A. Ausblicke

Infos zur weiteren Module (im Bachelor), Math-Themen, Zusammenhänge zu Ana 1-3 etc. (Alles sehr subjektiv!)

A.0. Einleitung

„Algebra" & „Kommutative Algebra": (WP5 + WP24)

Vorkenntnisse: KEIN Analysis!

Inhalt: siehe z.B. Geldhauser-Webseite
("Prüfungsthemen", WiSe 21/22)

„Stochastik" & „W-theorie" (WP3 + WP20; WiMi: P10 + P14)

Braucht Analysis; vor allem ist (abstrakten)
Maß- und Integrationstheorie (Ana 3) Grundlage
für die ganze (!) Stochastik & W-theorie
(und damit ganze (!) Finanz-Mathe) (und Ana 3
ist „Vorkenntnisse" für WP20/P14!)

Inhalt: siehe z.B. Rademacher (Stoch; LSF & Moodle 23/24)
& Merkl (W-Theorie; LSF 24)

„Finanzmath. in disk. Zeit" (WP22 / P15)

Kein Info hier (Voraussetzungen: P1 – P8)

Ⓑ

„Numerik"; „Prog. für Math. 1+2"; „Comp.-gest. Math"
(WP1; P10; P12; WP7 / WiMa: P16, P13, ??, P19)
Kein Info hier.
(Numerik schon erwähnt: braucht (viel) Ana & LA.
WP7/P19 z.B. Matlab, Mathematica, Maple anwenden (!))

A.1. Geometrie

„Geometrie" & „Differentialgeometrie"
(WP18, WP21 (Vork. insbes. WP18))

WP18: Studiert Kurven & Flächen: (siehe auch Ana 3)

LA 1+2: Studiert endl. dim lin. Räume & lin. Abb.

Ana 1-3: Studiert (i.A., nicht lin.) Abb. zwischen lineare Räume ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$)

(Unend. dim lin. Räume & lin. Abb: „FunkAna" (WP19; siehe unten))

In WP18: Studiert 1- und 2 dim. „nichtlin. Räume"
(Kurven: 1-dim.; Flächen: 2-dim.
Höher dim. / allg.: WP21).

C

A.1. Definition Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

ϕ ist ein *Weg in $\mathbb{K}^n$* $:\Leftrightarrow$ $\phi : I \to \mathbb{K}^n$ ist stetig.

$C \subseteq \mathbb{K}^n$ ist eine *Kurve* $:\Leftarrow$ (!) (siehe unten) $\exists\, \phi$ Weg in $\mathbb{K}^n$ mit $\phi(I) = C$

[man nennt C die durch ϕ *erzeugte Kurve*, und ϕ eine *Parameterdarstellung* dieser Kurve C.]

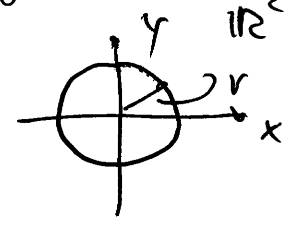
A.2. Bemerkung: Kurven in $\mathbb{R}^2$ können geg. werden als

(a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $F(x,y) = 0$ (Implizite Gl.)

(b) $\underset{(x = \phi_1(t),\ y = \phi_2(t))}{\phi : I \to \mathbb{R}^2}$ (parametrisierte; siehe A.1)

(c) Graphen: $f : J \to \mathbb{R}$; $y = f(x)$. ($J \subseteq \mathbb{R}$)

A.3. Beispiel: Kreis im $\mathbb{R}^2$: $r > 0$

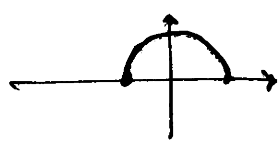


(a) $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

(b) $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t))$

(oder $\tilde{\phi} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (r\cos(500t), r\sin(500t))$)

(c) $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$



D

A.4. Definition Sei $\phi : I \to \mathbb{K}^n$ ein Weg, $I = [a,b]$,
$Z : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$ eine Zerlegung von I,
und
$$l(Z;\phi) := l(Z) := \sum_{i=1}^{p} |\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})|$$
Mann nennt
$$L(\phi) := \sup_Z l(Z;\phi)$$
die Weglänge von ϕ. (Supremum über alle Zerlegungen)

ϕ ist rektifizierbar $:\Leftrightarrow$ $L(\phi) < \infty$

ϕ ist nicht rekt.bar. $:\Leftrightarrow$ $L(\phi) = \infty$

A.5. Bemerkung: Ist $\mathbb{K}^n \equiv \mathbb{R}^2$, so gibt es $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

so daß $G = \phi(I) \subseteq [x_1,x_2] \times [y_1,y_2] \subseteq \mathbb{R}^2$
(da ϕ stetig).

Es gibt aber Weg $\phi : \overset{I}{[0,1]} \to \mathbb{R}^2$ so daß
$$G = \phi(I) \overset{!}{=} [0,1] \times [0,1]$$
(mit $L(\phi) = +\infty$).

A.6. Satz (a) Sei $\phi : I \to \mathbb{K}^n$ Lipschitz-stetiger Weg:
$\exists \tilde{L} > 0$: $|\phi(t) - \phi(s)| \leq \tilde{L}|s-t| \quad \forall s,t \in I \equiv [a,b]$

Dann ist ϕ rektifizierbar, und
$$L(\phi) \leq \tilde{L}(b-a)$$

(b) Sei $\phi : I \to \mathbb{K}^n$ C^1-Weg (allg. PC^1).
Dann ist ϕ rektifizierbar, und ($I = [a,b]$)
$$L(\phi) = \int_a^b \|\phi'(t)\|_{\mathbb{K}^n}\, dt$$

A.7. Definition Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$,
$Z : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$ eine Zerlegung von I.
Man nennt
$$\mathrm{var}(Z) := \mathrm{var}(Z; f) := \sum_{i=1}^{p} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$
die <u>Variation</u> zu Z, und
$$V_a^b(f) := \sup_Z \mathrm{var}(Z; f)$$
die <u>Totalvariation</u> <u>von f auf I</u>.
Ist $V_a^b(f) < +\infty$ heisst f von <u>beschränkter Variation</u>:
$$\underline{f \in BV(I)} :\Leftrightarrow V_a^b(f) < +\infty$$

A.8. Lemma Notation wie oben;
(a) $f \in BV(I) \Rightarrow f$ beschr.; $|f(a) - f(b)| \leq V_a^b(f)$.
(b) $BV(I)$ ist eine <u>Funktionenalgebra</u>:
$$f, g \in BV(I) \Rightarrow \lambda f,\ f+g,\ fg \in B(V) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$
und
$$V_a^b(\lambda f + \mu g) \leq |\lambda|\, V_a^b(f) + |\mu|\, V_a^b(g) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$
$$V_a^b(fg) \leq \|f\|_\infty V_a^b(g) + \|g\|_\infty V_a^b(f).$$

(F)

(c) f monoton $\Rightarrow V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$

$f \in C^1(I) \Rightarrow V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)|\,dt$

$\boxed{\text{A.9. Satz}}$ (Jordan) $f \in BV(I)$

$\Leftrightarrow \exists\, h, g : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend: $f = g - h$

$\boxed{\text{A.10 Satz}}$ (Rektifizierbarkeit) Der Weg $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann rektifizierbar, wenn alle Koordinatfkt'en ϕ_i BV sind:

f rekt-bar $\Leftrightarrow \phi_i \in BV(I) \quad \forall i = 1, \dots, n$

Wie „immer": Man studiert konkrete Beispiele (von Ebene & Räumliche Kurven), und allg. Eigenschaften, wie Tangenten, Krümmung, Torsion usw.

Ähnlich studiert man Flächen $\mathcal{F}$: Teilmengen aus $\mathbb{R}^3$, geg. durch

(a) $F(x,y,z) = 0$ (d.h. $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$)

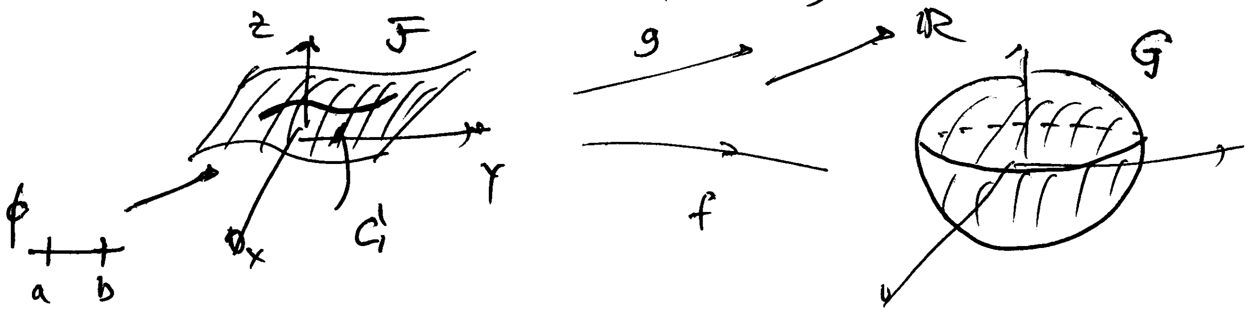
(b) Parametrisierte (!-?)

(c) Graphen $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$

Bsp.: Die (\ ) Sphäre (a) $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$

Man studiert lineare Approximation (Kurve: Tangenten; Flächen: Tangentebene) und nichtlin. Eigenschaften (Krümmung(en), Torsion, Genus etc.)

und Abbildungen zwischen Kurven / Flächen
(und Diff.- und Integralrechnung; siehe Übersicht Ana 3
- z.B. Flächeninhalt, analog zur Kurvenlänge).



Man studiert „geraden" auf Flächen („Geodäten")
(Kurven minimaler (!) Abstand) $\rightsquigarrow$ „Variationsrechng"
(Funktionale min: J: Kurven $\to \mathbb{R}$ - „Kurven": unendl. dim Raum)
$c \longmapsto L(\phi)$

A.2. „Gewöhnliche Diff. Gleichungen" (WP15/P12)

$\boxed{\text{A.11. Definition}}$ Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Abb. $G: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ off. Int., heisst Zeit-abh. Vektorfeld.

(i) Es definiert eine „Gew DGL"

$$(*) \quad x'(t) = G(t, x(t)) \qquad (\text{auch: } x' = G(t,x))$$

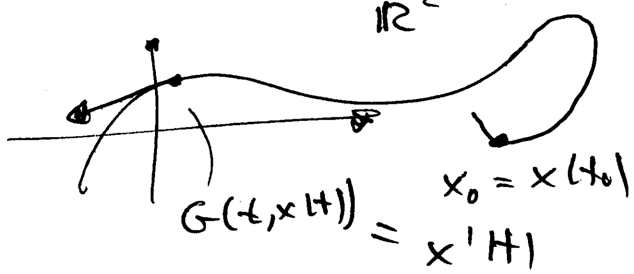
(ii) Eine Abb. $x: J \to \mathbb{R}^n$ ($J \subseteq I$) ist eine Lösung zur $(*)$ $:\Leftrightarrow$ $\forall t \in J: x'(t) = G(t, x(t))$

(iii) Geg. zusätzlich $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$, ist x Lös. zur Anfangswertpb $:\Leftrightarrow$

$$(**) \quad \begin{cases} x'(t) = G(t, x(t)) & \forall t \in J \\ t_0 \in J \;\&\; x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

(H)

Interpretation: Der Weg x fängt zur Zeit t_0 in x_0 an, und die Tangente/Geschwindigkeit ist Wert vom Vektorfelt G



$\boxed{\text{A-12-Satz}}$ (Picard-Lindelöf)

$G : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lok. Lipschitz (!) $\Rightarrow \exists!$ Lös. zur (**)

Bew: Banachscher Fixpktsatz (!)

(Auch für Kurven auf Flächen wichtig).

Bem. (a) Falls $G(t,x) \equiv G(x)$ (unabh. von t) nennt man (*) autonom

(b) Falls $G(x_0) = 0$, dann gilt, mit $x(t) := x_0 \ \forall t \in I$,

$$x'(t) = 0 = G(x_0) = G(x(t)) \quad \forall t \in I$$

$\Rightarrow$ x ist die Eindeutige Lös. zur (**) (in dem Fall).

x_0: Gleichgewichtspkt (Bsp: Pendel (starres) (≥ 2 Gl. pkt. !))

Frage: „Stabil" oder „instabil"?

Antwort: Hängt von $(DG)(x_0)$ ab!

Muss lineare Gleichung $(A = (DG)(x_0))$

$$\dot{x}(t) = A\, x(t), \quad A \text{ (fix) } n \times n \text{ Matrix}$$

lösen & Lösungen studieren. Verhalten hängt von Eigenwerte & Eigenvekt. von A ab.

(I)

$\underline{n=1}$: $x'(t) = a\,x(t)$ $\Rightarrow$ $x(t) = c_0 e^{at}$, $t \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}$ $\quad x(0) = x_0 \Rightarrow c_0 \equiv x_0$

d.h. $x(t) = x_0 e^{at}$. $x_0 \equiv 0$ Gleichg. pkt.

$t \to +\infty$: Verhalten ver<u>schieden</u> ($x_0 \neq 0$) für $a > 0$! / < 0 !

$\underline{n>1}$: <u>Lösung</u>: $x(t) = c_0 e^{At}$, $t \in \mathbb{R}$ (?)

mit $e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$

(es kann, mit Potenzreihen, Funktionen von Matrizen definieren. Allgem. (siehe FunkAna): Für <u>sym.</u> A <u>noch</u> allgem $f(A)$ definieren ! „Spektralsatz")

Muss dann e^{At} stud., um Stabilität von Gew DGL in der <u>Nähe</u> vom Gleich.gew pkt. studieren

(erweit. auch auf <u>unend.</u> dim. Lin. Räume!)

<u>A.3.</u> „<u>Funktionentheorie</u>" (WP17/P12; Vork. P1-6)

Studium $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, mit f (komplex) diff-bar (<u>holomorf</u>)

$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \; (=: f'(z_0)) \quad \forall z_0 \in \Omega$

<u>Überraschung</u>: $\Rightarrow$ f ist ∞-oft (komplex!) diff-bar

& die Taylor-reihe konv. (f ist <u>analytisch</u>):

$\forall z_0 \in \Omega \; \exists \delta > 0, \exists (a_k)_k \subseteq \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in B_\delta(z_0)$$

J

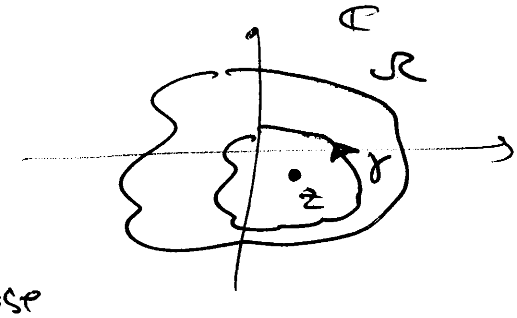
Werkzeug / Studium von: Cauchy's Integralformel:

Falls Ω „ohne Löcher":

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad (*)$$

$\forall z \in \Omega$, $\forall$ Weg γ um z

(muss „Weg-Integrale" wie in (*) def'en).



Sehr schöne Theorie; Vorkenntnisse „nur" P1-P6 (schöne Anw. von Ana I-2)

Anwendung: Viele; vor allem z.B. ausrechnen von Integrale durch „Residuensatz". - Einstieg in komplexe Geometrie.

A.4. „Optimierung" (WP2; WiMa: P11)

Hier geht es um: Extremalpunkte (Minima / Maxima) einer Funktion über einer gegebenen Menge zu bestimmen

Weierstraß: Stetige Funktion über einer kompakten Menge nimmt Min / Max an.

Optimierung: Verfahren, die zu finden

(hier: Endlich-dim.; ganze „Variationsrechnung" - auch Hamiltonsche & Lagrangesche Mechanik - in ∞-dim Fälle). Spezialthema: Konvexe Analysis.

(K)

A.5. FunktionalAnalysis (WP19/P12; braucht Ana 3!).

Studium von lin. un-endl. $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Topologie (meistens: von Norm) & lineare stetige Abbildungen dazwischen. („beschr. Op.'en").

Räume: Allgem; Banach: $(X, \|\cdot\|)$, vollst. bzgl.

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

Hilbert: $\|x\| := \langle x,x\rangle^{1/2}$ mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Skalarprodukt.

Allgem. Eigenschaften & konkrete Beispiele studieren (Folgen- und Funktionenräume, z.B. l_1, l_2, l_p, $C[a,b]$, $C^1[a,b]$, $L^p([a,b])$, $BV(I)$, $Lip(I)$, etc. etc. & deren Eigenschaften).

Wichtig: Studium von (top.) Dualräume:

$$X' := \{\, l : X \to \mathbb{K} : l \text{ linear } \& \text{ stetig} \}$$

$\boxed{\text{A.13 Satz}}$ $\overline{B_R(0)} = \{\|x\| \le R\}$ ist kompakt

$\Longleftrightarrow$ X ist endlich dim.

$\boxed{\text{A.14 Satz}}$ Falls X reflexiv: („$X'' = X$", z.B. Hilbert)

Jeder beschränkte Folge hat eine schwach konvergente Teilfolge

(d.h. konvergent in ein ander Topologie als der von $\|\cdot\|$ erzeugte).

(Bem.: Reicht oft(!) für Optimierg (d.h., Variationsrechn.) aus.)

Man studiert auch stetige, lin. Abb. („beschr. Op.'en")
(„unstetige lin" → QM / FA2: unbeschr. Operatoren).

$T : X \to Y$

& Eigenschaften.

„Typisches" Beispiel: (lin.) Integraloperatoren (erweit von Fourier-Reihe).
(QM & Harmonische Analysis & GewDGL & PDG).

X = Funktionenraum

$$(Tf)(x) := \int k(x,y) f(y)\, dy \quad , \quad \begin{aligned} T : X &\to Y \\ f &\mapsto Tf \end{aligned}$$

$k = k(x,y)$ „Integralkern"

(Analog zu : $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, lin. Abb. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
aber mit unend. viele Variable).

<u>Spektralsatz</u>: Diagonalisierung von Selbstadjungierte lin Abb.

A.6. „Partielle Differentialgleichungen" (PDG) (WP23; Vork. P1-8 + WP15(!))

Gleichungen, wo die unbekannte eine Fkt. von mehrere Var. ist (in GewDGL: Fkt. von 1 Variable, $x = x(t)$)

z. B. $u : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x)$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

Eine PDG ist eine Gleichung

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \dots, \partial^\alpha u(x)) = 0$$

für eine Abb. $F : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \dots \times\ ) \to \mathbb{R}$

(Ordnung der Gleichung: $\max |\alpha|$)

Beispiele: (alle lineare Gl., und Ordnung 2)

(a) Laplace Gleichung (Potentialgl.) $\quad \Delta u = 0 \quad$ („u harmonisch")

(b) Poissongl. $\quad \Delta u = f \quad$ (f gegeben)

(c) Wärmeleitungsgl. $\quad \partial_t u - \Delta u = 0 \quad$ ($u = u(t,x)$)

(d) Wellengleichung $\quad \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad$ ($u = u(t,x)$)

Erinnerung: $$(\Delta u)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) = \mathrm{Tr}\,(D^2 u)(x)$$
(Tr: Spur Matrix)

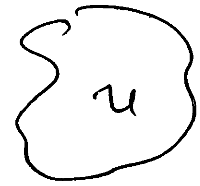
PDG: Kein allgemeines „Exist.- und Eindeutig. Satz" wie in Gew DGL. (Am Schwierigsten: Existenz).

Eine Sammlung (siehe oben) an wichtige Beispiele an dem man ähnliche Fragen studiert:

(i) Existenz (von Lösungen)

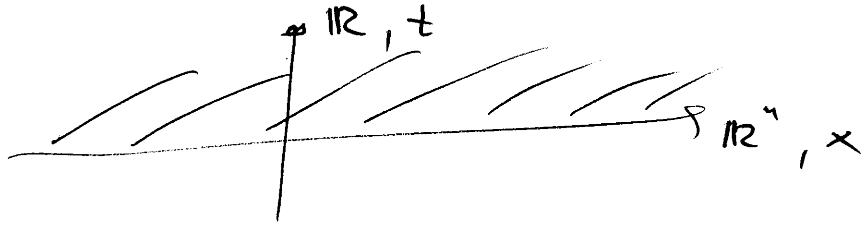
(ii) Eindeutigkeit unter extra Bedingung

(Laplace + Poisson: Randwert: $u|_{\partial\Omega} = g$, g geg.



Wärme + Welle:

Anfangsbed: $u(t=0,x) = u(0,x) = f(x) \ \forall x$



(iii) „Stabilität" / Stetigkeit
in „Daten" (oben: f & g – und u).

(iv) Diverse Eigenschaften von Lösungen
(die sehr verschieden sind, für
die Beispiele oben
(a)+(b): „elliptische Gleichg"
(c): „parabolische Gl"
(d): „hyperbolische Gl."

Ziel: Diese 3 wichtigen Typen in großem
Detail zu studieren, um (leicht) komplizierte
Gleichungen (erf.) später zu studieren:
(α) Fragestellungen verstehen
(β) zu erwartende Resultate verstehen

Sehr spannendes & sehr, sehr Umfangsreiches Gebiet
(z.B. große Teile der Quantenmechanik & Physik
– Strömungsmechanik, Elektrizität & Magnetismus,
Allgem. Relativitätstheorie etc.
& große Teile der Geometrie).

Zusammenhänge Optimierung, Variationsrechnung, Gew DGL, PDG:

Wie bei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f: I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b]$ oder $I =]a,b[$)

ist das „suchen" nach Extrema (evt. lok.)

(deren Existenz evt. mit Weierstraß (Kompaktheit!) nachgewiesen werden kann)

eng mit der Gleichung $f'(x) = 0$ verbunden.

Für $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ (endlich. dim).

ist die Gleichung $\nabla f(x) = 0$

Für $J: X \to \mathbb{R}$, X unendlich dim

ist die Gleichung

(i) eine Gew. DGL $x'(t) = G(t, x(t))$

(+ Anfang- oder Randbed.)

wenn X einen Funktionenraum ist, von Funktionen von einer Variable; typisch

$$J(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\, dt, \quad x \in X$$

(z.B. ganze Mechanik).

(ii) eine PDG. $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$

(z.B.)

(+ Anfang- oder Randbed.)

Wenn X einen Funktionenraum ist, von

(P)

Funktionen von <u>mehrer</u> Variablen; typisch

$$J(u) = \int_\Omega G(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \quad , \quad u \in X$$

In (i) & (ii) nennt man die Gleichg „ $f'(x) = 0$ "

(die Gew DGL / PDG, aus „ $DJ(x) = 0$ ", „ $DJ(u) = 0$ ")

dann die <u>Euler</u> - <u>Lagrange</u> <u>Gleichg</u>.