Euklid. Norm $\|\cdot\|_2$ versehen.]