Addendum: Quadratischen Formen

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

A.1. Definition (a) Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$

heißt *sesqui-lineare Form*, falls

(i) $\langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$ $\quad \forall x,y,z \in V,$

(ii) $\langle \lambda y + z, x \rangle = \bar{\lambda} \langle y,x \rangle + \langle z,x \rangle$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

(b) Eine sesqui-lineare Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *hermitische Form*, falls

$$\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle} \quad \forall x,y \in V$$

(c) Eine sesqui-lineare Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *positiv semidefinit*, falls

(i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist hermitische Form

(ii) $\langle x,x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$

(d) Die sesqui-lineare Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *positiv definit*, falls

(i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist hermitische Form

(ii) $\langle x,x \rangle > 0 \quad \forall x \in V \setminus \underline{\underline{\{0\}}}$

A.2. Bemerkung (a) Wegen (b) gilt für hermitische Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dass $\langle x,x \rangle \in \underline{\mathbb{R}}$ $\forall x \in V$, (auch wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

(b) Wegen (a) gilt ausserdem

$$\langle 0,0 \rangle = 0$$

für jede sesqui-lineare Form.

(c) Eine pos. definite, hermitische sesquilineare Form nennt man auch Skalarprodukt (oder innere Produkt).

A.3 Definition Eine Abbildung $p: V \to \mathbb{R}$ heißt Halbnorm (oder Seminorm), falls

(i) $p(x) \geq 0$ für alle $x \in V$

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ für alle $x \in V, \lambda \in \mathbb{K}$

(iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in V$

A.4. Bemerkung: (a) Erfüllt eine Halbnorm $p: V \to \mathbb{R}$ ausserdem (iv) $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ist die eine Norm (vgl. Def. 7.4)

(b) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ pos. semidefinite, hermitische sesquilineare Form, dann definiert („def.")

$$V \ni x \mapsto \|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2} = \sqrt{\langle x, x \rangle} \in \mathbb{R}$$

eine Halbnorm auf V. Dies folgt aus:

A.5. Proposition Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ pos. semidef. hermitische sequilineare Form, und $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \langle x, x \rangle^{1/2} =: \|x\|$$

Dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{für alle } x, y \in V$$

A3

<u>Beweis</u>: Für bel. $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V$ gilt

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2 + \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + \lambda \overline{\langle y, x \rangle}$$

Setze $A := \|x\|^2$, $B := \langle y, x \rangle$, $C := \|y\|^2$ $(A, C \in \mathbb{R})$

dann gilt

$$0 \leq A + |\lambda|^2 C + \bar{\lambda} B + \lambda \bar{B}$$

<u>Ist $C > 0$</u>: Wähle $\lambda := -B/C$, dann gilt

$$0 \leq A + \frac{|B|^2}{C} - \frac{|B|^2}{C} - \frac{|B|^2}{C}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq AC - |B|^2 \quad ✓$$

<u>Ist $C = 0$</u>: Wähle $\lambda := -B/\varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$, dann

$$0 \leq A - 2\varepsilon^{-1} |B|^2$$

$$\Rightarrow \quad |B|^2 \leq 2\varepsilon A.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt $|B|^2 = 0$, d.h.

$$B = 0 = AC \quad ✓$$

$\blacksquare$