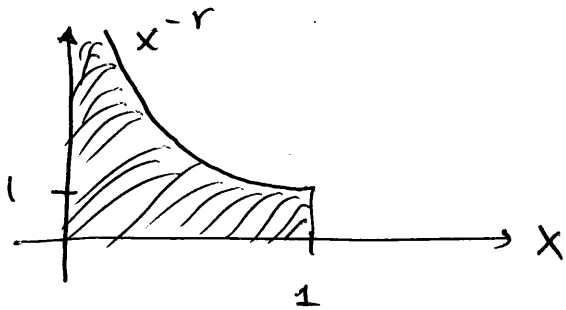
6.3. Uneigentliches Riemann-Integral

6.32. Motivation

- $0 < r < 1,\ a > 0 \Rightarrow \int_a^1 \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{1-r} x^{1-r} \Big|_a^1$

$$= \frac{1}{1-r}\left(1 - a^{1-r}\right) \xrightarrow{a \downarrow 0} \frac{1}{1-r} \text{ existiert}$$

d.h. endliche Fläche

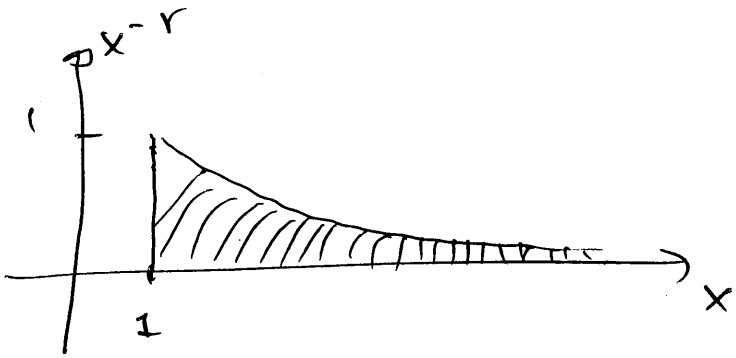


$\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,dx$ sollte def. sein, obwohl $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^r} = +\infty$, also nicht existiert,

also $x \mapsto \frac{1}{x^r}$ nicht Riemann-integr. auf $[0,1]$ da nicht beschr.

- $r > 1 \Rightarrow \int_1^b \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{1-r}\left(b^{1-r} - 1\right) \xrightarrow{b \to \infty} \frac{1}{r-1}$ exist.

d.h. endliche Fläche



$\int_1^\infty \frac{1}{x^r}\,dx$ sollte def. sein, obwohl $[1, \infty[$ uneigentliches Intervall (nicht beschr.).

6.33. Definition

(a) Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{C}$, so dass $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar $\forall b > a$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{f uneigentlich Riemann-}\\ \text{integrierbar über (auf) } [a, \infty[\end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{ I := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx \text{ existiert} \right.$$

Notation: $\int_a^\infty f(x)\,dx := I$

(analog für $]-\infty, a]$)

(b) Sei $f :]a, b] \to \mathbb{C}$, so dass $f : [a+\varepsilon, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar $\forall \varepsilon \in]0, b-a[$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{f uneigentlich Riemann-}\\ \text{integrierbar über (auf) } [a, b]\end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{ I := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \text{ existiert} \right.$$

Notation: $\int_a^b f(x)\,dx := I$

(analog für $f : [a, b[\to \mathbb{C}$)

(c) Analog für alle mögliche Kombinationen von (a) und (b)

6.34. Bemerkung

$f : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar

$\Rightarrow$ f uneigentlich Riemann-integrierbar auf/über $[a, b]$

Bew.: z.B HDI 6.16, da

Stamfkt F diff.bar $\Rightarrow$ F stetig ∎

6.35. Beispiel Sei $r \in]-1,\infty[$.

$$f: \begin{array}{l}]0,\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^r e^{-x} \end{array}$$ uneigentlich Riemann-integr. auf $[0,\infty[$.

zu zeigen: $\lim\limits_{a \downarrow 0} \lim\limits_{b \uparrow \infty} \underbrace{\int_a^b x^r e^{-x}\,dx}$ existiert

(Reihenfolge egal!)

$$\int_a^1 x^r e^{-x}\,dx + \int_1^M x^r e^{-x}\,dx + \int_M^b x^r e^{-x}\,dx$$

$M \leftarrow$ wird später bestimmt

- untere Grenze: hier nur im Fall $r \in]-1,0[$ etwas zu zeigen (ansonsten ist f Riem. integr. auf $[0,1]$)

Sei also $r \in]-1,0[$ und $a \in]0,1[$:

$$\int_a^1 x^r e^{-x}\,dx \overset{PI}{=} \underbrace{\frac{1}{r+1} x^{r+1} e^{-x}\Big|_a^1}_{\frac{e^{-1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1} e^{-a}} + \int_a^1 \underbrace{\frac{x^{r+1}}{r+1} e^{-x}}_{\text{stetig auf } [0,1],\ \text{da } r+1>0 \Rightarrow \text{R. integr. auf } [0,1]}\,dx$$

$$\xrightarrow{a \downarrow 0} \frac{e^{-1}}{r+1} + \int_0^1 \frac{x^{r+1}}{r+1} e^{-x}\,dx \quad \text{existiert!}$$

- obere Grenze: Sei $M > 1$ so groß, dass $x^{r+2} e^{-x} \leq 1 \quad \forall x \geq M$ (und $b > M$)

$$F(b) := \int_M^b \underbrace{x^r e^{-x}}_{\underbrace{x^{r+2} e^{-x}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{x^2}}\,dx \leq \int_M^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_M^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{M} \xrightarrow{b \uparrow \infty} \frac{1}{M}$$

da $b \mapsto F(b)$ isoton und beschränkt

$\Rightarrow \lim\limits_{b \to \infty} F(b)$ existiert

$\Rightarrow$ Beh. ✓

Zwei Anwendungen uneigentlicher Integrale:

6.36. Satz (Integralkriterium für Reihen)

Sei $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ antiton. Dann gilt $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

Insbesondere: $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ kgt. $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx$ existiert

Beweis: Übung.

6.37. Definition Eulersche Gamma-Funktion (ca. 1730)

$$\Gamma : \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} \\ x \longmapsto \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt \end{array}$$

(wohldef. als uneig. Riemann-Integral nach Bsp. 6.35)

6.38. Satz

(a) Funktionalgleichung: $x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \quad \forall x > 0$

(b) $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) \underset{\text{Subst } u=\sqrt{t}}{=} 2\underbrace{\int_0^\infty e^{-u^2}\,du}_{\text{Gauß-Integral}} = \sqrt{\pi}$

Beweis: (a) $\forall \varepsilon, R, x > 0$

$$\underbrace{\int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\,dt}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0,\ R\to\infty}\ \Gamma(x+1)} \overset{PI}{=} \underbrace{-t^x e^{-t}\Big|_\varepsilon^R}_{\to\ 0} + x\underbrace{\int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t}\,dt}_{\to\ \Gamma(x)}$$

(b) $\Gamma(1) = 1$ klar, $\Gamma(\frac{1}{2})$ via Gauß-Integral (Üb.!)

6.39. Korollar $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Ind. Beweis. $n=0$: $\Gamma(1) = 1 = 0!$ (nach 6.38(b))

$n \to n+1$: $\Gamma(n+1) = n\,\underbrace{\Gamma(n)}_{(n-1)!} = n!$

6.38(b) Ind. Ann. ∎

6.40 Satz Stirling-Formel

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \gamma_n^- \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \gamma_n^+$

mit $\gamma_n^- := e^{\frac{1}{12n+1}}$, $\gamma_n^+ := e^{\frac{1}{12n}}$

Insbes. $n! \overset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ asymptotische Gleichheit

$:\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1$

Beweis: Wir zeigen nur schwächere Variante mit

$\gamma_n^- = e^{\frac{1}{12(n+1)}}$ und $\gamma_n^+ = e^{\frac{1}{12(n-1)}}$ $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\ln k}_{\int_1^k \frac{1}{x}dx} = \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx$$

s. unten (*)

$$= \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx}_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{n-1}[\ln(j+1)-\ln j]} - \sum_{j=1}^{n-1}\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln n - \sum_{j=1}^{n-1}\underbrace{\int_j^{j+1}\frac{j+\frac{1}{2}-x}{x}\,dx}_{\int_0^1 \frac{1/2-x}{j+x}\,dx =: I_j} - n + 1$$

Begründung von (*): Sei $\Theta(y) := \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$

(Heaviside-Fkt.)

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} a_j}_{\sum_{j=1}^{n-1} \Theta(k-1-j) a_j} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \Theta(k-1-j)}_{\sum_{k=1+j}^{n} 1} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j (n-j).$$

Vertauschung end. Summen

Beh.: (i) $\frac{1}{(j+1)^2} \leq 12 I_j \leq \frac{1}{j^2} \quad \forall j \in \mathbb{N}$ (Beweis unten)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} I_j =: 1 - \ln C \quad \text{existiert}$$

(ii) $\frac{1}{n+1} \leq 12 \sum_{j=n}^{\infty} I_j \leq \frac{1}{n-1}$

folgt aus Integralkriterium (Satz 6.36) und (i)

---

zu (i): nütze Wegheben positiver & negative Anteile aus:

$$I_j = \int_0^{1/2} \frac{1/2 - x}{j+x}\, dx + \underbrace{\int_{1/2}^{1} \frac{1/2 - x}{j+x}\, dx}_{\int_0^{1/2} \frac{y - \frac{1}{2}}{j+1-y}\, dy} \quad y = 1 - x \text{ (Subst)}$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\tfrac{1}{2} - x\right) \underbrace{\left[\frac{1}{j+x} - \frac{1}{j+1-x}\right]}_{\frac{\cancel{j}+1-x-\cancel{j}-x}{(j+x)(j+1-x)}} dx = 2 \int_0^{1/2} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} - x\right)}_{\geq 0}{}^2 \underbrace{\frac{1}{(j+x)(j+1-x)}}_{=: A_j(x)} dx$$

Da • $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]: \frac{1}{(j+\frac{1}{2})(j+1)} \leq A_j(x) \leq \frac{1}{j(j+\frac{1}{2})}$

• $\int_0^{1/2} (\frac{1}{2}-x)^2 dx = -\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-x)^3 \Big|_0^{1/2} = +\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{24}$

$$\Rightarrow \frac{1/12}{(j+\frac{1}{2})(j+1)} \leq I_j \leq \frac{1/12}{j(j+1/2)} \quad \Rightarrow \text{(i)} \checkmark$$

Somit: $\ln(n!) \overset{(i)}{=} (n+\frac{1}{2})\ln n - n + \ln C' + \sum_{j=n}^{\infty} I_j$

$$\Rightarrow n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} C' \underbrace{e^{\sum_{j=n}^{\infty} I_j}}_{=:\phi_n} \qquad (1)$$

(ii)
$$\Rightarrow e^{\frac{1}{12(n+1)}} \leq \frac{n!}{C'\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \leq e^{\frac{1}{12(n-1)}}$$

Es verbleibt zu zeigen: $C' = (2\pi)^{+\frac{1}{2}}$

1. Schritt: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \overset{(1)}{=} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} C' \phi_{2n}}{n^{2n+1} e^{-2n} C'^2 (\phi_n)^2}$

$\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow$
$$C = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}} \qquad (2)$$

2. Schritt: Wallissches Produkt (siehe Blatt 1)

$$\pi = 2 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi} = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\sqrt{2n+1}}$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\frac{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (2n)^2}{(2n)!}}_{2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n)!}}}_{(2)\quad C/\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}}}_{1}$$

$\boxtimes$

6.4. Taylor-Reihen

Bekannt: Potenzreihen definieren Funktionen

Frage: Lässt sich geg. Fkt. als Potenzreihe darstellen?

Dafür hilft

6.41 Satz (Taylor, 1715)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $a \in I$, $f: I \to \mathbb{C}$ $(n+1)$-mal stetig diff.-bar. Dann gilt, $\forall x \in I$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^{\nu}}_{=: T_{n,a}(x) =: T_n(x)} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt}_{=: R_{n,a}(x) =: R_n(x)}$$

n-tes Taylor-Polynom (bei a) — n'tes Restglied (bei a)

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

(Taylor) „Entwicklung von f um a".

Beweis: Zeige ~~ind.~~ rekursiv $f = T_j + R_j \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$

$j=0$: $T_0(x) + R_0(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \overset{HDI}{=} f(x) \quad \forall x \in I$ ✓

$j-1 \to j$:

gelte also $f = T_{j-1} + R_{j-1}$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$.

Da

$$R_{j-1}(x) = \frac{1}{(j-1)!}\underbrace{\int_a^x f^{(j)}(t)\underbrace{(x-t)^{j-1}}_{-\frac{1}{j}\frac{d}{dt}(x-t)^j}\,dt}_{\text{PI, } f^{(j)} \text{ stetig diff.bar für } j \le n}$$

$$-\frac{1}{j} f^{(j)}(t)(x-t)^j\Big|_a^x + \frac{1}{j}\int_a^x f^{(j+1)}(t)(x-t)^j\,dt$$

$$= \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a)^j + R_j(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{T_{j-1}(x) + \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a)^j}_{T_j(x)} + R_j(x) \quad \forall x \in I$$

∎

6.42 Satz (Lagrange-Form des Restglieds)

Voraussetzungen wie in Satz 6.41 und zusätzlich $f(I) \subseteq \mathbb{R}$.

Dann gilt: $\forall x \in I\ \exists$ Zwischenwert $\xi = \xi_{x,a,n} \in \begin{cases} [x,a] & \text{falls } x<a \\ [a,x] & \text{falls } x \ge a \end{cases}$

so dass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Beweis: Fall: $x \ge a$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\underbrace{(x-t)^n}_{\ge 0}\,dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\underbrace{\int_a^x (x-t)^n\,dt}_{-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}\Big|_a^x}$$

Mittelwertsatz d. Integralrechnung 6.15 ($\exists \xi \ldots$)

Fall: $x < a$ analog; Satz 6.15 gilt auch für $g \le 0$!

∎

6.43. Definition (Landau-Symbole)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Sei $g \neq 0$ „in der Nähe" von x_0, d.h.

- falls $x_0 \in \mathbb{R}$: $\exists \varepsilon > 0 : x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\} \Rightarrow g(x) \neq 0$
- falls $x_0 = \infty$: $\exists N \in \mathbb{N} : x > N \Rightarrow g(x) \neq 0$
- falls $x_0 = -\infty$: " $x < -N \Rightarrow g(x) \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to x_0 \\ (\text{„}f \text{ ist groß-O von } g\text{"}) \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \limsup_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to x_0 \\ (\text{„}f \text{ ist klein-O von } g\text{"}) \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

6.44 Korollar Unter den Vor. von Satz 6.41 gilt, für $x \to a$:

$$R_{n,a}(x) = O((x-a)^{n+1}), \text{ insbes.}$$
$$R_{n,a}(x) = o((x-a)^n).$$

Beweis: Separate Anwendung von Satz 6.42 auf $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \exists$ Zwischenwerte $\xi_1, \xi_2 \in \begin{array}{c} [x,a] \\ [a,x] \end{array}$ für $\begin{array}{c} x < a \\ x \geq a \end{array}$:

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{\operatorname{Re} f^{(n+1)}(\xi_1) + i \operatorname{Im} f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}$$

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(a)|}{(n+1)!} < \infty$$

da:
- $x \to a \Rightarrow \xi_1, \xi_2 \to a$
- $f^{(n+1)}$ stetig. ∎

6.45 Korollar (Entwicklung in Taylor-Reihe)

Sei $f: I \to \mathbb{C}$ bel. oft. diff.bar, seien $a, x \in I$. Äquiv. sind:

(i) $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ (Taylor-Reihe von f um a)

(ii) $\lim_{n \to \infty} R_{n,a}(x) = 0$

6.46. Bemerkungen

(a) Alle Eigenschaften von Potenzreihen $\sum_n c_n x^n$ in Kap. 4 gelten analog für $\sum_n c_n (x-a)^n$

(b) Warnung: Es kann sein, dass $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ kgt., aber nicht gegen $f(x)$! In dem Fall gilt $\lim_{n \to \infty} R_{n,a}(x)$ existiert und $\neq 0$ (vgl. Üb. !)

(c) Falls $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} c_n (x-a)^n$ Potenzreihe, kgt. für $|x-a| < R$, $R > 0$ (R: Konv.radius)

$\Rightarrow$ Potenzreihe = Taylor-Reihe, da:

Kor 6.30 $\Rightarrow$

$$f^{(k)}(a) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} c_n \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^n}_{\delta_{k,n} \cdot n!} \Big|_{x=a} = c_k \, k!$$

Kronecker-delta: $\delta_{k,n} := \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$.

6.47. Beispiele

(a) Sei $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x)^\alpha$

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)\,(1+x)^{\alpha-n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + R_{3,0}(x)$$

$(a=0)$

Es gilt: $R_{n,0}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall |x|<1$ (Siehe z. B. Forster)

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha+1-j}{j}\right)}_{=:\binom{\alpha}{n}} x^n \qquad \forall |x|<1$$

($\leftarrow$ stimmt für $\alpha \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!\,n!}$ überein)

Spezialfälle:

- $\alpha = -1$: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad (x \to 0)$
- $\alpha = \frac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^4) \quad (x \to 0)$

(b) Effizientes Berechnen des Taylor-Polynoms um 0 von $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ bis auf Terme $\mathcal{O}(x^3)$:

$$f(x) = e^{1 + x/2 - x^2/8 + \mathcal{O}(x^3)} = e \cdot e^{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{e} = 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right) + \frac{1}{2!}\underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right)^2}_{\frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^3)}$$

$$+ \underbrace{\mathcal{O}\left(\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right)^3\right)}_{\mathcal{O}(x^3)}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

(c) Logarithmus-Reihe: $\forall |x| < 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4(x)$$

Beweis

$$\ln(1+x) = \int_0^x \underbrace{\frac{1}{1+t}}_{\sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-1)^n t^n} dt = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \underbrace{\int_0^x (-1)^n t^n \, dt}_{(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

Vertauschung nach Satz 6.27,

da $S_N(t) := \sum_{n=0}^{N} (-t)^n$ glm. kgt.

in $|t| \leq |x| < 1$ (Satz 4.23 + Bsp. 4.18 (ii)) ∎

Zusatz: Aussage bleibt wahr für $x = +1$;

verwende Abelschen Grenzwertsatz

(siehe z.B. Forster)

$$\Rightarrow \quad \ln 2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

7. Metrische Räume

- bislang: $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ bewertete Körper
  hier: nur Abstandsbegriff (keine Körpereigenschaften)
- ausreichend für Gültigkeit manche fundamentaler Sätze über stetige Funktionen aus Kap. 3.4
- Vektorräume $\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, als Spezialfälle

7.1. Metriken und Normen

7.1. Definition Sei X Menge und $d: X \times X \to \mathbb{R}$

d Metrik auf X $:\Leftrightarrow$
- (M1) $\forall x, y \in X: d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (M2) Symmetrie $\forall x, y \in X$: $d(x,y) = d(y,x)$
- (M3) Dreiecks-Ungleichung: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $\forall x, y, z \in X$

(X, d) heißt metrischer Raum
[meist auch nur X, falls klar welches d]

7.2 Bemerkung: Aus den Axiomen der Metrik folgt $\forall x, y \in X$

$$0 \overset{(M1)}{=} d(x,x) \overset{(M3)}{\leq} d(x,y) + d(y,x) \overset{(M2)}{=} 2\, d(x,y)$$

also $d: X \times X \to \underline{\underline{\mathbb{R}_{\geq 0}}}$

(dies wird manchmal auch vorausgesetzt, wäre aber nicht nötig).

7.3. Beispiele (a) $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $d(x,y) := |x-y|$ ← Betrag

Euklidischer Abstand

(b) Für bel. Menge X ist $d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

sog. diskrete Metrik

[(M1), (M2) klar; zu (M3): klar für $x = y$; falls $x \neq y$
$\Rightarrow d(x,y) = 1$ und $d(x,z) + d(z,y) \geq 1$
da $x = z \wedge y = z$ nicht möglich!]

(c) Falls (X, d) metrischer Raum und $A \subseteq X$
$\Rightarrow (A, d|_{A \times A})$ metrischer Raum

Einschränkung von d auf A = induzierte Metrik

Wichtiger Spezialfall:

7.4. Definition Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

$\|\cdot\|$ Norm auf V: $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{(N1)} & \forall x \in V: \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \text{(N2)} & \forall x \in V\ \forall \lambda \in \mathbb{K}: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \\ \text{(N3)} & \forall x, y \in V: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{cases}$

Betrag in $\mathbb{K}$

$(V, \|\cdot\|)$ normierter (Vektor-) Raum

[meist auch nur V, falls klar welches $\|\cdot\|$]

7.5. Lemma Sei $(V, \|\cdot\|)$ norm. Raum. Dann def. $d(x,y) := \|x-y\|$ $\forall x,y \in V$ eine Metrik auf V

Beweis: (M1) aus (N1) & Def., (M2) aus (N2) & Def.

(M3): $d(x,y) = \underbrace{\|x-y\|}_{x-z+z-y} \overset{(N3)}{\leq} \underbrace{\|x-z\|}_{d(x,z)} + \underbrace{\|z-y\|}_{d(z,y)}$ ∎

7.6. Bemerkung (a) Der Absolutbetrag $|\cdot|$ auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist eine Norm.

(b) Jede symmetrische, pos. definite Sesquilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf Vektorraum V induziert Norm gemäß

$$V \ni x \longmapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

7.7. Satz Sei $V = \mathbb{K}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, und $p \in [1, \infty]$

(a) Dann def.

$$\mathbb{K}^\nu \ni \underset{(x_1, \dots, x_\nu)}{\overset{\shortparallel}{x}} \longmapsto \|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{\nu} |x_j|^p \right)^{1/p}, & p < \infty \\ \max\{|x_1|, \dots, |x_\nu|\}, & p = \infty \end{cases}$$

eine Norm auf $\mathbb{K}^\nu$, die p-Norm.

(b) Sei $\mathbb{K}^\nu \times \mathbb{K}^\nu \ni (x,y) \longmapsto \sum_{j=1}^{\nu} \overline{x_j} y_j =: \langle x, y \rangle =: x \cdot y$

Euklidisches (Standard-)Skalarprodukt und $p, q \in [1, \infty]$

mit $\underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$ (Konvention: $\frac{1}{\infty} := 0$).

(Hölder-) konjugierter Exponenten

Dann gilt:

$\forall x, y \in \mathbb{K}^\nu$: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ (Hölder-Ungleich.)

Spezialfall $p = q = 2$: Cauchy-Schwarz-Ungl.

Der Beweis beruht auf

$\boxed{\text{7.8 Satz}}$ Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ 2 mal stetig diff. bar. Dann gilt:

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f \text{ konvex auf } I$$

Erinnerung: $f: I \to \mathbb{R}$ konvex $:\iff \forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad (*)$$

(vgl. Tutoriumsblatt 13, Ana 1!)

Beweis "$\Rightarrow$" Sei $x := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, o.E. $x_1 < x_2$

(Fall $x_1 = x_2$ klar; $x_1 > x_2$ analog) also $x_1 < x < x_2$

Mittelwertsatz: $\exists\, \xi_1 \in]x_1, x[$; $\exists\, \xi_2 \in]x, x_2[$, so dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{\underbrace{x - x_1}_{(1-\lambda)(x_2 - x_1)}} = f'(\xi_1) \underset{f'' \geq 0 \Rightarrow f' \text{ isoton}}{\leq} f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{\underbrace{x_2 - x}_{\lambda(x_2 - x_1)}}$$

$$\Rightarrow \lambda [f(x) - f(x_1)] \leq (1-\lambda)[f(x_2) - f(x)] \Rightarrow (*)$$

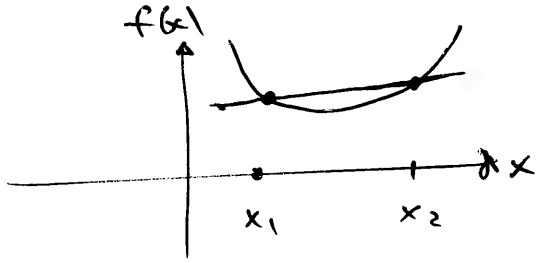
"$\Leftarrow$" ⊛ siehe z.B. Forster, Analysis I, §16, Satz 6

⊛ Wir benötigen im folgenden diese Richtung nicht, deshalb ist nur "$\Rightarrow$" wiedergegeben

7.9. Bemerkung

(a) f konkav $:\Leftrightarrow -f$ konvex

(b) geom. Interpretation von konvex: Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ liegt zwischen x_1 und x_2 über dem Graphen von f



(c) $\exp$ konvex auf $\mathbb{R}$.

7.10. Korollar (Youngsche Ungleichung)

Seien $a, b \in [0, \infty[$, seien $p, q \in [1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Dann gilt
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beweis: Klar, falls $a = 0 \vee b = 0$. Seien nun $a, b \neq 0$

$$ab = e^{\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)} \underset{\exp \text{ konvex}}{\leq} \frac{1}{p} e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q} e^{\ln(b^q)} \quad \blacksquare$$

Beweis von Satz 7.7. (b) $|\langle x, y\rangle| \overset{\Delta\text{'s-Ung}}{\leq} \sum_{j=1}^{\nu} |x_j y_j|$

1. Fall: $p = \infty$ ($\Rightarrow q = 1$) $\quad \sum_{j=1}^{\nu} |x_j y_j| \leq \left(\max_{k=1,\dots,\nu} |x_k|\right) \sum_{j=1}^{\nu} |y_j|$ ✓

[analog: $q = \infty$ ($\Rightarrow p = 1$)]

2. Fall: $p, q < \infty$. o.E. sei $x \neq 0$ und $y \neq 0$ (sonst klar)

für $j = 1, \dots, \nu$, setze $\xi_j := \frac{|x_j|}{\|x\|_p}$, $\eta_j := \frac{|y_j|}{\|y\|_q}$.

$$\Rightarrow \frac{|x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \xi_j \eta_j \overset{\text{Young-Ungl.}}{\leq} \frac{\xi_j^p}{p} + \frac{\eta_j^q}{q}$$

$$\sum_j \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{\nu} |x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \text{Beh.} \checkmark$$

(a) (N1), (N2) klar

zu zeigen (N3): $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ (Minkowski-Ungleichung)

1. Fall: $p = \infty$: $\|x+y\|_\infty = \max_{j=1,\dots,\nu} \underbrace{|x_j+y_j|}_{\leq |x_j|+|y_j|} \leq \max_j |x_j| + \max_j |y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ ✓

2. Fall: $p = 1$: $\|x+y\|_1 = \sum_{j=1}^{\nu} \underbrace{|x_j+y_j|}_{\leq |x_j|+|y_j|} \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ ✓

3. Fall: $p \in]1;\infty[$: Sei $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} := 1$ und

$z_j := |x_j+y_j|^{p-1}$ für $j = 1,\dots,\nu$, o.E. $x+y \neq 0$ (sonst klar)

da $q(p-1) = qp(1-\frac{1}{p}) = p \Rightarrow z_j^q = |x_j+y_j|^p$

$$\Rightarrow \|z\|_q = \|x+y\|_p^{p/q}$$

Somit

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{j=1}^{\nu} \underbrace{|x_j+y_j| z_j}_{\leq |x_j| z_j + |y_j| z_j} \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|x\|_p \|z\|_q + \|y\|_p \|z\|_q$$

mit $p - \frac{p}{q} = p(1-\frac{1}{q}) = 1 \Rightarrow$ Beh

$\|z\|_q \neq 0$

$\blacksquare$

7.11. Lemma Sei M Menge und

$$B(M) := \{ f : M \to \mathbb{K} \text{ mit } \underbrace{f \text{ beschränkt}}_{\Leftrightarrow \|f\|_\infty := \sup_{x \in M} |f(x)| < \infty} \}$$

Dann ist $(B(M), \|\cdot\|_\infty)$ norm. Raum.

<u>Beweis</u>: Übung!

7.2. Offene und abgeschlossene Mengen

7.12 Definition Sei (X, d) metrischer Raum.

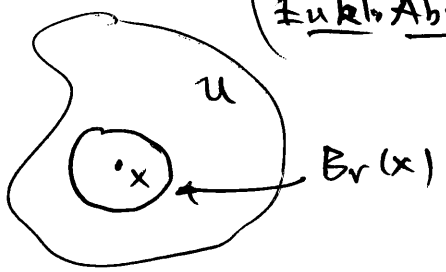
(a) Sei $a \in X$, $r > 0$

$B_r(a) := \{x \in X : d(x,a) < r\}$ — offene Kugel (Ball) um a mit Radius r

(b) Sei $x \in X$ und $U \subseteq X$

$\left.\begin{array}{l}U \text{ Umgebung} \\ \text{von } x\end{array}\right\} :\Leftrightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U$

Bild: ($\mathbb{R}^2$ mit Eukl. Abst.)



(c) Sei $A \subseteq X$

$\begin{array}{l}A \text{ offen} \\ (\text{offene Menge})\end{array} :\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall x \in A\ \exists \text{ Umgebung } U \\ \text{von } x \text{ mit } U \subseteq A\end{array}\right.$

(„A ist Umgebung aller Punkte von A")

7.13. Bemerkungen

(a) $X = \mathbb{R}$ (mit $|\cdot|$ als Norm), seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$\Rightarrow\ ]a,b[$ ist offen, $]a,b]$ ist nicht offen

für $x \in]a,b[$ sei $\varepsilon_x := \min\{x-a, b-x\}$

$\Rightarrow\ B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq]a,b[$

$\forall r > 0 : B_r(b) \not\subseteq]a,b]$

(b) $\forall x \in X\ \forall r > 0 :$ $B_r(x)$ ist Umgebung von x.

(c) A offen $\Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists r_x > 0 : B_{r_x}(x) \subseteq A$

<u>Beweis</u>: "$\Rightarrow$" aus Def. 7.12(b)
"$\Leftarrow$" aus Bem. 7.13(b)

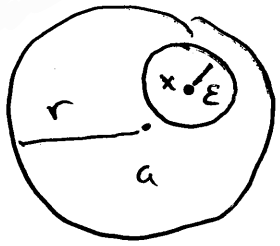
(d) Jede offene Kugel in (X,d) ist offen (offene Menge)

<u>Bew</u>: Sei $x \in B_r(a)$

$\Rightarrow \varepsilon := r - d(x,a) > 0$, und $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(a)$,

denn: $\forall y \in B_\varepsilon(x)$ gilt: $d(y,a) \leq \underbrace{d(y,x)}_{<\varepsilon} + d(x,a)$

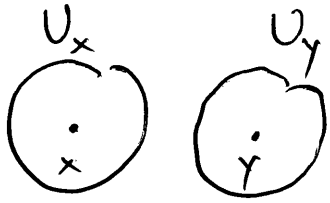
$< \varepsilon + d(x,a) = r.$ ∎



7.14 Satz (Hausdorffsches Trennungsaxiom)

Sei (X,d) metr. Raum. $\forall x,y \in X$ mit $x \neq y$.
$\exists$ Umgebungen U_x von x, U_y von y, so dass $U_x \cap U_y = \emptyset$

<u>Beweis</u>: $x \neq y \Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{3} d(x,y) > 0$



Wir zeigen $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$

($\overset{7.13(b)}{\Rightarrow}$ Beh.) Also: Sei $z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$

$\Rightarrow 3\varepsilon = d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(z,y)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$ ↯ ∎

7.15. Satz (Eigenschaften offener Mengen in metr. Raum X)

(a) $\emptyset$ und X sind offen.

(b) $A_1, \dots, A_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, offen $\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} A_j$ offen.

(c) Sei $J \neq \emptyset$ Menge und $\forall j \in J$ sei $A_j \subseteq X$ offen

$\Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j$ offen.

<u>also</u>: <u>endliche</u> Schnitte u. <u>bel.</u> Vereinigungen off. Mengen sind offen!

<u>Beweis</u>: (a) X offen, da $\forall x \in X$: X ist Umgebung von x

$\emptyset$ offen, da nichts nachzuprüfen.

(b) Es genügt zu zeigen: $A_1 \cap A_2$ offen.

Sei $x \in A_1 \cap A_2$; $A_{1/2}$ offen $\Rightarrow \exists r_{1/2}: B_{r_{1/2}} \subseteq A_{1/2}$ (1 <u>und</u> 2)

Sei $r := \min(r_1, r_2) > 0 \Rightarrow B_r(x) \subseteq A_1 \cap A_2$ ✓

(c) Sei $x \in \bigcup_{j \in J} A_j \overset{\text{per Def.}}{\Longleftrightarrow} \exists j_0 \in J : x \in A_{j_0}$

da A_{j_0} offen $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A_{j_0} \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$ ∎

<u>7.16. Warnung</u>: Selbst <u>abzählbar</u> Schnitte offener Mengen sind <u>i.a.</u> nicht offen!

<u>Bsp.</u>: $\forall j \in \mathbb{N}$ sei $A_j :=]-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}[\Rightarrow \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \{0\}$.

$\boxed{\text{7.17 Definition}}$ X metr. Raum.

$A \subseteq X$ <u>abgeschlossen</u> $:\Longleftrightarrow \underbrace{X \setminus A}_{= A^c}$ offen

<u>7.18. Bemerkungen</u>

(a) $\emptyset, X$ sowohl offen als auch abgeschlossen.

(b) Sei $A \subseteq X$: $\neg$(A offen) $\not\Rightarrow$ A abgesch.

Bsp.: $[0,1[$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgesch.,

da $\mathbb{R} \setminus [0,1[\; = \;]-\infty, 0[\; \cup \; [1, \infty[$

nicht offen.

7.19. Definition Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$.

(a) $x \in X$ Randpunkt von A $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall \text{ Umgebung } U \text{ von } x \text{ gilt} \\ U \cap A \neq \emptyset \text{ und } U \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$

$\partial A := \{ x \in X : x \text{ ist Randpkt. von } A \}$ Rand von A

(b) $\mathring{A} := A \setminus \partial A$ Inneres von A

(c) $\overline{A} := A \cup \partial A$ Abschluss von A

7.20. Beispiele (a) $X = \mathbb{R}^{\circledast}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $A := [a, b[$

$\Rightarrow \partial A = \{a, b\}$, $\mathring{A} =]a, b[$, $\overline{A} = [a, b]$

(b) $X = \mathbb{R}^{\circledast}$, $A = \mathbb{Q} \Rightarrow \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

($\circledast$ versehen mit $|\cdot|$)

7.21. Satz Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt

(a) $\mathring{A}$ ist offen

(b) $\overline{A}$ ist abgeschlossen

(c) ∂A ist abgeschlossen.

<u>Beweis</u>: (a) falls $\mathring{A} = \emptyset$ klar; sei nun also $\mathring{A} \neq \emptyset$ und $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists$ Umgebung U von x mit $U \cap A^c = \emptyset$ (denn sonst $x \in \partial A$). $\Rightarrow U \subseteq A$

O.E., sei U zudem <u>offen</u> (sonst, verkleinere auf <u>offene</u> Teilmenge von U, die x enthält – z.B. $\exists r > 0: B_r(x) \subseteq U$)

$\Rightarrow U \cap \partial A = \emptyset$ (Ann: $\exists y \in U \cap \partial A \overset{U \text{ offen}}{\Rightarrow} U$ ist auch Umgebung von $y \Rightarrow U \cap A^c \neq \emptyset$ (da $y \in \partial A$) $\lightning$).

$\Rightarrow U \subseteq \mathring{A}$ ✓

(b) per. def gilt <u>stets</u> $\partial A = \partial(A^c)$

und (a) $\Rightarrow \mathring{(A^c)}$ offen

$\Rightarrow \bar{A} = A \cup \partial A = (X \setminus A^c) \cup \partial(A^c)$

$= X \setminus (\underbrace{A^c \setminus \partial(A^c)}_{\mathring{(A^c)}}) \Rightarrow$ abgeschlossen

(c) $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

$\Rightarrow X \setminus \partial A = \underbrace{(X \setminus \bar{A})}_{\text{(b) offen}} \cup \underbrace{\mathring{A}}_{\text{(a) offen}}$ offen nach Satz 7.15.(c)

∎

7.22. Satz Sei X metr. Raum. Dann gilt:

(a) A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $A = \bar{A}$

(b) A ist offen $\Leftrightarrow$ $A = \mathring{A}$

<u>Beweis</u>. (a) "$\Leftarrow$" Satz 7.21 (b)

"$\Rightarrow$" Wir zeigen $\partial A \subseteq A$ (denn $\Rightarrow \bar{A} \subseteq A$; zusammen mit $A \subseteq \bar{A}$ (aus def.!) $\Rightarrow$ Beh.).

Per Widerspruch: Ann.: $\exists x \in \partial A$ mit $x \in A^c$

n.V. A^c <u>offen</u>

$\Rightarrow \exists$ Umgebung U von x : $U \subseteq A^c$ ↯ zu $x \in \partial A$ ✓

(b) "$\Leftarrow$" Satz 7.21 (a)

"$\Rightarrow$" Übung! ∎

7.3. Folgen, Limiten, Stetigkeit

7.23 Definition Sei (X,d) metr. Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge, $x \in X$.

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. gegen x in Zeichen: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ bzw. $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ $:\Longleftrightarrow$ $\forall\, \mathcal{U}$, Umgebung von x $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$: $x_n \in \mathcal{U}$

(b) $(x_n)_n$ Cauchy-Folge $:\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n,m \geq N$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

(c) X vollständig $:\Longleftrightarrow$ jede Cauchy-Folge in X kgt.

7.24. Bemerkung

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \underbrace{x_n \in B_\varepsilon(x)}_{\Longleftrightarrow\ d(x_n,x) < \varepsilon}$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$

"$\Longrightarrow$" Bem. 7.13(b); "$\Longleftarrow$" per def. 7.12(b) von $\mathcal{U}$.

(b) $(x_n)_n$ kgt. $\Longrightarrow$ $(x_n)_n$ Cauchy-Folge

Bew: Übung

(c) Im Fall $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit Norm $|\cdot|$ ist Def. 7.23 im Einklang mit den Begriffsbildungen aus Analysis I!

Spezialfall $(\mathbb{K}^\nu, \|\cdot\|_p)$ wird auf Körper $\mathbb{K}$ zurückgeführt.

7.25 Satz Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, versehen mit der p-Norm für $1 \le p \le \infty$. Dann gilt:

(a) Mit $x_n := (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(\nu)})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $x := (x^{(1)}, \dots, x^{(\nu)}) \in \mathbb{K}^\nu$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall j = 1, \dots, \nu : \lim_{n\to\infty} x_n^{(j)} = x^{(j)}$$

Also: Kgz. $\iff$ komponentenweise Kgz.

(b) $\mathbb{K}^\nu$ ist vollständig (mit p-Norm!) (vollst. norm. Raum $=:$ Banach-Raum)

Beweis: Beachte: $\forall j = 1, \dots, \nu, \forall y \in \mathbb{K}^\nu$: $|y^{(j)}| \le \|y\|_p$ $(*)$

(a) "$\Rightarrow$" $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $0 \le |x_n^{(j)} - x^{(j)}| \le \|x_n - x\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow x_n^{(j)} - x^{(j)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in $\mathbb{K}$.

"$\Leftarrow$" Sei $\lim_{n\to\infty} x_n^{(j)} = x^{(j)}$ $\forall j = 1, \dots, \nu$, Sei $\varepsilon > 0$ bel.

$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, \nu$ $\exists N_{j,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ $\forall n \ge N_{j,\varepsilon}$

$|x_n^{(j)} - x^{(j)}| < \varepsilon$.

Sei $N_\varepsilon := \max(N_{1,\varepsilon}, \dots, N_{\nu,\varepsilon})$ $(\in \mathbb{N})$

$\Rightarrow \forall n \ge N_\varepsilon$:

$$\|x_n - x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{\nu} |x_n^{(j)} - x^{(j)}|^p\right)^{1/p} < \sqrt[p]{\nu}\,\varepsilon & p < \infty \\ \max_{j=1,\dots,\nu} |x_n^{(j)} - x^{(j)}| < \varepsilon & p = \infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p = 0.$$

(b) Aus (*): $(x_n)_n \subseteq \mathbb{K}^\nu$ Cauchy bzgl. $\|\cdot\|_p$

$\Rightarrow \forall j = 1,\dots,\nu: \quad (x_n^{(j)})_n \subseteq \mathbb{K}$ Cauchy (bzgl. $|\cdot|$)

$\mathbb{K}$ vollst.

$\Rightarrow \forall j \in 1,\dots,\nu \ \exists x^{(j)} \in \mathbb{K}: \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(j)} = x^{(j)}$.

Somit nach (a): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, wobei $x := (x^{(1)},\dots,x^{(\nu)})$ ∎

7.26 Satz Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt

$$A \text{ abgeschlossen} \iff \begin{cases} \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \text{ mit } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X \\ \Rightarrow x \in A \end{cases}$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow \forall U$ Umgebung von x gilt: $\exists x_n$ mit $x_n \in U$ d.h. $U \cap A \neq \emptyset$

$\overset{A^c \text{ offen}}{\Rightarrow} \quad x \notin A^c \quad$ also $\quad x \in A$ ✓

"$\Leftarrow$": Sei $x \in A^c$; Beh.: $\exists n \in \mathbb{N}: B_{1/n}(x) \subseteq A^c$

(Beh. $\Rightarrow A^c$ offen $\Rightarrow A$ abgeschl. ✓)

Beh. ist wahr, denn andernfalls: $\forall n \in \mathbb{N}: B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ wähle $x_n \in B_{1/n}(x) \cap A$ aus

$\Rightarrow (x_n)_n \subset A$ und $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow x \in A$ ↯ ∎

7.27. Definition Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$

- Durchmesser $\operatorname{diam}(A) := \sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)$

- A beschränkt $:\iff \operatorname{diam}(A) < \infty$

7.28. Satz (verallg. Intervallschachtelungsprinzip)

Sei X vollständiger metr. Raum und $A_n \subseteq X$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\forall n \in \mathbb{N}$ gelte:
- $A_n \neq \emptyset$
- A_n abgeschlossen
- $A_{n+1} \subseteq A_n$

dazu:
- $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$

Dann $\exists!\, x \in X$ mit $x \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Existenz: $\forall n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in A_n$

- Da $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$: $\operatorname{diam}(A_n) < \varepsilon$

und da $\forall n, m \geq N$: $x_n, x_m \in A_N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)_n$ Cauchy $\overset{X \text{ vollst}}{\Longrightarrow} \exists x \in X$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

- $\forall N \in \mathbb{N}$ gilt: $(x_n)_{n \geq N} \subseteq A_N \xrightarrow[\text{Satz 7.26}]{A_N \text{ abgeschl.}} x \in A_N$

Eindeutigkeit: Für $x, y \in X$ gelte: $x, y \in A_N$ $\forall N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow d(x,y) \leq \operatorname{diam}(A_N)$ $\forall N \in \mathbb{N} \overset{N\to\infty}{\Longrightarrow} d(x,y) \leq 0$

$\Rightarrow x = y$ ∎

7.29 Definition Seien (X, d), $(Y, \tilde{d})$ metr. Räume, $f: X \to Y$ und $a \in X$

- f folgenstetig in a $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall (x_n)_n \subseteq X \text{ mit } x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \text{ gilt:} \\ f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a) \end{cases}$

bzgl. d bzgl. $\tilde{d}$

- f stetig in a $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall \text{ Umgebungen } V \text{ von } f(a) \text{ gilt:} \\ \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } a \text{ mit} \\ f(U) \subseteq V \end{cases}$

Übung $\Longleftrightarrow$ (Metr. R.-(MR))

$$\left\{ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (= \delta_{\varepsilon,a}) : \ \forall x \in X : \ d(x,a) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(a)) < \varepsilon \right.$$

7.30. Satz Unter den Gegebenheiten von Def. 7.29 gilt

$$f \text{ stetig in } a \iff f \text{ folgenstetig in } a$$

Bew: „$\Rightarrow$": Sei $(x_n)_n \subseteq X$ Folge mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

Sei V bel. Umgebung von $f(a)$ $\overset{f \text{ stetig}}{\underset{\text{in } a}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ Umgeb. U von a mit $f(U) \subseteq V$ (*)

Da $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: x_n \in U \overset{(*)}{\Longrightarrow} f(x_n) \in V$

$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$ ✓

„$\Leftarrow$": (analog Satz 3.8 in Ana 1)

Ann: f nicht stetig in $a \iff \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0$:
$\exists x \in X$ mit $d(x,a) < \delta$ und $\tilde{d}(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$

$\overset{\delta = \frac{1}{n}}{\iff} \exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in X$ mit $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ und $\tilde{d}(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und $(f(x_n))_n$ kgt. nicht gegen $f(a)$ ↯ ∎

7.31. Bemerkung

(a) Wegen Satz 7.30 fortan keine Unterscheidung zwischen stetig und folgenstetig in metr. Räumen – wir nennen beides stetig!

(b) In allgemeinerem Kontext (topol. Räume) bleiben die Def. von folgenstetig und stetig sinnvoll, nicht aber die Äquivalenz „(MR)".

Konsequenz: „$\Leftarrow$" in Satz 7.30 gilt dort (in top. R.) nicht notwendigerweise!

(c) Def. 7.29 ist im Einklang mit Def. 3.7 für den Spezialfall $X = (D, d)$, $Y = (\mathbb{K}^1, |\cdot|)$

$\mathbb{K}^\nu$ Einschränkung des euklid. Abstands $|\cdot|$ auf D

7.32 Satz Sei X metr. Raum und $f: X \to \mathbb{K}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)

Da $\underset{X}{f(x)} = \underset{\mathbb{K}^\nu}{y} = (y_1, \dots, y_\nu) =: (f_1(x), \dots, f_\nu(x))$ $\forall x \in X$ induziert f Abbildungen $f_j: X \to \mathbb{K}$ für $j = 1, \dots, \nu$

Dann gilt $\forall a \in X$:

$$f \text{ stetig in } a \iff \forall j = 1, \dots, \nu: f_j \text{ stetig in } a$$

<u>Konvention</u>: Wenn nicht anderweitig spezifiziert, versehen wir immer $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit $|\cdot|$ (Absolutbetrag) und $\mathbb{K}^\nu$ mit Euklidischer Norm $\|\cdot\|_2$ (die äquivalent zu $\|\cdot\|_p$, vgl. Übung).

<u>Beweis von Satz 7.32</u>: Folgenkriterium und Satz 7.25 (a) ∎

Ebenso mittels Folgen:

7.33 Satz Sei X metr. Raum, $f, g: X \to \mathbb{K}$ stetig in $a \in X$

Dann gilt (i) $f+g$ stetig in a (ii) fg stetig in a

(iii) falls $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ stetig in a.

7.34 Korollar Polynome auf $\mathbb{K}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, sind stetig.

$$\underset{(x_1, \dots, x_\nu)}{\mathbb{K}^\nu \ni x} \xmapsto{P} \sum_{A_{N,\nu}} \gamma_{n_1, \dots, n_\nu} x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_\nu^{n_\nu} \in \mathbb{K}, \quad \text{mit } N \in \mathbb{N}_0$$

und $A_{N,\nu} := \{n = (n_1, \dots, n_\nu) \in \mathbb{N}_0^\nu : n_1 + \dots + n_\nu \leq N\}$,

$(\gamma_{n_1, \dots, n_\nu})_{n \in A_{N,\nu}} \in \mathbb{K}^{A_{N,\nu}}$ (P: Polynom des Grades N)

<u>Beweis</u>: Satz 7.33 und $\mathbb{K}^\nu \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x_j$ stetig $\forall j \in \{1, \dots, \nu\}$ ↑ Übung!

Analog zu Satz 3.16 gilt und beweist man:

7-35 Satz Seien (X_j, d_j), $j = 1,2,3$, metr. Räume und $a \in X_1$. Sei $f: X_1 \to X_2$ stetig in a und $g: X_2 \to X_3$ stetig in $f(a)$. Dann ist $g \circ f: X_1 \to X_3$ stetig in a.

7-36 Definition Seien (X, d) und $(Y, \tilde{d})$ metrische Räume und $f: X \to Y$.

f stetig $:\Leftrightarrow$ $\forall a \in X$ gilt: f stetig in a

7-37. Satz Seien (X, d), $(Y, \tilde{d})$ metr. Räume und $f: X \to Y$

Dann gilt:

$$f \text{ stetig} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall V \subseteq Y,\ V \text{ offen (in } Y) \text{ gilt:} \\ f^{-1}(V) \text{ offen (in } X) \end{cases}$$

<u>Beweis</u>:

„$\Leftarrow$": Sei $a \in X$ bel. und V Umgebung von $f(a)$

$\Rightarrow \exists\, \tilde{V} \subseteq V$ mit $\tilde{V}$ offen und $f(a) \in \tilde{V}$

$\overset{\text{u.V.}}{\Rightarrow} U := f^{-1}(\tilde{V})$ <u>offen</u> und $a \in U$,

also U Umgebung von a und $f(U) \subseteq \tilde{V} \subseteq V$. ✓

„$\Rightarrow$": Sei $V \subseteq Y$ offen, sei $a \in f^{-1}(V)$ bel.

$\Rightarrow \exists$ Umgebung $V_{f(a)}$ von $f(a)$ in V

$\overset{\text{u.V.}}{\Rightarrow} \exists\, U_a$ Umgebung von a mit $f(U_a) \subseteq V_{f(a)}$,

also $U_a \subseteq f^{-1}(V_{f(a)}) \subseteq f^{-1}(V)$

$\Rightarrow f^{-1}(V)$ offen ∎

7.4. Kompaktheit

7.38. Definition Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$

- Sei Λ eine (Index-)Menge, $\forall \lambda \in \Lambda$ sei $U_\lambda \subseteq X$ offen
  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ offene Überdeckung von A $:\Leftrightarrow$ $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$
- A kompakt $:\Leftrightarrow$ $\forall$ offene Überdeck. $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von A gilt: $\exists$ endliche Teilüberdeckung, d.h. $\exists N \in \mathbb{N}$ $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda$: $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j}$
  (auch: Heine-Borel-Eigenschaft)
- A folgenkompakt $:\Leftrightarrow$ $\forall$ Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ gilt: $\exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, $\exists x \in A$: $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$
  (auch: Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft)

7.39. Beispiel (a) X metr. Raum und $(x_n)_n \subset X$ kgt. gegen $x \in X$. Dann ist die Menge $A := \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

(i) folgenkpt.

(ii) kpt.

zu (i): Sei $(y_n)_n$ Folge in A, setze $Y := \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$

1. Fall: Y endliche Menge $\Rightarrow$ $(y_n)_n$ besitzt konstante Teilfolge $\Rightarrow$ kgt. ✓

2. Fall: Y unendliche Menge.

NB: $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$ $\Rightarrow$ $\forall l \in \mathbb{N}$ ist $A \setminus B_{1/l}(x)$ endliche Menge

Da $Y \subseteq A$ und $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$ gilt: $\forall l \in \mathbb{N}$: $B_{1/l}(x) \cap Y$ unendl. Menge

$\Rightarrow \exists n_l \in \mathbb{N}$: $y_{n_l} \in B_{1/l}(x)$ $\Rightarrow$ $y_{n_l} \xrightarrow{l \to \infty} x$, also kgt. ✓

zu (ii): Sei $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ bel. offene Überdech. von A.

$\Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda : x \in U_{\lambda_0}$ ← Umgebung von x

Da $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : x_n \in U_{\lambda_0}$

zudem $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1} \in \Lambda : x_j \in U_{\lambda_j}\ \forall j \in \{1, \dots, N-1\}$

$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{j=0}^{N-1} U_{\lambda_j}$ endl. Teilüberdeckung ✓.

Bem: $\tilde{A} := A \setminus \{x\}$ i.a. weder kpt. noch folgenkpt.!

(b) $A = \emptyset$ kpt. und folgenkpt (da nichts zu überprüfen).

7.40 Satz Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt:

A kompakt $\Leftrightarrow$ A folgenkompakt.

7.41 Bemerkung

(a) Wegen Satz 7.40 keine Unterscheidung kpt./folgenkpt. in metr. Räumen nötig. (In allg. Räumen schon!)

(b) "$\Rightarrow$" heißt Satz von Bolzano-Weierstraß

(c) Wir zeigen "$\Leftarrow$" erst am Ende der Vorlesung, da aufwändiger und verwenden es bis dahin auch nicht. Siehe aber Spezialfall in Satz 7.42!

Beweis von "$\Rightarrow$" in Satz 7.40

per Widerspruch: Sei A kpt., aber es gebe eine Folge $(x_n)_n \subseteq A$ ohne kpt.'e TF in A (ins-bes. $\Rightarrow \#\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty$)

Beh.: $\forall x \in A : \exists$ offene Umgebung U_x von x mit $x_n \in U_x$ für höchstens end. viele $n \in \mathbb{N}$.

[In der Tat: Ann: $\exists x \in A: \forall l \in \mathbb{N}$ gilt: $\exists \infty$-viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_{1/l}(x)$; wähle ein solches x_n, und nenne es x_{n_l} $\Rightarrow$ $x_{n_l} \xrightarrow{l \to \infty} x$ ↯]

Nun gilt $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x$ (da $x \in U_x \ \forall x \in A$!)

$\overset{A \text{ kpt.}}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \ \exists x^{(1)}, \dots, x^{(N)} \in A: \ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} U_{x^{(j)}}$

$\Rightarrow$ A enthält nur endlich viele Glieder von $(x_n)_n$ ↯ ∎

In speziellen Fällen geht mehr (und manches leichter!)

7.42 Satz Sei $X = \mathbb{K}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, und $A \subseteq X$. Dann sind äquiv.

(i) A abgeschlossen und beschränkt
(ii) A kpt.
(iii) A folgenkpt.

} Satz von Heine-Borel

7.43 Bemerkung

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" [bzw. „(i) $\Rightarrow$ (iii)"] ist Besonderheit von $\mathbb{K}^\nu$ mit Euklidischer (oder dazu äquivalenter) Norm.

7.44. Korollar Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}^\nu$ beschränkt

$\Rightarrow$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt konvergente Teilfolge.

Zunächst 2 allg. Sätze, die für den Bew. von 7.42 nützlich:

7.45 Satz Sei X metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt:

A (folgen-) kompakt $\Rightarrow$ A abgeschl. und beschränkt.

<u>Beweis</u>: Da (Satz 7.40) kpt. $\Rightarrow$ folgenkpt., genügt es den Satz für A folgenkpt. zu zeigen

Gemäß Satz 6.27 genügt es zu zeigen:

Wenn: Folge $(x_n)_n \subseteq A$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in X$, dann: $x \in A$.

Also: n.V. $\exists$ TF $(x_{n_k})_k \subseteq (x_n)_n$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \tilde{x} \in A$.

Teilfolge einer kgt.'en Folge selben Limes wie Folge(!) $\Rightarrow$ $x = \tilde{x} \in A$ ✓

• Ann.: A unbeschränkt ($\operatorname{diam}(A) = +\infty$)

$\Rightarrow \forall z \in A: \sup\limits_{x\in A} d(z,x) = \infty$ (*)

(denn sonst: $\operatorname{diam}(A) = \sup\limits_{x,y\in A} \underbrace{d(x,y)}_{\le d(x,z)+d(z,y)} \le 2 \sup\limits_{x\in A} d(z,x) < \infty$)

(*) $\Rightarrow \exists$ Folge $(x_n)_n \subseteq A$ mit $d(z,x_n) > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ jede Teilfolge von $(x_n)_n$ unbeschränkt $\Rightarrow$ nicht kgt.!

also ↯ folgenkpt. ∎

$\boxed{\text{7.46 Satz}}$ Sei X metr. Raum, $K \subseteq X$ kpt. und $A \subseteq K$ abgeschlossen. Dann ist A kpt.

<u>Beweis</u>: Sei $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ off. Überdeckung von A

$$\Rightarrow \underbrace{(X\setminus A)}_{\text{n.V. offen!}} \cup \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) = X \supseteq K \Rightarrow \text{off. Üb. von } K$$

K kpt.

$$\Rightarrow \exists \lambda_1,\dots,\lambda_N \in \Lambda: (X\setminus A) \cup U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_N} \supseteq K$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j} \supseteq A, \text{ also } A \text{ kpt.} \quad ∎$$

7.47. Lemma Für $j = 1, \dots, \nu$ seien $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ mit $a_j \leq b_j$

Dann gilt: der abgeschlossene Quader

$$Q := \bigtimes_{j=1}^{\nu} [a_j, b_j] = \{ x \in \mathbb{R}^\nu : a_j \leq x_j \leq b_j \ \forall j = 1, \dots, \nu \}$$

ist kompakt.

7.48 Bemerkung Lemma gilt analog in $\mathbb{C}^\nu$:

Identifiziere $x = (x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbb{C}^\nu$ mit

$$\eta(x) := (\operatorname{Re} x_1, \operatorname{Im} x_1, \dots, \operatorname{Re} x_\nu, \operatorname{Im} x_\nu) \in \mathbb{R}^{2\nu}$$

(i) Da $\underset{\text{in } \mathbb{C}^\nu}{\|x\|_2} = \underset{\text{in } \mathbb{R}^{2\nu}}{\|\eta(x)\|_2}$, bleiben alle metrischen Eigenschaften von $\mathbb{C}^\nu$ unter η erhalten

(Jargon: $\mathbb{C}^\nu$ und $\mathbb{R}^{2\nu}$ sind isometrische isomorphe!)

(ii) Setze: Q abgesch. Quader in $\mathbb{C}^\nu :\Leftrightarrow \exists$ abgesch. Quader $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^{2\nu}$: $Q = \eta^{-1}(\tilde{Q})$

Sei also $Q = \eta^{-1}(\tilde{Q})$ abgesch. Quader in $\mathbb{C}^\nu$ und

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supseteq Q$ offene Überdeckung $\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \eta(U_\lambda) \supseteq \tilde{Q}$

ist offene Überdeckung

(z.B. da $\eta^{-1} : \mathbb{R}^{2\nu} \to \mathbb{C}^\nu$ stetig)

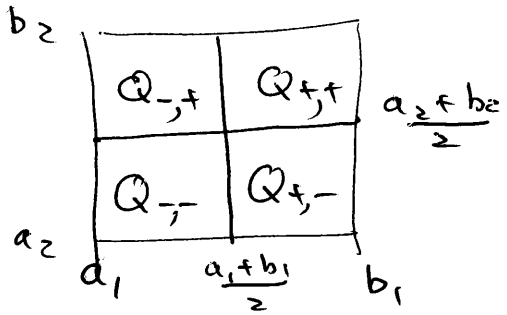
Da $\tilde{Q}$ kpt. nach Lemma 7.47

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda : \tilde{Q} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \eta(U_{\lambda_j})$

$\Rightarrow Q \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j} \Rightarrow$ kpt. ✓

Beweis von Lemma 7.47

$\nu = 2$



Teile Q in 2^ν Quader mit halben Seitenlängen:

$$I_{j+} := \left[\frac{a_j+b_j}{2}, b_j\right]$$

$$I_{j-} := \left[a_j, \frac{a_j+b_j}{2}\right]$$

$$Q = \bigcup_{\substack{\sigma_1=+,-,\\ \dots,\sigma_\nu=+,-}} \underbrace{Q_{\sigma_1,\dots,\sigma_\nu}}_{:= \bigtimes_{j=1}^{\nu} I_{j,\sigma_j}}$$

Ann.: Q nicht kpt. $\Rightarrow \exists$ offene Überdeckung $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Q ohne endl. Teilüberdeckung

$\Rightarrow \exists\, \tilde{\sigma}_j \in \{+,-\}$: $Q^{(1)} := Q_{\tilde{\sigma}_1,\dots,\tilde{\sigma}_\nu}$ wird nicht von endlich vielen U_λ's überdeckt.

$\Rightarrow$ Teile $Q^{(1)}$ in 2^ν Quader ....

Induktiv folgt: $\exists$ Folge $(Q^{(n)})_n$ von Quadern mit

(0) $Q^{(n+1)} \subseteq Q^{(n)} \quad \forall n$

(i) $\operatorname{diam}(Q^{(n)}) = 2^{-n} \operatorname{diam}(Q) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(ii) $Q^{(n)}$ abgeschlossen $\forall n$

(iii) $\forall n$ gilt: $Q^{(n)}$ wird nicht von endlich vielen der U_λ's überdeckt.

$(0) \wedge (i) \wedge (ii) \overset{\text{Satz 7.28}}{\Longrightarrow} \exists!\, x \in \mathbb{R}^\nu$ mit $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q^{(n)}$

$(\text{da } Q^{(n)} \neq \emptyset)$ $\Rightarrow \exists\, \lambda_0 \in \Lambda : U_{\lambda_0} \ni x \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : x \in B_\varepsilon(x) \subseteq U_{\lambda_0}$

Sei $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\operatorname{diam}(Q^{(m)}) < \varepsilon$

$x \in Q^{(m)}$

$\Rightarrow Q^{(m)} \subset B_\varepsilon(x) \subseteq U_{\lambda_0}$ ↯ zu (iii) ∎

Beweis von Satz 7.42

(ii) $\Rightarrow$ (iii) gemäß Satz 7.40
(iii) $\Rightarrow$ (i) " " 7.45 } gilt allg. in metr. R.

(i) $\Rightarrow$ (ii) A beschränkt $\overset{\text{Lemma 7.47}}{\underset{+\text{ Bem.}}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ kpt'er Quader Q mit $A \subseteq Q$

Da A abgeschl. $\overset{\text{Satz 7.46}}{\Longrightarrow}$ A kpt. ∎

Zum Abschluss noch Sätze über stetige Abbildungen auf Kompakten:

7.49. Satz Seien X, Y metr. Räume, $f: X \to Y$ stetig und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist $f(K)$ $(\subseteq Y)$ kompakt.

Beweis: Sei $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ bel. offene Überdeckung von $f(K)$ in Y $\overset{\text{Satz 7.37}}{\Longrightarrow}$ $V_\lambda := f^{-1}(U_\lambda)$ offen in X $\forall \lambda \in \Lambda$

$$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \overset{K \text{ kpt.}}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N}, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda: K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} V_{\lambda_j}$$

$$\Rightarrow f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{j=1}^{N} V_{\lambda_j}\right) = \bigcup_{j=1}^{N} \underbrace{f(V_{\lambda_j})}_{\subseteq U_{\lambda_j}} \Rightarrow \text{Beh.}$$ ∎

7.50 Satz Sei X kpt'er metr. Raum und $f: X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h. $\exists x_+, x_- \in X$:

$$f(x_\pm) = \begin{matrix}\sup \\ \inf\end{matrix} \{ f(x) : x \in X \}.$$

<u>Beweis</u>: Satz 7.49 $\Rightarrow f(X)$ kpt. $\overset{\text{Satz 7.42}}{\Longrightarrow}$ beschränkt (& abgesch.)

Ana 1 $\underset{(f(K)\subseteq\mathbb{R})}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Folge $(y_n)_n \subseteq f(X)$ mit $y_n \xrightarrow{n\to\infty} S := \sup f(X) < \infty$

$f(X)$ abgesch. $\Longrightarrow$ $S \in f(X) \Rightarrow S = f(x_+)$ für ein $x_+ \in X$.

analog für inf und x_- ∎

7.51. Definition Seien (X,d), $(Y,\tilde{d})$ metr. Räume.

$f: X \to Y$ <u>gleichmäßig stetig</u> $:\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta \overset{=\delta_\varepsilon}{>} 0 : \forall x,x' \in X: \\ d(x,x')<\delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x),f(x'))<\varepsilon \end{cases}$

7.52. Satz Seien (X,d), $(Y,\tilde{d})$ metr. Räume, <u>X kompakt</u>. und $f: X\to Y$. Dann gilt:

$$f \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ gleichmäßig stetig}$$

<u>Beweis</u>: Sei $\varepsilon>0$ bel.

f stetig $\Rightarrow \forall x\in X\ \exists \delta_x \overset{=\delta_{\varepsilon,x}}{>} 0\ \forall x' \in X$:

$$d(x,x')<\delta_x \Rightarrow \tilde{d}(f(x),f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Da $X = \bigcup_{x\in X} B_{\frac{\delta_x}{2}}(x) \overset{X \text{ kpt}}{\Longrightarrow} \exists N\in\mathbb{N}\ \exists x_1,\dots,x_N \in X$:

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} B_{\frac{\delta_{x_j}}{2}}(x_j) \quad (**)$$

Definiere: $\delta := \min_{j=1,\dots,N} \frac{\delta_{x_j}}{2} > 0$.

Seien $x,x' \in X$ bel. mit $d(x,x')<\delta$.

$\overset{(**)}{\Longrightarrow} \exists l \in \{1,\dots,N\}: x \in B_{\frac{\delta_{x_l}}{2}}(x_l)$

also $d(x_l,x) < \frac{\delta_{x_l}}{2} < \delta_{x_l}$ und $d(x_l,x') \le \underbrace{d(x_l,x)}_{<\frac{\delta_{x_l}}{2}} + \underbrace{d(x,x')}_{<\delta}$

$< \delta_{x_l}$

$$\Rightarrow \quad \tilde{d}(f(x), f(x')) \leq \underbrace{\tilde{d}(f(x), f(x_\ell))}_{(*) < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\tilde{d}(f(x_\ell), f(x'))}_{(*) < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

setze dort $x' = x_\ell$

setze dort $x = x_\ell$

7.5. Fourier-Reihen

Motivation: Taylor-Reihe $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ist Entwicklung in Monome. Je nach Funktion f könnte Konvergenzgeschwindigkeit der Reihe durch andere Wahl der „Basisfunktionen" als Monome besser sein. Hier: trigonometrische Funktionen.

7.53 Definition | Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $L > 0$

- f periodisch mit Periode L (auch: L-periodisch) $:\Leftrightarrow f(x+L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- f periodisch $:\Leftrightarrow \exists L > 0 :$ f periodisch mit Periode L

7.54 Bemerkung

(a) f periodisch mit Periode $2\pi \Leftrightarrow x \mapsto F(x) := f\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$ ist L-periodisch. O.b.d.A nur $L = 2\pi$ im Folgenden

(b) Für $N \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, N$ sind

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

„trigonometrische Polynome"

2π-periodisch.

7.55. Definition

- $\mathcal{R} := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ 2\pi\text{-periodisch und integrierbar auf } [0, 2\pi] \}$ (Vektorraum!)
- $c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$, $k \in \mathbb{Z}$, (auch $=: \hat{f}(k) =: \hat{f}_k$) Fourier-Koeffizienten von $f \in \mathcal{R}$
- $\mathbb{R} \ni x \longmapsto (\mathcal{F}f)(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ (falls existiert!) Fourier-Reihe von f
- $\mathbb{R} \ni x \longmapsto (\mathcal{F}_N f)(x) := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$ Fourier-Polynom von f.

7.56 Lemma (Reelle Fourier-Polynome)

Sei $f \in \mathcal{R}$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{F}_N f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

mit $a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx$, $b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$

$k = 0, \dots, N$ $\qquad$ $k = 1, \dots, N$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{F}_N f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k (\cos(kx) + i \sin(kx)) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} \left[(c_k + c_{-k}) \cos(kx) + i (c_k - c_{-k}) \sin(kx) \right]$$

- $c_k + c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \underbrace{(e^{ikx} + e^{-ikx})}_{2\cos(kx)} dx$ $\qquad k = 1, \dots, N$
- $i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \underbrace{i(e^{-ikx} - e^{ikx})}_{2\sin(kx)} dx$
- $c_0 = \frac{a_0}{2}$ klar. $\blacksquare$

Was hat $\mathcal{F}f$ mit f zu tun? Zunächst etwas Struktur:

7.57. Lemma (a) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(f,g) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x)\, dx$$

def. positiv semidef., hermitische Sesquilinearform mit zugeh. Halbnorm:

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \langle f, f \rangle^{1/2}$$

ist ein

(b) Die Einschränkung $\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([0,2\pi]) \times C([0,2\pi])}$ Skalarprodukt und $\|\cdot\|_2 \big|_{C([0,2\pi])}$ eine Norm.

(siehe auch Addendum)

Beweis (a) • Integral wohldefiniert, denn $f, g \in \mathcal{R} \overset{\text{Satz 6.10}}{\Longrightarrow} f, g$ beschränkt & Menge der Unstetigkeitsstellen N_f, N_g sind Nullmengen $\Rightarrow \bar{f} g$ beschränkt mit Unstetigkeitsstellen in $N_f \cup N_g$ Nullmenge

$\overset{\text{Satz 6.10}}{\Longrightarrow} \bar{f} \cdot g \in \mathcal{R}$.

• pos. semidef. hermitische Sesquilinearform: klar! $\Rightarrow f \mapsto \langle f, f \rangle^{1/2}$ def. Halbnorm.

(b) z.z. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht ausgeartet, d.h. $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$

Sei $f \in C([0,2\pi])$ und $\exists x_0 \in [0,2\pi]$ mit $f(x_0) \neq 0$.

$\overset{\text{Ana I}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0 \ \forall y \in B_\varepsilon(x_0) : |f(y)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$; o.E. $\varepsilon \leq \pi$

$$\Rightarrow \langle f, f \rangle = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \geq \int_{\max\{0, x_0 - \varepsilon\}}^{\min\{2\pi, x_0 + \varepsilon\}} |f(x)|^2 dx \geq \frac{|f(x_0)|^2}{2} \cdot 2\varepsilon > 0$$

Satz 6.14 (b).

∎

7.58. Bemerkung

Es gilt Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle f,g\rangle| \le \|f\|_2 \|g\|_2$ (Lin. Algebra!)

und sogar Hölder-Ungleichung

$|\langle f,g\rangle| \le \|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; vgl. Aufg 3, üb.blatt 0 (dort für $C(I)$)

7.59. Lemma Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$\mathcal{E}_k : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{ikx} \end{array} \quad \in \mathcal{R}$$

Dann ist $\{\mathcal{E}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$,

d.h. $\langle \mathcal{E}_k, \mathcal{E}_l\rangle = \delta_{kl} \quad \forall k,l \in \mathbb{Z}$

Beweis Aufgabe T2, Tut.blatt 1 + Substitution ∎

7.60 Bemerkung

$$\mathcal{F}_N f = \sum_{k=-N}^{N} \langle \mathcal{E}_k, f\rangle \cdot \mathcal{E}_k \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

r.S. = Entwicklung des Vektors f in Orthonormalsystem $\{\mathcal{E}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Falls dies sogar eine „Basis", sollte wie in linearer Algebra gelten

$$f \overset{!}{=} \mathcal{F}f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \mathcal{E}_k, f\rangle \mathcal{E}_k$$

Frage: Kgz. in welchem Sinn und für welche f?

Vorbereitung für 1. Antwort:

7.61. Definition Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch.

f stückweise C^1 $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \text{ eine Zerlegung } 0 = x_0 < x_1 < \dots x_{N-1} < x_N = 2\pi \\ \text{und } \varphi_j \in C^1([x_{j-1}, x_j]). \ \forall j = 1, \dots, N: \\ f\big|_{]x_{j-1}, x_j[} = \varphi_j\big|_{]x_{j-1}, x_j[} \quad \forall j \end{cases}$

(in Zeichen: $f \in PC^1$)

7.62. Bemerkung. (a) $\forall j = 1, \dots, N$ gilt

- $\varphi_j(x_{j-1}) = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} f(x_{j-1} + \varepsilon)$, $\varphi_j(x_j) = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} f(x_j - \varepsilon)$
- $\varphi_{j,+}'(x_{j-1}) = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} f'(x_{j-1} + \varepsilon)$, $\varphi_{j,-}'(x_j) = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} f'(x_j - \varepsilon)$

rechts-/linksseitige Ableitung, vgl. Def. 5.1.

(b) $\{f \in C^1(\mathbb{R}) : f \ 2\pi\text{-periodisch}\} \subseteq PC^1 \subseteq \mathcal{R}$

(c) $f \in PC^1 \Rightarrow f'$ eindeutig bis auf Sprungstellen und $f' \in \mathcal{R}$

7.63. Definition Sei $f \in PC^1$. Arithmetisch gemittelte Funktion

$$f_{am}: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \longmapsto \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2}\left[f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon)\right] \end{array}$$

7.64. Bemerkung. Mit der Notation aus Def. 7.61:

- $f\big|_{]x_{j-1}, x_j[} = f_{am}\big|_{]x_{j-1}, x_j[} \quad \forall j = 1, \dots, N$
- an möglichen Unstetigkeitsstellen von f mittelt f_{am} rechts- u. linksseitigen Grenzwert.

7.65. Satz

(a) Sei $f \in PC^1$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \to \infty} (\mathcal{F}_N f)(x) = \underline{f_{am}(x)}$$

(b) Sei $f \in C(\mathbb{R}) \cap PC^1$. Dann konvergiert $(\mathcal{F}_N f)_{N \in \mathbb{N}}$ absolut und gleichmässig gegen f für $N \to \infty$.
(Siehe Satz 4.22)

(c) Sei $f \in PC^1$ und $I \subseteq]x_{j-1}, x_j[$ ein abgeschlossenes Intervall, wobei $j \in \{1, \dots, N\}$ und die Notation aus Def. 7.61 gilt. Dann konvergiert $(\mathcal{F}_N f)_{N \in \mathbb{N}}$ <u>gleichmässig</u> auf I gegen f für $N \to \infty$.

7.66. Bemerkung

(a) In 7.65(a) kann i. A. keine glm. Kgz. gelten, da sonst die Limesfkt. stetig wäre.

(b) Dubois-Reymond (1873): $\exists f \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{R}$ und $\exists x \in \mathbb{R}$:
(du Bois-Reymond) $(\mathcal{F}_N f)(x)$ <u>nicht</u> konvergent!

Man <u>muss</u> also Ausnahmepunkte zulassen, wenn man weniger Regularität von f hat.
Dies führt auf Antwort 2 zur Frage in Bem. 7.60:

7.67. Satz Sei $f \in \mathcal{R}$. Dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \mathcal{F}_N f\|_2 = 0 \quad \text{Kgz. im quadratischen Mittel}$$

Insbesondere gilt die Vollständigkeitsrelation (auch: Parseval-Glg.)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle \mathcal{E}_k, f\rangle|^2 = \|f\|_2^2$$

Jargon: $\{\mathcal{E}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{R}$

7.68. Bemerkung: Seien $f, f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ integrierbar, $n \in \mathbb{N}$

(a) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig $\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ im quadr. Mittel

(b) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise $\overset{\text{i.a.}}{\not\Rightarrow}$ " "

(vgl. Übung!)

(c) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ im quadr. Mittel $\Rightarrow$ $\begin{cases} \forall \text{ Teilfolgen } (f_{n_k})_k \\ \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_{k_\ell}})_\ell \text{ und} \\ \exists \text{ Nullmenge } \mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}: \\ f_{n_{k_\ell}}(x) \xrightarrow{\ell\to\infty} f(x) \ \forall x \in [0,2\pi]\setminus\mathcal{N} \end{cases}$

(siehe Ana. III)

7.69. Lemma Sei $f \in \mathcal{R}$. Dann gilt $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\|f - \mathcal{F}_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^{N} |\langle \mathcal{E}_k, f\rangle|^2 = \|f\|_2^2 - \|\mathcal{F}_N f\|_2^2$$

Beweis

- $$\langle f, \mathcal{F}_N f\rangle = \sum_{k=-N}^{N} \underbrace{\langle f, \langle \mathcal{E}_k, f\rangle \mathcal{E}_k\rangle}_{\langle \mathcal{E}_k, f\rangle\langle f, \mathcal{E}_k\rangle} = \sum_{k=-N}^{N} |\langle \mathcal{E}_k, f\rangle|^2$$

- $$\langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f\rangle = \Big\langle \sum_{k=-N}^{N} \langle \mathcal{E}_k, f\rangle \mathcal{E}_k, \sum_{l=-N}^{N} \langle \mathcal{E}_l, f\rangle \mathcal{E}_l \Big\rangle$$

$$= \sum_{k,l=-N}^{N} \overline{\langle \mathcal{E}_k, f\rangle} \langle \mathcal{E}_l, f\rangle \underbrace{\langle \mathcal{E}_k, \mathcal{E}_l\rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=-N}^{N} |\langle \mathcal{E}_k, f\rangle|^2$$

Somit $\|f - \mathcal{F}_N f\|_2^2 = \langle f - \mathcal{F}_N f, f - \mathcal{F}_N f \rangle$

$= \|f\|_2^2 - \langle f, \mathcal{F}_N f \rangle - \langle \mathcal{F}_N f, f \rangle + \langle \mathcal{F}_N f, \mathcal{F}_N f \rangle$

$= \|f\|_2^2 - \|\mathcal{F}_N f\|_2^2$ ∎

7.70. Korollar (Besselsche Ungleichung) Für $f \in \mathcal{R}$ gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \varepsilon_k, f \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 .$$

Beweis: Lemma 7.69: $0 \leq \|f - \mathcal{F}_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|\mathcal{F}_N f\|_2^2 \quad \forall N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{k=-N}^{N} |\langle \varepsilon_k, f \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \quad \forall N \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Beh. mit $N \to \infty$

(Existenz d. Limes, da isotone beschränkte Folge!) ∎

7.71. Bemerkung: (a) Beweis zeigt $\forall N \in \mathbb{N} \ \forall f \in \mathcal{R}$

$$\|\mathcal{F}_N f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

(b) Aus Lemma 7.69 und Kor. 7.70 folgt

$$\lim_{N \to \infty} \|f - \mathcal{F}_N f\|_2 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{In Bessel-Ungleichung gilt} \\ \text{Gleichheit (Parseval-Glg.)} \end{array} \right.$$

7.72. Korollar (Riemannsches Lemma - Verschärfung von Satz 6.23)
↖ dort $f \in C^1$

Sei $f \in \mathcal{R}$. Dann gilt

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} \, dx = 0$$

Beweis. Kor. 7.70 $\Rightarrow \langle \varepsilon_k, f \rangle \xrightarrow{k \to \infty} 0$ ∎

7.73. Lemma Für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\sigma_N(x) := \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \begin{cases} \dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ N+\frac{1}{2}, & x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Es gilt $\sigma_N \in C(\mathbb{R})$, gerade, 2π-period. und

$$\int_0^{\pi} \sigma_N(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis:

- $$\sigma_N(x) = \frac{1}{2} e^{-iNx} \underbrace{\sum_{n=0}^{2N} e^{inx}}_{\substack{x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ (2.24(iv)) \\ \longrightarrow \frac{e^{i(2N+1)}-1}{e^{ix}-1}}} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}$$

- Sei $k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x \to 2\pi k} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} (N+\tfrac{1}{2}) \underbrace{\lim_{x \to 2\pi k} \frac{\cos(N+\frac{1}{2})x}{\cos\frac{x}{2}}}_{=1}$$

- ansonsten Stetigkeit klar, da Nenner $\neq 0$.

- $$\int_0^{\pi} \sigma_N(x)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\int_0^{\pi} e^{inx}\,dx}_{\pi\delta_{n0} + (1-\delta_{n0})\frac{1}{in}(e^{in\pi}-1)} = \frac{\pi}{2}$$

  - Null für n gerade
  - Terme für n und $-n$ heben sich weg

∎

7.74. Lemma Sei $f \in PC^1 \cap C(\mathbb{R})$. Seien c_k', $k \in \mathbb{Z}$, die Fourier-Koeffz. von f'. Dann gilt

$$c_k' = ik\, c_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Mit der Notation von Def. 7.61:

$$c_k' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} \underbrace{\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j'(x) e^{-ikx}\,dx}_{\text{PI}}$$

$$\varphi_j(x) e^{-ikx}\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} + ik\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j(x) e^{-ikx}\,dx$$

f stetig
$\varphi_j(x_j) = \varphi_{j+1}(x_j)$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\underbrace{\varphi_N(2\pi)}_{f(2\pi)} \underbrace{e^{-ik2\pi}}_{1} - \underbrace{\varphi_1(0)}_{f(0)}\Big) + ik\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx}_{c_k}$$

$\underbrace{\text{f stetig u. } 2\pi\text{.-per.}}_{0}$ f 2π-period.

$\blacksquare$

Beweis von Satz 7.65.

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$

- $$(\mathcal{F}_N f)(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}\int_0^{2\pi} f(y) e^{-iky}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\underbrace{\sigma_N(x-y)}_{\sigma_N(y-x)}\,dy$$

$$(t := y-x) \quad = \frac{1}{\pi}\int_{-x}^{2\pi-x} \underbrace{f(t+x)\sigma_N(t)}_{2\pi\text{-period.}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\sigma_N(t)\,dt$$

- $$f_{am}(x) \overset{\text{Lemma 7.73}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{f_+(x)}_{:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x+\varepsilon)} \sigma_N(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \underbrace{f_-(x)}_{:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x-\varepsilon)} \sigma_N(t)\,dt$$

$$\Rightarrow (\mathcal{F}_N f)(x) - f_{am}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)\,\sin[(N+\tfrac{1}{2})t]\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{g_x(t)\,e^{it/2}}_{=:\,\tilde{g}_x(t)}\, e^{iNt}\,dt\Big) \qquad (*)$$

mit

$$g_x(t) := \begin{cases} \dfrac{f(x+t)-f_+(x)}{2\sin(t/2)}, & t \in]0,\pi[+ 2\pi\mathbb{Z} \\ 0, & t \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{f(x+t)-f_-(x)}{2\sin(t/2)}, & t \in]-\pi,0[+ 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Es gilt: (i) g_x beschränkt auf $[-\pi,\pi]$ ($\Rightarrow$ auf $\mathbb{R}$, da $f \in \mathcal{R}$)
(Beweis: Siehe <u>unten</u>!).

(ii) g_x höchstens auf Nullmenge $\mathcal{N} \cup \pi\mathbb{Z}$ unstetig
(da $f \in \mathcal{R} \Rightarrow$ höchstens auf Nullmenge $\mathcal{N}$ unstetig).

$\Rightarrow$ (i) $\wedge$ (ii) gilt auch für $\tilde{g}_x$. Da $\tilde{g}_x$ 2π-period. $\Rightarrow \tilde{g}_x \in \mathcal{R}$

$\Rightarrow$ aus $(*)$ und Kor. 7.72 (Riemann-Lemma): $\lim\limits_{N\to\infty} [(\mathcal{F}_N f)(x) - f_{am}(x)] = 0$ ✓

(b) (i) $\forall\, 0 \neq k \in \mathbb{Z}$: $|c_k| = \frac{1}{|k|}|kc_k| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + k^2|c_k|^2\right)$

Binom-Ungl. für $a,b \in \mathbb{R}$: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

(ii) Besselsche-Ungleichung (Kor. 7.70):

$f \in PC^1 \Rightarrow f' \in \mathcal{R} \Rightarrow \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k'|^2 < \infty$ ← Fourier-Koeffz. von f'

(iii) $f \in C(\mathbb{R}) \cap PC^1$ u. Lem. 7.74

$\Rightarrow c_k' = ikc_k$

also: $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |c_k e^{ikx}| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| \overset{(i)}{\leq} |c_0| + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\Big(\frac{1}{k^2} + \underbrace{k^2|c_k|^2}_{|c_k'|^2}\Big) \overset{(ii)}{<} \infty \quad (iii)$$

$\Rightarrow$ Beh. mit Kgz.kriterium von Weierstraß, Satz 4.22. ✓

Beschränktheit von g_x auf $[-\pi,\pi]$:

Es ist nur Umgebung von $t=0$ zu untersuchen; Rest klar, da f beschränkt ($f \in \mathcal{R}$)

Sei $x \in \mathbb{R}$ bel.

Da $$\frac{f(x+t)-f_\pm(x)}{2\sin t/2} = \frac{f(x+t)-f_\pm(x)}{t} \cdot \underbrace{\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}}_{\xrightarrow{t\to 0} 1}$$

ist nur 1. Faktor für $t \to 0$ zu analysieren.

1. Fall: $t>0$ o.E sei $x \in [0,2\pi[$ (da f 2π-period.)

$f \in PC^1$, mit Notation von Def. 7.61 $\exists j: x \in [x_{j-1},x_j[$

und $f|_{]x_{j-1},x_j[} = \varphi_j|_{]x_{j-1},x_j[}$ wobei $\varphi_j \in C^1([x_{j-1},x_j])$

$\Rightarrow f_+(x) = \varphi_j(x)$, $f(x+t) = \varphi_j(x+t)$ $\forall t>0$ hinreich. klein

$$\Rightarrow \lim_{t\searrow 0} \frac{f(x+t)-f_+(x)}{t} = \varphi_{j,+}'(x) \quad (= \varphi_j'(x) \ \forall x \in]x_{j-1},x_j[)$$

2. Fall: $t<0$: Analog: o.E. sei $x \in]0,2\pi]$

$\exists j: x \in]x_{j-1},x_j]$ und $f|_{]x_{j-1},x_j[} = \varphi_j|_{]x_{j-1},x_j[}$ mit $\varphi_j \in C^1([x_{j-1},x_j])$

$\Rightarrow f_-(x) = \varphi_j(x)$, $f(x+t) = \varphi_j(x+t)$ $\forall t \underline{<} 0$ hinreichend nahe bei 0

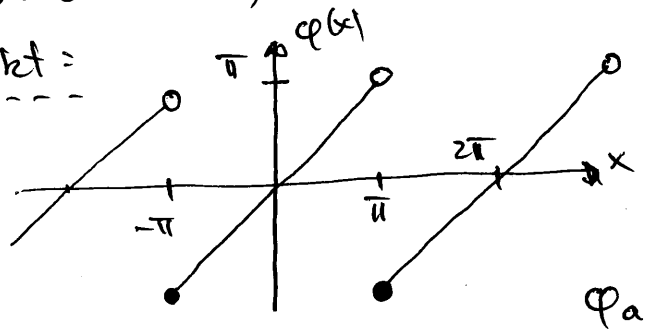
$$\Rightarrow \lim_{t\nearrow 0} \frac{f(x+t)-f_-(x)}{t} = \varphi_{j,-}'(x)$$

$$(= \varphi_j'(x) \ \forall x \in]x_{j-1},x_j[)$$

$\square$

(c) (vom Satz 7.65)

Hilfsfkt:



φ 2π - period.

$\varphi\big|_{[-\pi,\pi[} = id$

$\varphi_{am}(l\pi) = 0$, $l \in \mathbb{Z}$

Es gilt, $\forall x \in \mathbb{R}$:
(Übung!)
$$\varphi_{am}(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

Beh.: $\forall\, 0 < r < \pi$ gilt: $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$ glm. kgt. für $x \in [-r, r]$

(Beweis unten)

$\Rightarrow$ $\forall\, \tau \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\varphi_\tau := 2\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin[k(\cdot - \tau)] \in PC^1$
  (d.h. $\varphi_\tau(x) = \varphi_{am}(x-\tau)$ $\forall x$)
- stetig bis auf $\tau + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$ ungerade, dort Sprung um -2π

Sei $f \in PC^1$ mit Sprungstellen bei $\tau_1, \dots, \tau_m \in [-\pi, \pi[$ und Sprüngen $\Delta_j := f_+(\tau_j) - f_-(\tau_j)$

$$\Rightarrow g := f_{am} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_j}{2\pi}\varphi_{\tau_j, am}(\cdot + \pi)}_{\text{Beh. (oben)}} \in C(\mathbb{R}) \cap PC^1$$

(b) $\downarrow$ Fourier-Reihe kgt. glm.

$\downarrow$ Fourier-Reihe kgt. glm. weg von τ_j's

$\Rightarrow$ Fourier-Reihe von f_{am} kgt. glm. weg von τ_j's. ✓

Beweis der Beh.:

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) \quad \text{für } |x| \le r,\ 0 < r < \pi,\ n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow \forall n, m \in \mathbb{N}$:

$$2\left|S_{n+m}(x)-S_n(x)\right|\cdot\cos\frac{x}{2} = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\underbrace{2\sin(kx)\cos\frac{x}{2}}_{\sin[(k+\frac{1}{2})x]+\sin[(k-\frac{1}{2})x]}\right|$$

$$= \left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\sin[(n+\tfrac{1}{2})x] + \frac{(-1)^{n+m+1}}{n+m}\sin[(n+m+\tfrac{1}{2})x] + \sum_{k=n+1}^{n+m-1}(-1)^{k+1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)}_{\frac{1}{k(k+1)}}\sin[(k+\tfrac{1}{2})x]\right|$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[-r,r]}\left|S_{n+m}(x)-S_n(x)\right| \le \frac{1}{\cos\frac{r}{2}}\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+m}+\sum_{k=n+1}^{n+m-1}\frac{1}{k^2}\right)}_{\underbrace{\frac{1}{n+1}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}}\quad m\to\infty$$

$\blacksquare$

Nun noch Vorbereitungen für Beweis von Satz 7.67.:

7.75. Lemma Sei $f\in\mathcal{R}$ und $\varepsilon>0$.
Dann $\exists g\in C([0,2\pi])\cap PC^1$ mit $\|g\|_\infty\le\|f\|_\infty$
und $\|f-g\|_2<\varepsilon$.

<u>Beweis</u> O.E. sei f reellwertig
[Sonst zerlege in $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$].

Sei $\varepsilon>0$.

1. Akt: Wir konstruieren g mit $\int_0^{2\pi} |f(x)-g(x)|\,dx < \varepsilon$.

Satz 6.7. $\Rightarrow \exists$ Unterteilung $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2\pi$ mit Stützstellen $\xi_j^{\pm} \in [x_{j-1}, x_j]$ def. durch $f(\xi_j^{\pm}) = \max_{\min} f(x)$, $x \in [x_{j-1}, x_j]$ $=: m_j^{\pm}$

so dass

$$0 \le \sum_{j=1}^{n} (m_j^+ - m_j^-)(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon$$

Für $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, n$, sei

$$g(x) := \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} f(x_{j-1}) + \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} f(x_j)$$

d.h. g stückweise linear mit $g(x_j) = f(x_j)$ $\forall j = 0, \dots, n$

$$m_j^- \le f(x) \le m_j^+ \qquad \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$$
$$m_j^- \le g(x) \le m_j^+$$

$\Rightarrow$
- $|f(x) - g(x)| \le m_j^+ - m_j^-$ $\forall x \in [x_{j-1}, x_j]$
- $|m_j^{\pm}| \le \|f\|_\infty$ $\forall j$ $\Rightarrow$ $\|g\|_\infty \le \|f\|_\infty$

und
$$\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\le m_j^+ - m_j^-}\,dx$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} (m_j^+ - m_j^-)(x_j - x_{j-1})$$

$$< \varepsilon.$$

2. Akt

$$\|f-g\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(x)-g(x)|^2}_{\leq |f(x)-g(x)|(\underbrace{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty}_{\leq 2\|f\|_\infty})} dx \overset{1.\text{ Akt}}{\leq} 2\|f\|_\infty \varepsilon$$

$\blacksquare$

Beweis von Satz 7.67.

Sei $f \in R$, $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Sei g wie in Lemma 7.75.

$$\Rightarrow \|f - \mathcal{F}_N f\|_2 \leq \underbrace{\|f-g\|_2}_{<\varepsilon} + \|g - \mathcal{F}_N g\|_2 + \underbrace{\|\underbrace{\mathcal{F}_N g - \mathcal{F}_N f}_{\mathcal{F}_N(g-f)}\|_2}_{\text{Bessel-Ungl. (Bem. 7.71.(a))} \leq \|g-f\|_2}$$

$$< 2\varepsilon + \|g - \mathcal{F}_N g\|_2$$

$$g \in C(\mathbb{R}) \cap PC^1 \overset{\text{Satz 7.65(b)}}{\Rightarrow} \mathcal{F}_N g \xrightarrow{N \to \infty} g \text{ gleichmässig}$$

$$\overset{\text{Bem. 7.68(a)}}{\Rightarrow} \text{ auch im quadr. Mittel}$$

$$\Rightarrow \limsup_{N \to \infty} \|f - \mathcal{F}_N f\|_2 \leq 2\varepsilon;$$

da $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

8. Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

Im folgenden stets $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, offen
versehen mit $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$

Für $j \in \{1, \dots, d\}$ sei $e_j := (\dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathbb{R}^d$
j'te Stelle
Einheitsvektor in j'te Koord. richtung

$f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto f(x) = f((x_1, \dots, x_d)) =: f(x_1, \dots, x_d)$

8.1. Partielle Ableitungen

8.1. Definition Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

- Sei $x \in \mathcal{U}$ und $j \in \{1, \dots, d\}$

  f partiell diff. bar in x in Richtung j $:\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Es existiert} \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h e_j) - f(x)}{h} \\ \in \mathbb{R} \end{array} \right.$ $=: (\partial_j f)(x)$

  alternative Schreibweise: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right)(x)$, $(D_j f)(x)$

- Richtungsableitung von f in Richtung $0 \neq v \in \mathbb{R}^d$ (in x): $(\partial_v f)(x) := \frac{d}{dh} f(x + hv)\Big|_{h=0}$
  (falls existiert!)

- f partiell diff. bar $:\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathcal{U},\ \forall j \in \{1, \dots, d\} \\ (\partial_j f)(x) \text{ existiert} \end{array} \right.$

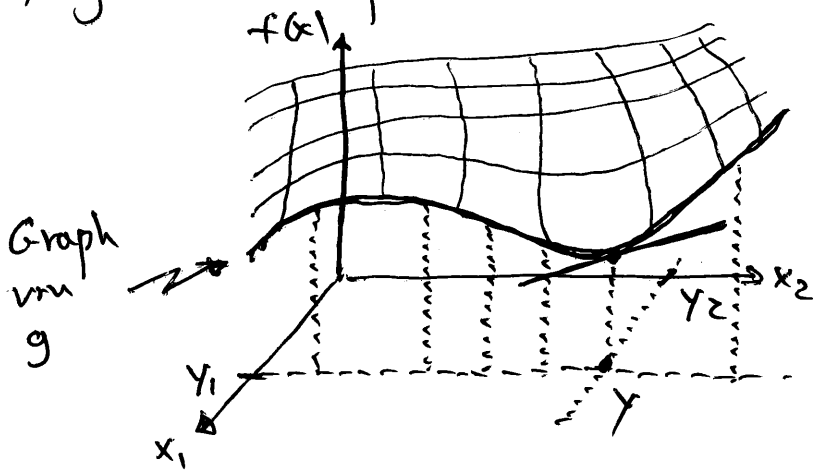
  In dem Fall: $\partial_j f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\partial_j f)(x)$ j'te part. Ableitung

- f stetig partiell diff. bar $:\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ partiell diff. bar} \\ \text{und } \partial_j f \text{ stetig} \\ \forall j = 1, \dots, d \end{array} \right.$

  $(f \in C^1(\mathcal{U}))$

8.2. Bemerkung: (a) Für $v = e_j$: $(\partial_v f)(x) = (\partial_j f)(x)$

(b) geom. Interpretation ($d=2$)



Graph von f
$= \{(x, f(x)) : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^3$
„Gebirge über $\mathbb{R}^2$"
hier: angeschnitten von Ebene $\{(x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = y_1\}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\xi \mapsto f(y_1, \xi) := f((y_1, \xi))$ – somit

$$(\partial_2 f)(y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(y_1, y_2 + h) - f(y_1, y_2)}{h} = g'(y_2)$$

Gilt analog für $d \geq 2$! Somit

- „part. Ableitungen in j-Richtung = gewöhnliche Ableitung bei Festhalten aller anderen Variablen $\neq j$"
- $\Rightarrow$ selbe Rechenregeln für part. Ableitung wie für gew. Ableitung! (z.B. 5.10, 5.12)

8.3. Beispiele

(a) $U = \mathbb{R}^2$, $f: x \mapsto f(x) := x_1 \sin(x_1 + x_2^2)$

$\Rightarrow f$ stetig partiell diff.bar mit

$$(\partial_1 f)(x) = \sin(x_1 + x_2^2) + x_1 \cos(x_1 + x_2^2)$$

$$(\partial_2 f)(x) = 2 x_1 x_2 \cos(x_1 + x_2^2)$$

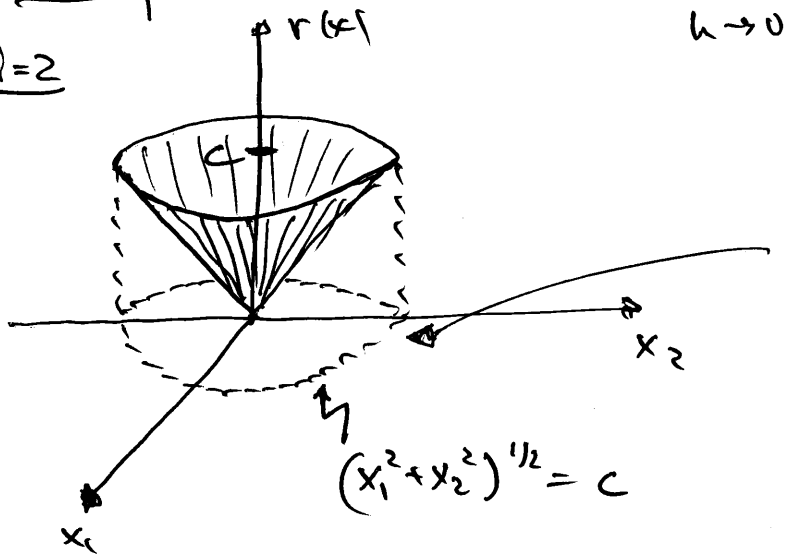
(b) $r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$x \mapsto \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow \boxed{(\partial_k r)(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{1/2}} \cdot 2x_k = \frac{x_k}{r(x)}} \quad \forall k \in \{1,\dots,d\} \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^d$$

nicht partiell diff.-bar in 0: $\lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{r(he_k) - r(0)}{h}}_{\frac{|h| - 0}{h} = \operatorname{sgn}(h)}$ exist. nicht!

d=2



Höhen (Niveau-) linien

$N_c(f) := \{x \in U : f(x) = c\}$

- sind für $f = r$ Kreise!

Nun: Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ (stetig) diff.-bar und setze

$$f \circ r : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (f \circ r)(x) = f(\|x\|) \end{array}$$

radialsymm. Fkt

$\Rightarrow$ $f \circ r$ (stetig) partiell diff. bar mit

$$(\partial_j (f \circ r))(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(\|x\|) = f'(\|x\|) \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = f'(\|x\|) \cdot \frac{x_j}{\|x\|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$$

(c) $U = \mathbb{R}^d$, $x_j : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x_j \end{array}$ (Koordinatenabbildung)

$$\Rightarrow \partial_k x_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

8.4. Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ (Skalarfeld), $A: U \to \mathbb{R}^d$ (Vektorfeld), d.h. für $j = 1, \dots, d$ $\exists A_j : U \to \mathbb{R}$.
Seien f, A partiell diff.bar. (d.h. A_j part. diff.bar $\forall j = 1, \dots, d$).

- Gradient: $\operatorname{grad} f := \nabla f : \begin{array}{l} U \to \mathbb{R}^d \\ x \longmapsto (\partial_1 f(x), \dots, (\partial_d f)(x)) \end{array}$

  symbolischer Vektor: $\nabla := (\partial_1, \dots, \partial_d)$ Nabla-Operator
  ($\nabla \alpha \beta \lambda \alpha$ = Harfe)

  also: grad macht aus Skalarfeld ein Vektorfeld.

- Divergenz: $\operatorname{div} A := \sum_{j=1}^{d} \partial_j A_j =: \langle \nabla, A \rangle$

  also: div macht aus Vektorfeld ein Skalarfeld.

- speziell für $d = 3$: Rotation

$$\operatorname{rot} A := \nabla \times A : \begin{array}{l} U \to \mathbb{R}^3 \\ x \longmapsto \big((\partial_2 A_3)(x) - (\partial_3 A_2)(x), -(\partial_1 A_3)(x) + (\partial_3 A_1)(x), (\partial_1 A_2)(x) - (\partial_2 A_1)(x)\big) \end{array}$$

also: rot macht aus Vektorfeld über $\mathbb{R}^3$ wieder ein solches.

Notation in Anlehnung an Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$:
(benutze Spaltennotation!)

$$\times : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Merkregel:

$$(x \times y)_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

streichen
— "+"
---- "−"

$$(x \times y)_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad (x \times y)_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Damit auch: $x \times y = \det \begin{pmatrix} e_1 & x_1 & y_1 \\ e_2 & x_2 & y_2 \\ e_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$

8.5. Lemma (Rechenregeln)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen; $f, g : U \to \mathbb{R}$ part. diff. bare Skalarfelder

$A : U \to \mathbb{R}^d$ " " Vektorfeld.

Dann gilt:

(a) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$

(b) $\langle \nabla, Af \rangle = (\langle \nabla, A \rangle) f + \langle A, \nabla f \rangle$

Beweis: Übung!

8.6. Beispiele

(a) $U = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $f = \|\cdot\| = r$

$\rightarrow$ Bsp. 8.3(b) $\quad (\nabla r)(x) = \dfrac{x}{r(x)} = \dfrac{x}{\|x\|}$

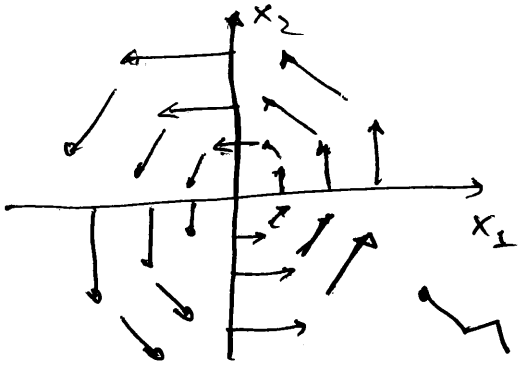
(b) $U = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $A(x) := \dfrac{x}{\|x\|}$

$$\Rightarrow \langle \nabla, A \rangle (x) = \sum_{j=1}^{d} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_j}{r(x)}}_{\frac{1}{r(x)} + x_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(r(x))^{-1}}_{-(r(x))^{-2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} r(x)}_{\frac{x_j}{r(x)}}}}$$

$$= \frac{d}{r(x)} - r(x)^{-3} \underbrace{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}_{(r(x))^2}$$

$$= \frac{d-1}{\|x\|} \qquad \left(= \operatorname{div} \frac{x}{\|x\|} \right)$$

(c) $d=3$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}^3$, $A: x \longmapsto (-x_2, x_1, 0)$



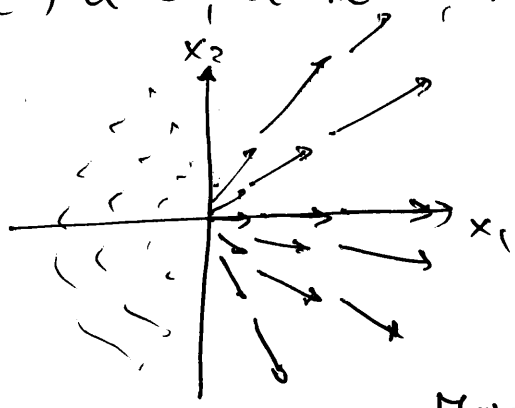
$\Rightarrow$ • $\langle \nabla, A\rangle(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}(-x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 + 0 = 0$

• $(\nabla \times A)(x) = (0,0,2) \quad \forall x$

Schnittbild der $x_3=0$-Ebene

(d) $d=3$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}^3$, $A: x \longmapsto x$ $\Rightarrow$ • $\nabla \times A = 0$

• $\langle \nabla, A\rangle = d$



Schnittbild der $x_3=0$-Ebene

<u>Moral</u>: Rotation $\hat{=}$ Wirbeln

Divergenz $\hat{=}$ Auseinander-/Zusammenlaufen

8.7. Definition (Höhere partielle Ableitungen)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

• f 2mal partiell diff.-bar $:\Leftrightarrow$ f partiell diff.-bar und $\partial_j f$ partiell diff.-bar $\forall j \in \{1,\dots,d\}$

<u>Notation</u>: $\partial_k \partial_j f := \partial_k(\partial_j f)$, $j,k \in \{1,\dots,d\}$.

- Induktive Def. für all. $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ } \underline{n\text{-mal partiell}} \\ \underline{\text{diff.-bar}} \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ } (n-1)\text{-mal partiell diff.-bar und} \\ \partial_{j_{n-1}} \partial_{j_{n-2}} \cdots \partial_{j_1} f \text{ partiell diff.-bar} \\ \quad \forall j_1, j_2, \ldots, j_{n-1} \in \{1, \ldots, d\} \end{array}\right.$$

- $$\left.\begin{array}{c} f \text{ } \underline{n\text{-mal stetig}} \\ \underline{\text{partiell diff.-bar}} \\ (f \in C^n(\mathcal{U})) \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \begin{array}{l} f \text{ } n\text{-mal partiell diff. bar und} \\ \partial_{j_\nu} \cdots \partial_{j_1} f \text{ } \underline{\text{stetig}} \ \forall j_\nu, \ldots, j_1 \in \{1, \ldots, d\} \\ \qquad \forall \nu \in \{0, \ldots, n\} \end{array}$$

- Analog für $A = (A_1, \ldots, A_\nu) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$, falls gültig $\forall A_\ell$, $\ell = 1, \ldots, \nu$

<u>Notationen</u>: $\underbrace{\partial_j \cdot \ldots \cdot \partial_j}_{n\text{-mal}} f =: \partial_j^n f =: \dfrac{\partial^n f}{\partial x_j^n}$

$$\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_n} f =: \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_n}}$$

8.8. Satz (H. A. Schwarz)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $j, k \in \{1, \ldots, d\}$ und $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sei 1-mal partiell diff.-bar; zudem existiere $\partial_k \partial_j f$ auf $\mathcal{U}$ und sei <u>stetig</u>.

Dann existiert auch $\partial_j \partial_k f$ auf $\mathcal{U}$ und es gilt

$$\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f \qquad (\Rightarrow \partial_j \partial_k f \text{ insbes. } \underline{\text{stetig}})$$

<u>Beweis</u>: o.E. • $d = 2$, $j = 1$, $k = 2$ (andere Variablen spielen keine Rolle)

- $0 \in \mathcal{U}$ und wir zeigen

$$(\partial_1 \partial_2 f)(0) = (\partial_2 \partial_1 f)(0)$$

(für bel. $x \in \mathcal{U}$ betrachte $\tilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U} - x$
$:= \{y - x : y \in \mathcal{U}\}$ mit $\tilde{f} := f(\cdot + x)$)

$\mathcal{U}$ offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \delta,\ |x_2| < \delta\} \subseteq \mathcal{U}$

(i) $\forall |x_2| < \delta$ ist $F_{x_2} :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$, $x_1 \mapsto f(x_1, x_2) - f(x_1, 0)$ diff.-bar.

Mittelwertsatz $\Rightarrow$ Kor. 5.19 $\forall x_1 \in \mathbb{R}, |x_1| < \delta, \exists \xi_1 \in \mathbb{R}$ mit $|\xi_1| < |x_1|$:

$$F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0) = \underbrace{F_{x_2}'(\xi_1)}_{(\partial_1 f)(\xi_1, x_2) - (\partial_1 f)(\xi_1, 0)} x_1$$

hängt von x_1 und x_2 ab!

Ebenso: $G_{\xi_1} :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$, $x_2 \mapsto (\partial_1 f)(\xi_1, x_2)$ diff. bar

$\overset{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists \xi_2 \in \mathbb{R}$ mit $|\xi_2| < |x_2|$, so dass

$$F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0) = x_1 x_2 G_{\xi_1}'(\xi_2) = x_1 x_2 (\partial_2 \partial_1 f)(\xi_1, \xi_2)$$

(ii) Sei nun $\varepsilon > 0$ bel.; da $\partial_2 \partial_1 f$ stetig in $(0,0)$ $\Rightarrow$

$\exists \delta_\varepsilon \in]0, \delta]\ \forall |y_1|, |y_2| < \delta_\varepsilon : |(\partial_2 \partial_1 f)(y_1, y_2) - (\partial_2 \partial_1 f)(0,0)| < \varepsilon$

Somit, aus (i), $\forall x_1, x_2 \in]-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon[\setminus \{0\}$:

$$\left| \underbrace{\frac{F_{x_2}(x_1) - F_{x_2}(0)}{x_1 x_2}}_{\frac{1}{x_1}\left(\frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, 0)}{x_2} - \frac{f(0, x_2) - f(0,0)}{x_2} \right)} - \partial_2 \partial_1 f(0,0) \right| < \varepsilon$$

$\overset{x_2 \to 0}{\Rightarrow}$ ($\partial_2 f$ exist.!)

$$\left| \frac{(\partial_2 f)(x_1, 0) - (\partial_2 f)(0,0)}{x_1} - (\partial_2 \partial_1 f)(0,0) \right| \leq \varepsilon$$

Somit: $\partial_2 f$ partiell diff.bar nach x_1 in $(0,0)$
und $(\partial_1\partial_2 f)(0,0) = (\partial_2\partial_1 f)(0,0)$ ∎

8.9. Bemerkung

Die Voraussetzung „$\partial_k\partial_j f$ ist stetig"
ist wesentlich in Satz 8.8 (siehe Bsp. in Übung!)

8.10. Korollar Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ n-mal stetig partiell diff.bar und $\pi \in S_n$ eine Permutation von $\{1,\dots,n\}$
(symmetrische Gruppe)

Dann gilt:
$$\partial_{j_n}\cdots\partial_{j_2}\partial_{j_1} f = \partial_{j_{\pi(n)}}\cdots\partial_{j_{\pi(2)}}\partial_{j_{\pi(1)}} f$$

8.11 Korollar Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen

(a) $A: U \to \mathbb{R}^3$ 2 mal stetig partiell diff.bar
$\Rightarrow$ div rot $A = 0$, d.h. $\langle \nabla, \nabla \times A\rangle = 0$

(b) $f: U \to \mathbb{R}$ 2 mal stetig partiell diff.bar
$\Rightarrow$ rot grad $f = 0$, d.h. $\nabla \times (\nabla f) = 0$

Beweis: Übung!

8.12. Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ 2 mal partiell diff.bar.

- $\Delta f := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2 f = \langle \nabla, \nabla f \rangle$

  $\Delta := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \langle \nabla, \nabla \rangle$ Laplace-Operator

- f harmonisch (auf U) $:\Leftrightarrow \Delta f = 0$

8.13. Beispiel

(a) radialsymm. Fkt. $f \circ r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $r(x) := \|x\|$

$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$

falls f 2 mal diff.bar auf $\mathbb{R}_>$

$\Rightarrow f \circ r$ 2 mal partiell. diff.bar auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und

$$\Delta f(r) = \langle \nabla, \underbrace{\nabla(f \circ r)}_{f'(r)\frac{x}{r}} \rangle \overset{\text{Lem. 8.5(b)}}{=} \frac{f'(r)}{r} \underbrace{\langle \nabla, x \rangle}_{d} + \langle x, \underbrace{\nabla \frac{f'(r)}{r}}_{\left(\frac{d}{dr}\frac{f'(r)}{r}\right)\frac{x}{r}} \rangle$$

Bsp. 8.3(b)

x steht hier für $id : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$$= \frac{f'(r)}{r} d + \frac{r^2}{r} \frac{f''(r) r - f'(r)}{r^2}$$

$$= f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r)$$

(b) $\frac{1}{r^{d-2}}$ ist harmonisch auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ $\forall d \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$

(verwende (a)!)

8.2. Differenzierbarkeit

In Verallg. von Kap. 8.1 betrachten wir gleich Abb. nach $\mathbb{R}^\nu$.

8.14. Definition Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in \mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$

f (total) diff.bar in x $:\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} \exists A \equiv A_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\nu \text{ lineare Abb.} \\ \exists \text{ Umgebung } V \equiv V_x \text{ von } 0 \in \mathbb{R}^d \text{ mit } x + V \subseteq \mathcal{U} \\ \exists \varphi \equiv \varphi_x : V \to \mathbb{R}^\nu \text{ mit } \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\|\varphi(y)\|}{\|y\|} = 0, \\ \text{d.h. } \varphi = o(\|y\|), \text{ so dass } \forall y \in V \\ \quad f(x+y) = f(x) + Ay + \varphi(y) \end{cases}$$

Notation: $A =: (Df)(x) =: J_f(x)$ Differential, Jacobi-Matrix

Interpretation: Linearisiere f um x.

8.15. Bemerkungen

(a) Konsistent mit diff.bar für $d = \nu = 1$
$\Rightarrow Ay = ay$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und $a = f'(x)$

(b) Matrixdarstellung von A in kanon. Basen

$$Ay = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}; \text{ mit } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\nu \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_\nu \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f_j(x+y) = f_j(x) + \sum_{k=1}^{d} a_{jk} y_k + \varphi_j(y) \qquad \forall j = 1, \dots, \nu$$

Demnach: $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$ diff.bar in x

$$\Leftrightarrow \quad f_j : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \text{ diff.bar in } x \quad \forall j = 1, \dots, \nu$$

8.16. Beispiel: $U = \mathbb{R}^d$, $M = (m_{jk})_{jk=1,\dots,d}$ symm. $d \times d$-Matrix mit reellen Einträgen

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle x, Mx \rangle \end{array} \qquad \text{quadratische Form}$$

$$\Rightarrow f(x+y) = \langle x, Mx \rangle + \langle y, Mx \rangle + \langle x, My \rangle + \underbrace{\langle y, My \rangle}_{=:\varphi(y)}$$

$$= f(x) + \underbrace{2\langle Mx, y \rangle}_{=:Ay} + \varphi(y)$$

hier: $A \in (\mathbb{R}^d)^*$ Dualraum

- $A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $y \mapsto 2\langle Mx, y \rangle$ linear
- $\varphi(y) = O(\|y\|^2) \to \varphi(y) = o(\|y\|)$ $(y \to 0)$

da $|\varphi(y)| = \|y\|^2 \cdot \underbrace{|\langle e_y, Me_y \rangle|}$ ← Einheitsvekt. in $\mathbb{R}^d$ in y-Richtung

$$\leq \|Me_y\| \leq \underbrace{\sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^d \\ \|\xi\|=1}} \|M\xi\|}$$

Matrixnorm $\to$ $=: \|M\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)} =: \|M\| < \infty$

(Es gilt: $\|M\|$ = betragsmäßig größter Eigenwert von M (in diesem Fall (M symm.))

$\Rightarrow$ f diff.bar in x $(\forall x \in \mathbb{R}^d)$

8.17 Satz Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in \mathcal{U}$ und $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$

Dann gilt: f diffbar in $x \Rightarrow f$ stetig in x

Warnung: aus partiell diff. bar folgt i.a. nicht Stetigkeit (vgl. Übung!)

Beweis: n.V. $\exists A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\nu$ linear, so dass $\forall x' \in \mathcal{U}$

$$f(x') = f(x) + A(x'-x) + o(\|x'-x\|) \quad \leftarrow \text{Norm in } \mathbb{R}^d$$

Sei $(x_n)_n \subseteq \mathcal{U}$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ $\left(\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \right)$

$$\Rightarrow \|f(x_n) - f(x)\| \le \|A\| \cdot \|x_n - x\| + \|o(\|x_n - x\|)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \blacksquare$$

Norm in $\mathbb{R}^\nu$

Bestimmung von $(Df)(x)$:

8.18. Satz Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\nu \end{pmatrix} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\nu$

Dann gilt:

$$f \text{ diff. bar in } x \Rightarrow \begin{cases} \forall j = 1, \dots, \nu,\ \forall k = 1, \dots, d \text{ ist } f_j \text{ in } x \\ \text{partiell diff.-bar in Richtung } k \\ \text{und} \quad (Df)(x)_{jk} = (\partial_k f_j)(x) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \end{cases}$$

Somit: Matrixdarstellung:

$$(Df)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix} =: \frac{\partial(f_1, \dots, f_\nu)}{\partial(x_1, \dots, x_d)}$$

"Funktionalmatrix"

j'ter Zeilenvektor ist $(\nabla f_j)(x)$

<u>Beweis</u>

n.V. gilt (vgl. Bem. 8.15): $\forall j = 1,..,N$, $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $x+y \in \mathcal{U}$,

$$f_j(x+y) = f_j(x) + \sum_{l=1}^{d} a_{jl} y_l + o(\|y\|) \qquad (y \to 0)$$

wähle $y = he_k$, d.h. $y_l = h\delta_{lk}$ $(h \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow f_j(x+he_k) = f_j(x) + a_{jk}h + o(|h|)$$

$$\overset{h \neq 0}{\Rightarrow} a_{jk} = \frac{f_j(x+he_k) - f_j(x)}{h} + \frac{o(|h|)}{h} \Rightarrow \text{Beh. mit } h \to 0 \quad \blacksquare$$

8.19. Satz Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in \mathcal{U}$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar

Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \partial_k f \text{ stetig in } x \\ \forall k = 1,..,d \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ (total) diff.bar in } x, \\ \text{die Fundamentalmatrix ist} \\ \text{stetig in } x, \text{ und in } x \text{ gleich } Df(x). \end{array}\right.$$

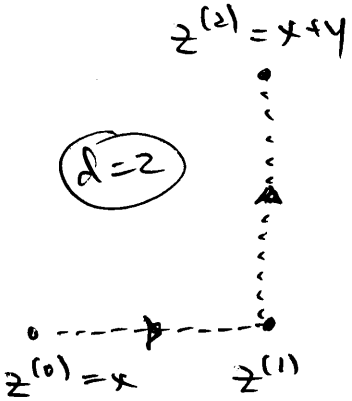
siehe Übung zur Def. für matrixwertige Fkt'en

Dies motiviert

<u>Konvention</u>: stetig diff.bar :$\Leftrightarrow$ stetig partiell diff.bar

(siehe auch Bem. 8.15 (b) für Fall $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^N$)

<u>Beweis</u>: Hier nur „$\Rightarrow$" und nur Diff.barkeit in x.
Rest siehe Üb.



<u>Idee</u>: gehe von x zu $x+y$ parallel zu Koordinatenachsen ($\Rightarrow$ nur 1 Variable ändert sich jeweils!) und schätze Differenz von f mit Mittelwertsatz aus Ana 1 ab.

$\mathcal{U}$ offen $\Rightarrow B_\delta(x) \subseteq \mathcal{U}$ für ein $\delta > 0$

Sei $\underset{(y_1,\dots,y_d)}{\overset{\shortparallel}{y}} \in \mathbb{R}^d$, $\|y\| < \delta \Rightarrow z^{(k)} := x + \sum_{j=1}^{k} y_j e_j \in \mathcal{U}$ $\forall k = 1,\dots,d$

setze $z^{(0)} := x$

- somit $f(x+y) - f(x) = \sum_{k=1}^{d} \underbrace{f(z^{(k)}) - f(z^{(k-1)})}_{\underbrace{g_k(y_k) - g_k(0)}_{\underbrace{g_k'(\xi_k)}_{\frac{\partial f}{\partial x_k}(z^{(k-1)} + \xi_k e_k)} y_k}}$

MWS, Ana 1 für $\xi_k \in \mathbb{R}$, $|\xi_k| < |y_k|$

wobei $g_k :]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(z^{(k-1)} + y e_k)$ diff. bar (n.V.)

$$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + \sum_{k=1}^{d} a_k y_k + \varphi(y)$$

mit $a_k := \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$

$$\varphi(y) := \sum_{k=1}^{d} \left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(z^{(k-1)} + \xi_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right] y_k$$

Da
- $\| z^{(k-1)} + \xi_k e_k - x \| \xrightarrow{\|y\| \to 0} 0$
- $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ <u>stetig</u> in x

$$\Rightarrow \lim_{y \to 0} \frac{|\varphi(y)|}{\|y\|} \le \lim_{y \to 0} \sum_{k=1}^{d} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(z^{(k-1)} + \xi_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right| = 0$$

$\Rightarrow$ Beh. ∎

<u>Insbesondere gilt:</u>

$$\left.\begin{array}{c}\text{stetig (partiell)} \\ \text{diff. bar}\end{array}\right\} \overset{8.19}{\Longrightarrow} \text{(total) diff. bar} \overset{8.17}{\Longrightarrow} \text{stetig.}$$

8.20. Satz (Kettenregel)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^d$, $V \subseteq \mathbb{R}^\nu$ offen, $f: U \to V$, $g: V \to \mathbb{R}^n$.
Sei $x \in U$, f diff.bar in x, g diff.bar in $f(x)$.
Dann ist $g \circ f: U \to \mathbb{R}^n$ diff.bar in x und

$$\underbrace{(D(g\circ f))(x)}_{n\times d\text{-Matrix}} = \underbrace{(Dg)(f(x))}_{n\times \nu \text{ Matrix}} \cdot \overbrace{(Df)(x)}^{\nu \times d}$$

Matrizenmultiplikation = Komposition linearer Abb.

Beweis: Sei $y := f(x) \in \mathbb{R}^\nu$

n.V. gilt:

- $f(x+x') = f(x) + \underbrace{A}_{(Df)(x)} x' + \underbrace{\varphi(x')}_{o(\|x'\|)}$
- $g(y+y') = g(y) + \underbrace{B}_{(Dg)(y)} y' + \underbrace{\psi(y')}_{o(\|y'\|)}$

$\forall$ hinr. kleinen $x' \in \mathbb{R}^d$, $y' \in \mathbb{R}^\nu$.

Wähle $y' := f(x+x') - f(x) = Ax' + \varphi(x')$ $\quad (\xrightarrow{x' \to 0} 0)$

$$\Rightarrow (g\circ f)(x+x') = g(\underbrace{f(x+x')}_{f(x)+y'}) = (g\circ f)(x) + By' + \psi(y')$$
$$= (g\circ f)(x) + BAx' + \chi(x')$$

mit $\chi(x') := B\varphi(x') + \psi(Ax' + \varphi(x'))$

Z-eige: $\chi(x') = o(\|x'\|)$ $\quad (x' \to 0)$

- $$\frac{B\varphi(x')}{\|x'\|} = B \underbrace{\frac{\varphi(x')}{\|x'\|}}_{\xrightarrow{x'\to 0} 0} \xrightarrow{x' \to 0} 0$$

B linear $\qquad$ B stetig

- Setze $\tilde{\varphi}(y) := \begin{cases} \varphi(y)/\|y\| & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$

  somit gilt $\lim\limits_{y \to 0} \tilde{\varphi}(y) = 0$. (*)

$$\Rightarrow \|\varphi(Ax' + \varphi(x'))\| = \underbrace{\|Ax' + \varphi(x')\|}_{\leq \|x'\| \left(\|A\| + \frac{\|\varphi(x')\|}{\|x'\|} \right)} \|\tilde{\varphi}(Ax' + \varphi(x'))\|$$

$$\Rightarrow \lim_{x' \to 0} \frac{\|\varphi(Ax' + \varphi(x'))\|}{\|x'\|} \leq \underbrace{\lim_{x' \to 0} \left(\|A\| + \frac{\|\varphi(x')\|}{\|x'\|} \right)}_{\|A\|} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\lim_{x' \to 0} \|\tilde{\varphi}(\underbrace{Ax' + \varphi(x')}_{\xrightarrow{x' \to 0} 0})\|}_{0} \quad (*) \quad \blacksquare$$

Wichtiges Anwendungsbsp.

8.21 Korollar Sei $d = n = 1$ in Satz 8.20, also

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f_1(x), \dots, f_\nu(x)). \end{array}$$

Dann gilt
$$(g \circ f)'(x) = \sum_{j=1}^{\nu} (\partial_j g)(f_1(x), \dots, f_\nu(x))\, f_j'(x).$$

Beweis. Aus Satz 8.20 und 8.18:

$$(Df)(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_\nu'(x) \end{pmatrix}, \quad (Dg)(y) = \big((\partial_1 g)(y), \dots, (\partial_\nu g)(y)\big) \quad \blacksquare$$

Als Vorbereitung für mehrdim. HDI:

8.22. Lemma Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, betrachte

$$I \to m \times n\text{-Matrizen } (\cong \mathbb{R}^{mn})$$

$$t \mapsto A(t) = \big(a_{jk}(t)\big)_{\substack{1 \le j \le m \\ 1 \le k \le n}} \quad \text{mit } t \mapsto a_{jk}(t) \text{ stetig } \forall j,k$$

Mit $\int_I A(t)\,dt := \left(\int_I a_{jk}(t)\,dt\right)_{j,k}$ gilt:

$$\left\| \int_I A(t)\,dt \right\| \le \int_I \|A(t)\|\,dt \quad (\text{Dreiecks-Ungl.})$$

Beweis:

(i) $$\left\| \int_I A(t)\,dt \right\| = \sup_{0 \ne u \in \mathbb{R}^n} \frac{\overbrace{\left\| \left(\int_I A(t)\,dt\right) u \right\|}^{=:\, v \in \mathbb{R}^m}}{\|u\|} \quad (\text{Def. Matrixnorm})$$

(ii) $$0 \le \|v\|^2 = \Big\langle \underbrace{\left(\int_I A(t)\,dt\right) u}_{\int_I A(t) u\,dt}, v \Big\rangle = \int_I \langle A(t)u, v\rangle\,dt$$

$$\underset{\text{für Integrale}}{\overset{\text{gew. Dreiecks-Ungl.}}{\le}} \int_I \underbrace{|\langle A(t)u, v\rangle|}_{\le \underbrace{\|A(t)u\|}_{\le \|A(t)\| \cdot \|u\|} \cdot \|v\|}\,dt$$

Cauchy-Schwarz $\longrightarrow$

$$\Rightarrow \|v\| \le \|u\| \int_I \|A(t)\|\,dt \Rightarrow \text{Beh. mit (i)} \quad \blacksquare$$

8.23. Satz (Mehr-dim. HDI)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}^\nu$ stetig diff.bar

Sei $y \in \mathbb{R}^d$, so dass $\{x+ty : t \in [0,1]\} \subset U$

Geradenstrecke

Dann gilt

$$f(x+y) - f(x) = \left(\int_0^1 (Df)(x+ty)\, dt \right) y$$

Insbesondere ist

$$\| f(x+y) - f(x) \| \leq \|y\| \sup_{t \in [0,1]} \| (Df)(x+ty) \| .$$

Beweis: 1. Teil: Sei $j \in \{1, \dots, \nu\}$, $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f_j(x+ty)$

$$\Rightarrow f_j(x+y) - f_j(x) = g_j(1) - g_j(0) \overset{\text{HDI}}{=} \int_0^1 \underbrace{g_j'(t)}_{\sum_{k=1}^d (\partial_k f_j)(x+ty) y_k} dt$$

g_j stetig diff.bar nach Kor. 8.21

$$= \sum_{k=1}^d \int_I \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x+ty)}_{((Df)(x+ty))_{jk}} dt \; y_k \qquad (I = [0,1])$$

2. Teil: Aus 1. Teil, $\|My\| \leq \|M\| \cdot \|y\|$

und Lemma 8.22. ∎

8.3. Satz von Taylor

Standardnotationen in mehrdim. Diff.rechnung:

8.24. Definition

- Für $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ (Multiindex) sei
  $|\alpha| := \sum_{j=1}^{d} \alpha_j$, $\alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_d! = \prod_{j=1}^{d} (\alpha_j!)$
- Für $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ sei $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d} = \prod_{j=1}^{d} (x_j^{\alpha_j})$
- Sei $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$, $|\alpha|$-mal stetig diff.bar

$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

(Reihenfolge der Diff. nach Kor. 8.10 egal!)

[falls $\alpha_j = 0$: keine Ableitung in j-Richtung]

Zur Vorbereitung:

8.25 Lemma Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ n-mal stetig diff.bar für ein $n \in \mathbb{N}$. Seien $x \in \mathcal{U}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ so dass $\{x + t\xi : t \in [0,1]\} \subseteq \mathcal{U}$. Dann ist

$$g : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x + t\xi) \end{array}$$

n-mal stetig diff.bar und $\forall k = 0, \dots, n$ gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x + t\xi)\, \xi^\alpha .$$

<u>Beweis</u> (0) $k=0$ klar!

(i) <u>Hilfsbeh.</u>: Für $k=1,\dots,n$ gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{j_1=1}^{d} \cdots \sum_{j_k=1}^{d} (\partial_{j_k} \cdots \partial_{j_1} f)(x+t\xi)\, \xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_k}$$

Bew. der Hilfsbeh. mit Induktion:

- $k=1$ aus Kettenregel (Kor. 8.21): g diff. bar

$$\frac{dg}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{d} (\partial_j f)(x+t\xi)\, \xi_j \qquad \checkmark \text{ stetig in } t.$$

- Ind.schritt $k-1 \to k$ (für $2 \le k \le n$):

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{k-1} g}{dt^{k-1}}\right) \underset{\text{Ind. annahme}}{=} \frac{d}{dt}\left[\sum_{j_1=1}^{d} \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^{d} \overbrace{(\partial_{j_{k-1}} \cdots \partial_{j_1} f)(x+t\xi)}^{\text{diff. bar in } t \text{ u.v.}} \cdot \xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_{k-1}}\right]$$

$$= \sum_{j_1=1}^{d} \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^{d} \xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_{k-1}} \underbrace{\frac{d}{dt}(\underbrace{\partial_{j_{k-1}} \cdots \partial_{j_1} f}_{=:h})(x+t\xi)}_{\sum_{l=1}^{d} (\partial_l h)(x+t\xi)\, \xi_l} \quad \text{Kor. 8.21}$$

insbes. $\frac{d^k g}{dt^k}$ stetig. $\Rightarrow$ Hilfsbeh. $\checkmark$

(ii) Zusammenfassen gleicher Terme in Hilfsbeh.: Zu geg. $(j_1,\dots,j_k)$

sei $\alpha_j := \sum_{k=1}^{k} \delta_{j,j_k}$ für $j=1,\dots,d$ $\left(\Rightarrow \alpha_j \in \{0,1,\dots,k\}\right)$

Anzahl, wie viele der j_k's gleich j sind

- $\overset{\text{Kor. 8.10}}{\underset{\text{(Schwarz)}}{\Longrightarrow}}$ $\partial_{j_k} \cdots \partial_{j_1} f = \partial^\alpha f$ mit $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d)$

- $\xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_k} = \xi^\alpha$

- Anzahl der Tupel $(j_1,\dots,j_k) \in \{1,\dots,d\}^k$, für die gilt: $\sum_{k=1}^{k} \delta_{j,j_k} = \alpha_j \quad \forall j = 1,\dots,d$, ist

$$\frac{k!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_d!}, \text{ da } \underbrace{\underbrace{\overset{1}{\sqcup}\overset{1}{\sqcup}\ldots\overset{1}{\sqcup}}_{\alpha_1}\Big|\underbrace{\overset{2}{\sqcup}\ldots\overset{2}{\sqcup}}_{\alpha_2}\Big|\ \ldots\ \Big|\underbrace{\overset{d}{\sqcup}\ldots\overset{d}{\sqcup}}_{\alpha_d}}_{k \text{ Plätze}}$$

dabei ist per Konstruktion $|\alpha| = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j = k \Rightarrow$ Beh. ∎

8.26. Satz (Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ und $\{x + t\xi : t \in [0,1]\} \subseteq U$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und f $(n+1)$-mal stetig diff.bar. Dann $\exists\, \Theta = \Theta_{x,\xi} \in [0,1]$, so dass

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le n} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{(\partial^\alpha f)(x + \Theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

kurz für: $\{\alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| \le n\}$

Beweis: Idee: Führe auf 1-dim. Satz von Taylor (Satz 6.42) zurück

Setze dazu

$$g : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x + t\xi) \end{array}$$

Kettenregel $\Rightarrow$ $(n+1)$-mal stetig diff.bar

und, nach Satz 6.42,

$$\exists\, \theta \in [0,1]: g(1) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{g^{(k)}(0)}{k!}}_{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(x)\xi^\alpha} 1^k + \underbrace{\frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}}_{\sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(x+\theta\xi)\cdot \xi^\alpha} \cdot 1^{n+1}$$

Lemma 8.25

$\blacksquare$

8.27. Korollar Unter den Vor. von Satz 8.26 gilt, für $\xi \to 0$:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le n+1} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + o(\|\xi\|^{n+1})$$

8.28. Bemerkung: Dies ist für $d=1$ eine Variante von Kor. 6.44 (dort nur $O(\xi^{n+1})$, aber auch nur $\sum_{\alpha=0}^{n}$ ←)

Beweis von Kor. 8.27.

$x \in \mathcal{U}$ offen $\Rightarrow \exists \delta > 0: x + t\xi \in \mathcal{U}\ \forall t \in [0,1]\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \|\xi\| < \delta$

$$\overset{\text{Satz 8.26}}{\Longrightarrow} \quad f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le n+1} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \underbrace{\left[(\partial^\alpha f)(x+\theta\xi) - (\partial^\alpha f)(x)\right]}_{=: r_{x,\alpha}(\xi)}$$

(i) da $\theta = \theta_{x,\xi} \in [0,1]$ und $\partial^\alpha f$ stetig

$$\Rightarrow \lim_{\xi \to 0} r_{x,\alpha}(\xi) = 0 \quad \text{für alle } \alpha,\ |\alpha| = n+1$$

(ii) $$|\xi^\alpha| = \underbrace{|\xi_1|}_{\le \|\xi\|}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{|\xi_d|}_{\le \|\xi\|}^{\alpha_d} \le \|\xi\|^{|\alpha|}$$

$$(i) \wedge (ii) \overset{|\alpha|=n+1}{\Longrightarrow} \forall \xi \in B_\delta(0)\setminus\{0\}:$$

$$\frac{|r_{x,\alpha}(\xi)|\,|\xi^\alpha|}{\|\xi\|^{n+1}} \le |r_{x,\alpha}(\xi)| \xrightarrow{\xi\to 0} 0$$

Da $\sum_{|\alpha|=n+1}$ nur endliche Summe $\Rightarrow$ Beh. ∎

8.29. Beispiel: $U = \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = x_1 \sin(x_2)$
(bel. oft stetig diff.bar)

Entwicklungspkt. $x=(0,0) \Rightarrow$ mit ($\xi = x$, $n=1$ in Kor 8.27)

$$f(x_1,x_2) = \underbrace{f(0,0)}_{0} + \underbrace{\frac{(\partial_1 f)(0,0)}{1!\,0!}}_{0} x_1 + \underbrace{\frac{(\partial_2 f)(0,0)}{0!\,1!}}_{0} x_2$$

$$+ \underbrace{\frac{(\partial_1^2 f)(0,0)}{2!\,0!}}_{0} x_1^2 + \underbrace{\frac{(\partial_1\partial_2 f)(0,0)}{1!\,1!}}_{1} x_1x_2 + \underbrace{\frac{(\partial_2^2 f)(0,0)}{0!\,2!}}_{0} x_2^2 + o(\|x\|^2)$$

$$= x_1x_2 + o(\|x\|^2) \qquad (x \to 0).$$

8.30. Bemerkung

Struktur der Taylor-Polynome für $|\alpha| \le 2$: $P_n(\xi) := \sum_{|\alpha|=n} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} \xi^\alpha$

- $n=0$: $\alpha = (0,\dots,0) \in \mathbb{N}_0^d$ einziger Multiindex mit $|\alpha|=0$

$$P_0(\xi) = f(x)$$

- $n=1$: d Multiindizes mit $|\alpha|=1$: $\underbrace{(1,0,\dots,0)}_{\mu_1}, \dots, \underbrace{(0,\dots,0,1)}_{\mu_d}$

$$\Rightarrow P_1(\xi) = \sum_{j=1}^d \underbrace{\frac{1}{\mu_j!}}_{1} \underbrace{(\partial^{\mu_j} f)(x)}_{(\partial_j f)(x)} \underbrace{\xi^{\mu_j}}_{\xi_j} = \langle (\nabla f)(x), \xi \rangle$$

Somit Kor. 8.27 mit $n=0$: f stetig diff.-bar $\Rightarrow$

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle (\nabla f)(x), \xi \rangle + o(\|\xi\|^1)$$

- vgl. Def. f diff. bar in x
- da hier sogar f <u>stetig</u> diff.bar, zusätzliche Info über Fehlerterme, siehe Bew. von Kor. 8.27.

• $n=2$: Multiindizes mit $|\alpha|=2$:

- $(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ i.\text{ Stelle}}}{1},0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ j.\text{ Stelle}}}{1},0,\dots,0) =: \mu_{ij}$ für $1 \le i < j \le d$
- $(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ j.\text{ Stelle}}}{2},0,\dots,0) =: \lambda_j$ für $1 \le j \le d$

$\Rightarrow \mu_{ij}! = 1!1! = 1$, $\lambda_j! = 2! = 2$

$\xi^{\mu_{ij}} = \xi_i \xi_j$, $\xi^{\lambda_j} = \xi_j^2$

$\partial^{\mu_{ij}} = \partial_i \partial_j$, $\partial^{\lambda_j} = \partial_j^2$

also: $$P_2(\xi) = \sum_{1 \le i < j \le d} (\partial_i \partial_j f)(x) \xi_i \xi_j + \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{2} (\partial_j^2 f)(x) \xi_j^2$$

Schwarz! $\rightarrow$ $$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \xi_i (\partial_i \partial_j f)(x) \xi_j$$

quadratische Form in $\xi \in \mathbb{R}^d$

8.31. Definition $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$, $f: U \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig diff. bar in x.

$$\left((\partial_j \partial_k f)(x) \right)_{1 \le j,k \le d} =: (D^2 f)(x)$$

$d \times d$-Matrix der 2. part. Ableitungen in x

(<u>symm.</u> wegen Schwarz!)

<u>Hesse-Matrix von f in x</u>

<u>8.32. Bemerkung</u>: Kor. 8.27. für $n=1$:

f 2-mal stetig diff. bar $\Rightarrow$

$$f(x+\xi) = f(x) + \underbrace{\langle (\nabla f)(x), \xi \rangle}_{(Df)(x)\xi} + \frac{1}{2}\langle \xi, (D^2 f)(x)\xi \rangle + o(\|\xi\|^2) \quad \text{für } \xi \to 0$$

8.4. Lokale Extrema

8.33. Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$

- $x \in U$ lokales Maximum (bzw. Minimum)

  $:\Leftrightarrow \exists$ Umgebung $V \subseteq U$ von x mit $f(y) \leq f(x) \quad \forall y \in V$
  (bzw. $f(y) \geq f(x)$)

  falls V so wählbar, dass "=" nur für $x = y$: striktes lok. Max (bzw. Min)

- lokales Extremum: lokales Max oder Min.

8.34. Satz (Notwendige Bed. für lokale Extrema)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ partiell diff.-bar. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{c} x \in U \text{ ist lokales Extremum} \\ \text{von } f \end{array}\right\} \Rightarrow (\nabla f)(x) = 0$$

(x kritischer/stationäre Pkt. von f)

Beweis: $x \in U$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall j = 1, \dots, d: x + te_j \in U$
$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

Setze $g_j: \begin{array}{l}]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x + te_j) \end{array}$; n.V. gilt $\forall j = 1, \dots, d$:

- g_j diff.-bar
- g_j hat lok. Extremum bei $t = 0$

$$\underset{\text{(Satz 5.16)}}{\overset{\text{Ana 1}}{\Rightarrow}} \quad 0 = g_j'(0) = (\partial_j f)(x) \qquad \blacksquare$$

Exkurs über symmetrische $d \times d$-Matrizen M:

8.35. Definition Sei $M \in \mathrm{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ symm.

- M (strikt) positiv (definit) $:\Leftrightarrow \langle x, Mx \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$
  ($M > 0$)
- M positiv (semidefinit) $:\Leftrightarrow \langle x, Mx \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
  ($M \geq 0$) (auch: nicht-negativ)
- M (strikt) negativ (semidefinit) $:\Leftrightarrow -M$ (strikt) positiv (semidefinit)
  ($M < 0$) ($M \leq 0$)
- M indefinit $:\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $\langle x, Mx \rangle > 0$, $\langle y, My \rangle < 0$

Lin. Algebra: symm. Matrizen orthogonal diagonalisierbar,
d.h. $\exists$ Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{R}^d$ ← Eigenvektoren
$(\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk})$

$\exists \mu_1, \dots, \mu_d \in \mathbb{R}$: $M v_j = \mu_j v_j \quad \forall j = 1, \dots, d$
Eigenwerte.

8.36 Satz (Numerischer Wertebereich von M)

Sei $M \in \mathrm{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ symmetrisch mit Eigenwerten $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_d$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}^d$:

$$\mu_1 \|x\|^2 \leq \langle x, Mx \rangle \leq \mu_d \|x\|^2$$

Links gilt Gleichheit für $x = v_1$,
rechts für $x = v_d$.

Beweis: Entwicklung von $x \in \mathbb{R}^d$ in ONB aus Eigenvekt.

$$x = \sum_{j=1}^{d} \xi_j v_j \qquad \text{mit } \xi_j := \langle v_j, x \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle x, Mx \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{d} \xi_j v_j, M\Big(\sum_{k=1}^{d} \xi_k v_k\Big) \Big\rangle$$

$$= \sum_{j,k=1}^{d} \xi_j \xi_k \underbrace{\langle v_j, \underbrace{M v_k}_{\mu_k v_k} \rangle}_{\mu_k \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{\delta_{jk}}} = \sum_{j=1}^{d} \mu_j |\xi_j|^2$$

$$\begin{cases} \leq \mu_d \sum_{j=1}^{d} |\xi_j|^2 \\ \geq \mu_1 \sum_{j=1}^{d} |\xi_j|^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Beh. mit $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{d} \xi_j v_j, \sum_{k=1}^{d} \xi_k v_k \Big\rangle = \sum_{j,k=1}^{d} \xi_j \xi_k \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{\delta_{jk}}$

$$= \sum_{j=1}^{d} |\xi_j|^2 \qquad \blacksquare$$

8.37 Korollar Sei $M \in \mathrm{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ symmetrisch.

- M strikt positiv $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von M sind > 0
- M nicht-negativ $\Leftrightarrow$ " " " " " ≥ 0
- M indefinit $\Leftrightarrow$ $\exists$ Eigenwerte $\mu < 0$ und $\tilde{\mu} > 0$

Oft nützlich: Hurwitz-Kriterium (vgl. Lin. Alg.; hier kein Bew.)

M strikt positiv $\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren von M sind > 0

$$M_n := \det (m_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$$

für $n = 1, \dots, d$.

Exkurs Ende

8.38. Satz (Hinreichende Bed. für lokale Extrema)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig diff.-bar.

Dann gilt:

(a) $\left.\begin{array}{l}(\nabla f)(x) = 0 \text{ und} \\ (D^2 f)(x) \text{ strikt positiv}\end{array}\right\} \Rightarrow$ striktes lok. Minimum bei x

(b) $\left.\begin{array}{l}(\nabla f)(x) = 0 \text{ und} \\ (D^2 f)(x) \text{ strikt negativ}\end{array}\right\} \Rightarrow$ striktes lok. Maximum bei x

<u>Warnung</u>: Falls $(D^2 f)(x)$ nur pos./neg. <u>semi</u>definit, ist ohne Zusatzinfo keine Aussage möglich; vgl. Bsp. 8.39 (b), oder $\underline{\underline{\mathbb{R}}} \ni x \mapsto ax^4$, $a \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis</u>: f 2-mal stetig diff.-bar $\overset{\text{Bem. 8.32}}{\Longrightarrow}$ (da $(\nabla f)(x) = 0$)

$$f(x+\xi) = f(x) + \frac{1}{2}\langle \xi, \underbrace{(D^2 f)(x)}_{\text{sym. Hesse-Matrix}} \xi \rangle + \varphi(\xi) \quad \forall \xi \text{ in Umgeb. von } 0.$$

(a) [(b) analog!]

- Kor. 8.37 $\Rightarrow$ kleinster Eigenwert μ von $(D^2 f)(x)$ erfüllt $\mu > 0$
- Bem. 8.32: $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|^2)$, also $\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} \xrightarrow{\xi \to 0} 0$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \left|\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2}\right| < \frac{\mu}{4} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \text{ mit } \|\xi\| < \delta$$

$$\Rightarrow f(x+\xi) - f(x) \overset{\text{Satz 8.36}}{\geq} \frac{1}{2}\mu \|\xi\|^2 + \underbrace{\varphi(\xi)}_{\geq -\frac{\mu}{4}\|\xi\|^2}$$

$$\geq \frac{\mu}{4}\|\xi\|^2 > 0 \quad \forall \xi \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$$

$\blacksquare$

8.39. Beispiele

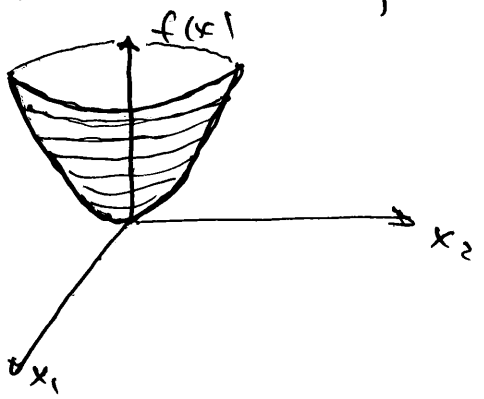
(a) $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$, $f(x) := x_1^2 + x_2^2$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ • $(\nabla f)(x) = 2(x_1, x_2)$; $\Rightarrow (\nabla f)(x) = 0 \iff x = 0$

• Hesse-Matrix $(D^2 f)(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^2)$ strikt positiv.

$\Rightarrow$ $x = 0$ striktes <u>lok.</u> Min.

(hier sogar: striktes <u>globales</u> Min.)



(b) $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$; $f(x) := a x_1^4 + x_2^2$, $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ • $(\nabla f)(x) = (4a x_1^3, 2x_2)$

$\Rightarrow (\nabla f)(x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 & \text{für } a \neq 0 \\ x = (c, 0),\ c \in \mathbb{R}, & \text{für } a = 0 \end{cases}$

• $(D^2 f)(x) = \begin{pmatrix} 12 a x_1^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (D^2 f)(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $(\forall a)$

nicht-negativ

aber: $a > 0 \Rightarrow x = 0$ striktes lok. Min

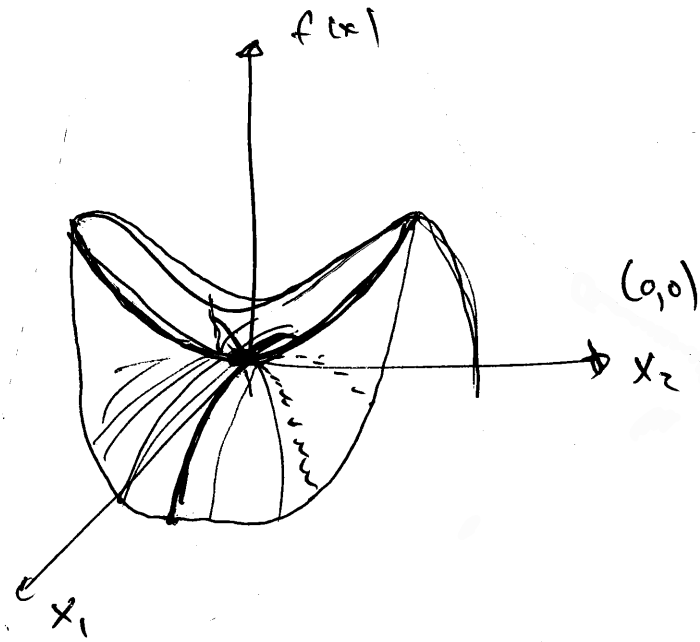
$a = 0 \Rightarrow x = (c, 0)$ lok. Min $(\forall c)$

$a < 0 \Rightarrow x = 0$ kein lok. Extremum:

<u>$a < 0$:</u>

• $f(x_1, 0) = a x_1^4 < 0 = f(0,0)$ $\forall x_1 \neq 0$

• $f(0, x_2) = x_2^2 > 0 = f(0,0)$ $\forall x_2 \neq 0$



$(0,0)$ <u>Sattelpunkt</u>

(siehe nächste Def.)

8.40. Definition $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ part. diff. bar.

$x \in \mathcal{U}$ Sattelpunkt von f $:\Leftrightarrow \begin{cases} (\nabla f)(x) = 0, \text{ und } x \text{ ist } \underline{\text{kein}} \\ \text{lok. Extremum von } f \end{cases}$

8.41. Beispiel: $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$, $f(x) = -x_1^2 + x_2^2$

$\Rightarrow$ • $(\nabla f)(x) = (-2x_1, 2x_2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• $(D^2 f)(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $(\forall x)$ indefinit

Es gilt: $f(x_1, 0) < 0 \quad \forall 0 \neq x_1$
$f(0, x_2) > 0 \quad \forall 0 \neq x_2$
$\Rightarrow (0,0)$ Sattelpunkt.

Dies motiviert

8.42. Satz $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x \in \mathcal{U}$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig diff.-bar. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} (\nabla f)(x) = 0 \text{ und} \\ (D^2 f)(x) \text{ indefinit} \end{array}\right\} \Rightarrow x \text{ ist Sattelpunkt von } f$$

Beweis: Übung; ähnlich zu Satz 8.38.

9. Implizit definierte Funktionen

Ziel: Sei $(x,y) \mapsto F(x,y) \in \mathbb{R}$ „hinreichend glatte" Fkt. mit

Nullstellenmenge $N := \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$

Frage: $\exists$ glatte Fkt. $x \mapsto g(x)$, so dass $(x, g(x)) \in N$,
d.h. durch Auflösen von $F(x,y) = 0$ nach y?

Zur Vorbereitung:

9.1. Banachscher Fixpunktsatz

9.1. Definition (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f: X \to Y$

- f Lipschitz-stetig $:\Leftrightarrow$ $\exists L \in]0,\infty[: \forall x, x' \in X$:
$$d_Y(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_X(x, x')$$
$\uparrow$ Lipschitz-Konstante

[klar: Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ stetig]

- f Kontraktion $:\Leftrightarrow$ f Lipschitz-stetig mit $L \in]0,1[$

9.2. Banachscher Fixpunktsatz

Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum und $f: X \to X$ eine Kontraktion. Dann gilt:

(a) $\exists! \, \xi \in X$ mit $f(\xi) = \xi$; d.h. f hat genau einen Fixpkt.

(b) Sei $x_0 \in X$ bel., und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq X$ def. durch
$$x_{n+1} := f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$
Dann gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \xi$.

9.3. Bemerkung

- mächtiges, vielseitiges Werkzeug; insbes. auch, da konstruktiv (wegen (b)).
- Fundament der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (Picard-Lindelöf).
- Typische Anwendung: sichert Existenz der Lösung einer Gleichung, wenn diese als Fixpunkt interpretierbar.

Beweis von Satz 9.2.

(i) Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (b) konvergiert.

Sei $x_0 \in X$ bel.

Beh.: $d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

per Induktion:
- $n=0$ klar
- $n-1 \to n$: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $d(x_n, x_{n-1}) \leq L^{n-1} d(x_1, x_0)$ (*)

$$\Rightarrow \quad d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \underset{f \text{ Lipschitz}}{\leq} L\, d(x_n, x_{n-1}) \overset{(*)}{\leq} L^n d(x_1, x_0).$$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}$:

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \sum_{\mu=0}^{m-1} \underbrace{d(x_{n+\mu+1}, x_{n+\mu})}_{\leq L^{n+\mu} d(x_1, x_0) \text{ Beh (oben)}}$$

$$\leq L^n d(x_1, x_0) \underbrace{\sum_{\mu=0}^{m-1} L^\mu}_{\leq \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0} L^\mu} \underset{L<1 \;!}{\leq} \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0) \quad (*)$$

Wiederum, da $L < 1 \Rightarrow (x_n)_n$ ist <u>Cauchy</u>.

$\underset{\Rightarrow}{\overset{X \text{ vollst.}}{}}$ $\xi := \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert.

(ii) <u>ξ ist Fixpunkt</u>

$$f(\xi) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{x_{n+1}} = \xi \quad \checkmark$$

(iii) <u>Eindeutigkeit</u>.

Seien $\xi_1, \xi_2 \in X$ Fixpunkte von f

$$\Rightarrow \quad d(\xi_1, \xi_2) = d(f(\xi_1), f(\xi_2)) \leq L\, d(\xi_1, \xi_2)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{d(\xi_1, \xi_2)}_{\geq 0} \underbrace{(1-L)}_{>0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad d(\xi_1, \xi_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_1 = \xi_2 \quad \blacksquare$$

Es folgt, aus (*) mit $m \to \infty$:

$\forall x_0 \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$d(\xi, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d(f(x_0), x_0) \quad (\underline{\text{Fehlerabschätzung}})$$

9.2. Satz über implizite Funktionen

9.4. Satz (über implizite Fkt.'en)

Seien $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathbb{R}^\nu$ offen und sei

- $F: \begin{array}{l} \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^\nu \\ (x,y) \longmapsto F(x,y) \end{array}$ stetig diff.-bar
- $(a,b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ mit $F(a,b) = 0$
- Für $D_{(y)}F := \dfrac{\partial(F_1,\dots,F_\nu)}{\partial(y_1,\dots,y_\nu)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_\nu} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_\nu}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_\nu}{\partial y_\nu} \end{pmatrix}$

gelte: $(D_{(y)}F)(a,b)$ sei invertierbar.

Dann $\exists$ Umgebungen $V_1 \subseteq \mathcal{U}_1$ von a, $V_2 \subseteq \mathcal{U}_2$ von b und $\exists\, g: V_1 \to V_2$ stetig diff.-bar mit

(i) $g(a) = b$

(ii) $F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in V_1$

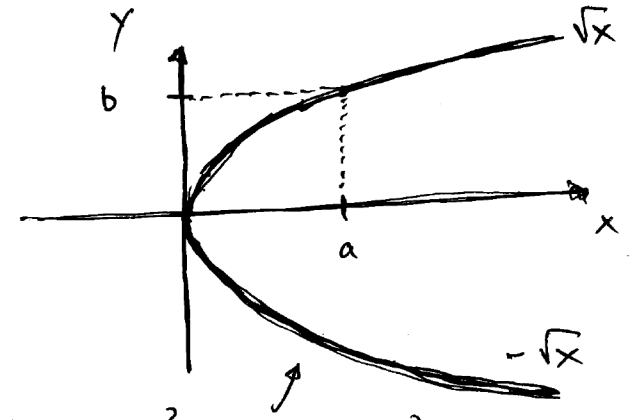
(iii) ist $(x,y) \in V_1 \times V_2$ mit $F(x,y) = 0 \Rightarrow y = g(x)$

(iv) $(D_{(y)}F)(x, g(x))$ ist invertierbar $\forall x \in V_1$

und

$$\underbrace{(Dg)(x)}_{\nu \times d\text{-Matrix}} = -\underbrace{\left[(D_{(y)}F)(x,g(x))\right]^{-1}}_{\nu \times \nu\text{-Matrix}} \underbrace{(D_{(x)}F)(x,g(x))}_{\nu \times d\text{-Matrix}}$$

9.5. Beispiel: $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \mathbb{R}$ $\quad F(x,y) = x - y^2 \in \mathbb{R}$



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}$

- $b \underset{(<)}{>} 0 \Rightarrow g(x) = \overset{+}{\underset{(-)}{}}\sqrt{x}$
- Voraussetzung $(D_{(y)}F)(a,b)$ invertierbar wesentlich, da für $(a,b) = (0,0)$ gilt: $D_{(y)}F(0,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$ und $\nexists$ Umgebung V_1 von 0 und $g : V_1 \to \mathbb{R}$ diff.bar mit $F(x, g(x)) = 0$.

- Verkleinerung von $\mathcal{U}_1$ zu V_1 im Satz wesentlich; hier: $V_1 \cap]-\infty, 0] = \emptyset$
- Verkleinerung von $\mathcal{U}_2$ zu V_2 wesentlich für (iii) in Satz 9.4.: für $0 < a \in V_1$ und $b = \overset{+}{\underset{(-)}{}}\sqrt{a}$ muss gelten

$$V_2 \cap \{\overset{-}{\underset{(+)}{}}\sqrt{x} : x \in V_1\} = \emptyset.$$

Beweis von Satz 9.4. o.E. $(a,b) = (0,0)$ [sonst verschieb F]

1. Akt.: Formulierung von $F(x,y) = 0$ als Fixpkt.problem

Setz $Y := (D_{(y)}F)(0,0) \overset{\text{u.v.}}{\in} GL(\nu, \mathbb{R})$

$$G : \begin{array}{l} U_1 \times U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^\nu \\ (x,y) \longmapsto G(x,y) := y - Y^{-1}F(x,y) \end{array}$$

somit G stetig diff.bar mit

$$(D_{(y)}G)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_\nu} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial G_\nu}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_\nu}{\partial y_\nu} \end{pmatrix}(x,y) = \mathbb{I} - Y^{-1}(D_{(y)}F)(x,y)$$

und $F(x,y) = 0 \iff G(x,y) = y$ (0)

Weiterhin: (1) $G(0,0) = 0$

(2) $(D_{(y)}G)(0,0) = 0$

(3) $\exists\, W_1 \subseteq \mathcal{U}_1$, Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^d$,
$\exists\, W_2 \subseteq \mathcal{U}_2$, " " " " $\mathbb{R}^\nu$, so dass

$$\|(D_{(y)}G)(x,y)\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in W_1 \times W_2$$

(denn: $\frac{\partial G_j}{\partial y_k}$ stetig in (x,y), und (2))

(4) $\exists\, r > 0$ mit $V_2 := \{ y \in \mathbb{R}^\nu : \|y\| \leq r \} \subseteq W_2$

abgeschlossen!

und, wegen (1) und G stetig,
$\exists\, V_1 \subseteq W_1$, Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^d$:

$$\sup_{x \in V_1} \|G(x,0)\| \leq \frac{r}{2}$$

(5) Sei $x \in V_1$ bel., fest. $\Rightarrow \forall y, y' \in V_2$ gilt

$$\|\underbrace{G(x,y) - G(x,y')}_{\int_0^1 (D_{(y)}G)(x,\, y' + t(y-y'))\,dt\,(y-y')}\| \overset{(3)}{\leq} \frac{1}{2}\|y - y'\|$$

HDI, Satz 8.23

(6) Sei $x \in V_1$ bel., fest $\Rightarrow \forall y \in V_2$

$$\|G(x,y)\| \leq \underbrace{\|G(x,y) - G(x,0)\|}_{\leq \frac{r}{2}} + \underbrace{\|G(x,0)\|}_{\leq \frac{r}{2}} \leq r$$

(5) (4)

aus (5) & (6): $\forall x \in V_1$ ist $G(x,\cdot) : \begin{array}{l} V_2 \to V_2 \\ y \mapsto G(x,y) \end{array}$

eine Kontraktion auf dem <u>vollst.</u> (!) metr. Raum V_2 (vgl. Üb.)

$\Rightarrow$ Banachscher Fixpkt.satz: $\exists!$ Fixpunkt $g(x) \in V_2$ von $G(x,\cdot)$, d.h. $G(x,g(x)) = g(x) \overset{(0)}{\Longleftrightarrow} F(x,g(x)) = 0$
$\Rightarrow$ Beh. (ii)

- da Fixpunkt $g(x) \in V_2$ eindeutig $\Rightarrow$ Beh (iii) ✓
- (1) & Eindeutigkeit $\Rightarrow$ $g(0) = 0$; also Beh. (i) ✓

Definiere Fkt. $g : V_1 \to V_2$, $x \mapsto g(x)$

2. Akt: Stetigkeit von g:

aus erneuter Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, diesmal mit <u>vollst.</u> (!) metrischen Raum (vgl. Übung)

$$Z := \{ \varphi : V_1 \to V_2 \text{ stetig} \}$$

mit Metrik $d_\infty(\varphi_1, \varphi_2) := \sup_{x \in V_1} \|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$

(NB: V_2 beschr. $\Rightarrow$ $\varphi \in Z$ beschränkt, da $\operatorname{diam} \varphi(V_1) \leq \operatorname{diam}(V_2) < \infty$)

Betrachte $\Phi : Z \to Z$, $\varphi \mapsto \Phi(\varphi)$, $(\Phi(\varphi))(x) := G(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in V_1$

- $\Phi(\varphi)$ stetig, da G u. φ stetig
- $\forall x \in V_1 : \|(\Phi(\varphi))(x)\| \underset{(6),\ \varphi(x) \in V_2}{\leq} r$

$\Rightarrow$ Φ wohldef. da $\Phi(\varphi) \in Z$

- Φ Kontraktion, da $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in Z$:

$$d_\infty(\Phi(\varphi_1), \Phi(\varphi_2)) = \sup_{x \in V_1} \|\underbrace{(\Phi(\varphi_1))(x) - (\Phi(\varphi_2))(x)}_{G(x,\varphi_1(x)) - G(x,\varphi_2(x))}\|$$

$$\underset{\varphi_{1/2}(x) \in V_2}{\overset{(5),}{\leq}} \frac{1}{2} \sup_{x \in V_1} \|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| = \frac{1}{2} d_\infty(\varphi_1, \varphi_2)$$

$\Rightarrow$ Banachscher Fixpktsatz $\exists!\ \tilde{\varphi} \in Z$ mit

$$\Phi(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi} \iff \forall x \in V_1 : G(x, \tilde{\varphi}(x)) = \tilde{\varphi}(x)$$

1. Akt $\Rightarrow$ Fixpkt $g(x)$ eindeutig in V_2 $\forall x \in V_1$ $\Rightarrow$ $\tilde{\varphi} = g$

$\Rightarrow$ g stetig.

3. Akt: Diff.barkeit von g

(a) NB: $M \in \mathrm{Mat}(\nu \times \nu, \mathbb{R})$ invertierbar $\iff \det(M) \neq 0$ (7)

u.V. ist

- $\Delta : \begin{array}{l} V_1 \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \det\big((D_{(y)}F)(x, g(x))\big) \end{array}$ stetig

  da alle Einträge der Matrix stetig ($D_{(y)}F$ stetig, g stetig) und „det" ist Polynom in den Einträgen

- $\Delta(0) \neq 0$ $\quad (b = g(a=0) = 0)$.

$\Rightarrow$ $\exists\, V_1' \subseteq V_1$ Umgebung von $a = 0$,

so dass $\Delta(x) \neq 0$ $\forall x \in V_1'$

$\overset{(7)}{\Rightarrow}$ $(D_{(y)}F)(x, g(x))$ invertierbar $\forall x \in V_1'$ (8)

o.E. sei V_1 bereits so klein, dass (8) wahr $\forall x \in V_1$

(b) Sei $x \in V_1$ bel. fix und $\xi \in \mathbb{R}^d$ bel., so dass $x + \xi \in V_1$,

$$A := (D_{(x)}F)(x, g(x)) \in \mathrm{Mat}(\nu \times d; \mathbb{R})$$

$$B := (D_{(y)}F)(x, g(x)) \in GL(\nu; \mathbb{R}) \quad \text{wegen (a)}$$

F diff.bar in $(x, g(x)) \in V_1 \times V_2 \subset U_1 \times U_2$:

$$\Rightarrow \quad 0 \overset{(it)}{=} F(x+\xi, \underbrace{g(x+\xi)}_{=: g(x) + \delta g_x(\xi)}) = \underbrace{F(x, g(x))}_{0} + \underbrace{\overbrace{(A \,\vdots\, B)}^{(DF)(x,g(x))} \begin{pmatrix} \xi \\ \delta g_x(\xi) \end{pmatrix}}_{A\xi + B\delta g_x(\xi)} + \underbrace{\varphi(\xi, \delta g_x(\xi))}_{o\left(\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \delta g_x(\xi) \end{pmatrix} \right\|\right)}$$

$$\Rightarrow \quad g(x+\xi) - g(x) = \delta g_x(\xi)$$

$$= -B^{-1}A\xi - \underbrace{B^{-1}\varphi(\xi, \delta g_x(\xi))}_{=: \psi(\xi)} \qquad (9)$$

(c) Zeige $\psi(\xi) = o(\|\xi\|)$ ($\Rightarrow$ g diff.bar in x und $(Dg)(x) = -B^{-1}A$, also (iv)).

Fixiere $x \in V_1$.

$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $x+\xi \in V_1$, gilt:

- $$\frac{\|\psi(\xi)\|}{\|\xi\|} \le \|B^{-1}\| \underbrace{\frac{\left\|\begin{pmatrix}\xi\\ \delta g_x(\xi)\end{pmatrix}\right\|}{\|\xi\|}}_{=:T_1(\xi)} \underbrace{\frac{\|\varphi(\xi, \delta g_x(\xi))\|}{\left\|\begin{pmatrix}\xi\\ \delta g_x(\xi)\end{pmatrix}\right\|}}_{=:T_2(\xi)}$$

- $$\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}\xi\\ \delta g_x(\xi)\end{pmatrix}\right\|}_{\begin{pmatrix}\xi\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \delta g_x(\xi)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+\nu}} \le \underbrace{\|\xi\|}_{\mathbb{R}^d} + \underbrace{\|\delta g_x(\xi)\|}_{\mathbb{R}^\nu} \qquad (10)$$

- g stetig in x $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\xi \to 0} \begin{pmatrix}\xi\\ \delta g_x(\xi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+\nu}$

$$\Rightarrow \limsup_{\mathbb{R}^d \ni \xi \to 0} T_2(\xi) \le \limsup_{\mathbb{R}^{d+\nu} \ni z \to 0} \frac{\|\varphi(z)\|}{\|z\|} = 0 \qquad (11)$$

$\varphi(z) = o(\|z\|)$

also folgt $\psi(\xi) = o(\|\xi\|)$ aus:

(12): $\exists K, \rho > 0$ mit $B_\rho(x) \subseteq V_1$ und $\forall \xi \in B_\rho(0)$: $\|\delta g_x(\xi)\| \le K\|\xi\|$

denn dann ist $T_1(\xi) \le 1+K$.

Bew von (12): Sei $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^d$ mit $x+\xi \in V_1$ (für $\xi = 0$ ist (12) klar)

(9), (10) $\Rightarrow$ $\|\delta g_x(\xi)\| \le \|B^{-1}A\| \cdot \|\xi\| + \|B^{-1}\|\left(\|\xi\| + \|\delta g_x(\xi)\|\right) T_2(\xi)$

(11) $\Rightarrow$ $\exists \rho > 0$, so dass $B_\rho(x) \subseteq V_1$ und $\forall 0 \neq \xi \in B_\delta(0)$:

$$T_2(\xi) \le \frac{1}{2\|B^{-1}\|}$$

$$\Rightarrow \|\delta g_x(\xi)\| \le \underbrace{\left(\|B^{-1}A\| + \tfrac{1}{2}\right)}_{=:K/2} \|\xi\| + \tfrac{1}{2}\|\delta g_x(\xi)\| \quad ✓$$

4. Akt: g ist stetig diff.-bar. Zeige: $V_1 \to \mathrm{Mat}(\nu \times d, \mathbb{R})$, $x \mapsto (Dg)(x)$ stetig

Folgt aus Darstellung von Dg in (iv):

- g stetig $\Rightarrow$ $x \mapsto (D_\# F)(x, g(x))$ stetig, für $\# = (x)$ und (y)
- da $(D_{(y)}F)(x, g(x))$ invertierbar $\forall x \in V_1$ und Matrixinverse stetig (siehe unten) $\Rightarrow$ Beh. ∎

Beh.: $GL(\nu; \mathbb{R}) \to GL(\nu; \mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ stetig.

Bew: Gemäß der Cramerschen Regel ist

$$(A^{-1})_{jk} = \frac{1}{\det A} (-1)^{j+k} \det(\hat{A}_{kj}) \quad \text{für } 1 \le j, k \le \nu$$

k-te Zeile und j'te Spalte von A gestrichen

Somit (da $\det A \neq 0$) eine stetige, da rationale, Funktion in den Matrixelementen von A. ∎

9.6. Korollar (Satz über die Umkehrfkt)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x_0 \in \mathcal{U}$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ stetig diff.-bar und $(Df)(x_0)$ invertierbar. Dann $\exists\, \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, Umgebung von x_0, und $\exists\, V_0 \subseteq \mathbb{R}^d$, Umgebung von $f(x_0) =: y_0$, so dass

- $f: \mathcal{U}_0 \to V_0$ bijektiv
- $f^{-1}: V_0 \to \mathcal{U}_0$ stetig diff.-bar, und $\forall y \in V_0$:

$$(Df^{-1})(y) = ((Df)(x))^{-1} \quad \text{wobei } x := f^{-1}(y).$$

Beweis: Sei $b := x_0$, $a := y_0$

Achtung: In der Anwendung von Satz 9.4, muss man die Rollen von x und y vertauschen!

Setzte $F: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d \\ (y,x) \mapsto y - f(x) \end{array}$

$\Rightarrow$
- stetig diff.-bar
- $F(a,b) = 0$
- $(D_{(x)}F)(a,b) = (-Df)(b)$ invertierbar u.V.

Satz 9.4.
$\Rightarrow$ $\exists$ Umgebungen V_1 von a und $V_2 \subseteq \mathcal{U}$ von b und $\exists g: V_1 \to V_2$ stetig diff.-bar mit

(iii) ist $(y,x) \in V_1 \times V_2$ mit $y = f(x) \Rightarrow x = g(y)$

(iv) $(D_{(x)}F)(y, g(y)) = -(Df)(g(y))$ ist invertierbar $\forall y \in V_1$

und $(Dg)(y) = \left((Df)(g(y))\right)^{-1} \underbrace{(D_{(y)}F)(y,g(y))}_{\mathbb{1}_{d\times d}}$

Achtung: $g(V_1) \subsetneq V_2$ möglich, deswegen verkleinern V_1 zu V_0 wie folgt:

$f(b) = a$ & f stetig $\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebung $\mathcal{U}_0 \subseteq V_2 \subseteq \mathcal{U}$ von b:

$V_0 := f(\mathcal{U}_0) \subseteq V_1$

Sei $x \in \mathcal{U}_0$ bel. $\overset{(iii)}{\Rightarrow}$ $(g \circ f)(x) = x$

$y := f(x) \in V_1$

$\Rightarrow$ $f: \mathcal{U}_0 \to V_0$ <u>bijektiv</u> mit $g = f^{-1}: V_0 \to \mathcal{U}_0$

und $f = g^{-1}$. Insbes. $V_0 = g^{-1}(\mathcal{U}_0)$ offene Umgebung von a, da g stetig, $\mathcal{U}_0$ offen, und $g^{-1}(b) = a \in V_0$ ∎

9.3. Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

9.7. Definition Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, seien $f, h : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.

Sei $M_h := \{x \in \mathcal{U} : h(x) = 0\}$ und $a \in M_h$

f hat lok. Max. (bzw. Min.) bei a unter der Nebenbed. (NB) $h=0$ $:\Leftrightarrow$ $\exists$ Umgebung $V \subseteq \mathcal{U}$ von a in $\mathbb{R}^d$: $f(x) \leq f(a)$ (bzw. $\geq$) $\forall x \in V \cap M_h$

(Falls $V = \mathcal{U}$, so ist das Extremum unter der NB $h=0$ sogar global)

9.8. Beispiel

$\mathcal{U} = \mathbb{R}_> \times \mathbb{R}_>$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, $h(x_1, x_2) = 2(x_1 + x_2) - u$ für $u > 0$

Es gilt:

f hat glob. Max. bei $(x_1, x_2) = \left(\frac{u}{4}, \frac{u}{4}\right)$ unter der NB $h=0$

denn: Quadrat hat größten Flächeninhalt unter allen Rechtecken mit gleichem Umfang u (sogar global!)

9.9. Satz (Notwendige Bedingung)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f, h : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar, f habe ein lok. Extremum bei $a \in M_h$ unter der NB $h=0$ und sei $(\nabla h)(a) \neq 0$. Dann $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ (Lagrange-Multiplikator) so daß

$$(\nabla f)(a) - \lambda (\nabla h)(a) = 0$$

<u>Beweis</u>. o.E. sei $(\partial_d h)(a) \neq 0$ (sonst umnummerieren der Koordinatenachsen)

schreibe $a = (\underbrace{a_1, \dots, a_{d-1}}_{=:a'}, a_d)$, analog für x;

NB lautet $h(x', x_d) = 0$; Ziel: $x_d = g(x')$ für $x = (x', x_d) \in M_h$

- $\exists\, \mathcal{U}_1 \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ Umgebung von a', $\exists\, \mathcal{U}_2 \subseteq \mathbb{R}$ Umgebung von a_d:
  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}$, also $h: \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \to \mathbb{R}$, $(x', x_d) \mapsto h(x', x_d)$ stetig diff.bar
- $h(a', a_d) = 0$
- $(\partial_d h)(a', a_d) \neq 0$ (= invert. 1×1-Matrix)

$\overset{\text{Satz 9.4}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Umgebungen $V_1 \subseteq \mathcal{U}_1$ von a' und $V_2 \subseteq \mathcal{U}_2$ von a_d und $g: V_1 \to V_2$ stetig diff.bar.:

(i) $g(a') = a_d$

(ii) $h(x', g(x')) = 0 \quad \forall x' \in V_1$

(iii) $$(\partial_j g)(x') = -\frac{(\partial_j h)(x', g(x'))}{\underbrace{(\partial_d h)(x', g(x'))}_{\neq 0 \ \forall x' \in V_1}} \quad \forall x' \in V_1, \ \forall j = 1, \dots, d-1$$

[entspricht Beh. (iv) von Satz 9.4]

setze $\varphi: V_1 \to \mathbb{R}$, $x' \mapsto f(\underbrace{x', g(x')}_{\overset{(ii)}{\in} M_h})$ stetig diff.bar

u.V. hat φ lok. Extremum bei $x' = a'$.

Satz 8.34

$$\Rightarrow \quad \forall j = 1,\dots,d-1: \quad 0 = (\partial_j \varphi)(a') \overset{\text{Kettenregel}}{=} (\partial_j f)(\underbrace{a', g(a')}_{\text{(ii) } a}) + (\partial_d f)(\underbrace{a', g(a')}_{a})(\partial_j g)(a')$$

Elimination von $(\partial_j g)(a')$ mittels (iii) für $x' = a'$

$$\Rightarrow \quad \forall j = 1,\dots,d-1: \quad (\partial_j f)(a) = \lambda (\partial_j h)(a) \qquad (*)$$

$$\text{mit} \quad \lambda := \frac{(\partial_d f)(a)}{(\partial_d h)(a)} \in \mathbb{R}$$

offensichtlich gilt $(*)$ auch für $j = d$ $\Rightarrow$ Beh. ∎

9.10. Satz (Hinreichende Bed.)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f, h: U \to \mathbb{R}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $g_\lambda := f - \lambda h$. Es gebe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, so dass g_{λ_0} hat lok./glob. Max. (oder Min.) bei $a \in M_h$. Dann hat f ein lok./glob. Max. (oder Min) bei a unter der NB $h = 0$.

Beweis: o.E. nur für Min. (für Max. analog).

n.V. $\exists$ Umgebung $V \subseteq U$ von a: $g_{\lambda_0}(x) \geq g_{\lambda_0}(a)$ $\forall x \in V$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\| \\ f(x)}}{g_{\lambda_0}(x)} \underset{\text{auf } M_h}{\geq} \underset{\substack{\| \\ f(a)}}{g_{\lambda_0}(a)} \quad \forall x \in V \cap M_h$$

$V = U$ im Fall eines globales Extremums ∎

9.11. Bemerkung

- Moral: – Bestimme Extrema von $g_\lambda := f - \lambda h$
  – wähle λ geg. falls so, dass Extremalstelle $\in M_h$.
- Verallg. auf mehrere NB $h_1(x) = 0, \dots, h_n(x) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$:

  diskutiere $f - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu h_\nu$ mit $\lambda_\nu \in \mathbb{R}$ für $\nu = 1, \dots, n$

9.12. Beispiel: Sei $A \in \mathrm{Mat}(d \times d; \mathbb{R})$ symmetrisch, $U = \mathbb{R}^d$

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle x, Ax \rangle \end{array}$$

NB: $\|x\| = 1$, dazu wähle

$$h: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|^2 - 1 \end{array}$$

$g_\lambda := f - \lambda h$; $g_\lambda(x) = \langle x, B_\lambda x \rangle + \lambda$; $B_\lambda := A - \lambda \mathbb{1}_{d \times d}$

(i) notw. Bed. für lok. Extremum von g_λ (Satz 8.34):

$0 \overset{!}{=} (\nabla g_\lambda)(x) \overset{8.16}{=} 2 B_\lambda x$, also x ist Eigenvektor von A zum E.W. λ; damit $x \in M_h$: normiert x

(ii) hinr. Bed. für lok. Extremum von g_λ (2 mal stetig diff.bar. $\Rightarrow$ Satz 8.38 anwendbar)

(i) $\nabla g_\lambda(x) = 0 \Rightarrow \lambda$ ist EW von A (s.o.)

(ii) Strikte Definitheit von B_λ (8.38 & $(D^2 g)(x) = 2 B_\lambda$)

Seien $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_d$ die EW von A mit zug. norm. EV's $v_1, \ldots, v_d$

Leider: B_{α_j} indefinit oder semidef. für $j = 2, \ldots, d-1$
(Kor. 8.37) pos. semidef. (also nicht strikt pos.) für $j = 1$
neg. semidef. (" " " neg.) für $j = d$

$\Rightarrow$ Satz 8.38 nicht anwendbar ☹

(iii) dennoch gilt: g_{α_d} (bzw. g_{α_1}) hat globales Max. (bzw. Min) bei $x = v_d$ (bzw. $x = v_1$)

denn
Satz 8.36
$\Rightarrow \langle x, B_{\alpha_d} x \rangle \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^d$ mit "=" für $x = v_d$
(bzw. $\langle x, B_{\alpha_1} x \rangle \geq 0$ mit "=" für $x = v_1$)

(iv) v_d (bzw. v_1) normiert, also $\in M_h$

(iii) & Satz 9.10
$\Rightarrow$ f hat globales Max. (bzw. Min.) bei v_d (bzw. v_1) unter der NB $h = 0$ (d.h. $\|x\| = 1$) ∎

10. Topologische Räume

10.1. Grundlegende Begriffe

10.1. Definition Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge

- $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Topologie auf X

  $:\Leftrightarrow$ (1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

  (2) $\mathcal{T}$ abgeschlossen unter bel. Vereinigungen,
  d.h.: Sei J Indexmenge, sei $A_j \in \mathcal{T}$ $\forall j \in J$
  $\Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$

  (3) $\mathcal{T}$ abgeschlossen unter endlichen Schnitten,
  d.h.: Sei $N \in \mathbb{N}_0$, sei $A_n \in \mathcal{T}$ $\forall n = 1, \dots, N$
  $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{T}$

Konvention: $\bigcap_{j \in \emptyset} A_j := X$; $\bigcup_{j \in \emptyset} A_j := \emptyset$; Also (1) folgt aus (2), (3).

- $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum (oft nur X)
- $A \in \mathcal{P}(X)$ offen $:\Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$
- Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf X

  $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$ $:\Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$

  ($\Leftrightarrow$: $\mathcal{T}_2$ gröber als $\mathcal{T}_1$)

10.2. Beispiele

(a) Indiskrete Topologie: $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ gröbste Top. auf X

(b) Diskrete Topologie: $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ feinste Top. auf X

(c) (X,d) metr. Raum und $\mathcal{T}_d := \{A \in \mathcal{P}(X) : \forall x \in A\ \exists r = r_x > 0 : B_r(x) := \{y \in X : d(x,y) < r\} \subseteq A\}$

$\rightsquigarrow$ metrische Topologie (nach Satz 7.15) offene Mengen in (X,d)

Induzierte Topologie auf Teilmengen:

10.3. Definition $(X, \mathcal{T})$ top. Raum und $A \subseteq X$ (nicht notw. $\in \mathcal{T}$)

Relativtopologie auf A: $\mathcal{T}_A := \{C \cap A : C \in \mathcal{T}\}$

(auch: Spurtopologie, Teilraumtop., induzierten Top.)

10.4. Bemerkung

- $\mathcal{T}_A$ ist Topologie auf A (checken!)
- Warnung: Falls $A \notin \mathcal{T}$ und $C \cap A \in \mathcal{T}_A$ $\overset{i.A.}{\not\Rightarrow}$ $C \cap A \in \mathcal{T}$

Bsp: $X := \mathbb{R}$ mit metr. Top. von $|\cdot|$

$A := [0,1]$, $C :=]-1, \frac{1}{2}[\in \mathcal{T} \Rightarrow C \cap A = [0, \frac{1}{2}[\in \mathcal{T}_A$, $\notin \mathcal{T}$

- Falls $\mathcal{T}_d$ metrische Top. auf metr. Raum (X,d)

$\Rightarrow \mathcal{T}_A$ ist metr. Top. auf metr. Raum $(A, d|_{A \times A})$,

checken!

d.h. $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_{d|_{A \times A}}$ (siehe 7.3 (c))

10.5. Definition Sei X top. Raum, $A \subseteq X$, $x \in X$

(a) A abgeschlossen $:\Leftrightarrow A^c := X \setminus A$ offen

(b) $\left.\begin{array}{l} \mathcal{U} \subseteq X \text{ Umgebung} \\ \text{von } x \in X \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{T}$ mit $x \in A \subseteq \mathcal{U}$

(c) X Hausdorff-Raum $:\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x, y \in X \text{ mit } x \neq y: \\ \exists \text{ Umgebungen } \mathcal{U} \text{ von } x \text{ und} \\ \mathcal{V} \text{ von } y \text{ mit } \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset \end{cases}$

(d) x Randpkt. von A $:\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \text{ Umgebungen } \mathcal{U} \text{ von } x \text{ gilt:} \\ \mathcal{U} \cap A \neq \emptyset \text{ und } \mathcal{U} \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$

$\partial A := \{x \in X : x \text{ ist Randpkt. von } A\}$

(e) $\mathring{A} := A \setminus \partial A$ Inneres von A

$\overline{A} := A \cup \partial A$ Abschluss von A

(f) A dicht in X $:\Leftrightarrow \overline{A} = X$

Analog zu Def. 7.12(c) hat man

10.6. Lemma Sei X top. Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt:

A offen (d.h. $A \in \mathcal{T}$) $\Leftrightarrow \forall x \in A \; \exists$ Umgebung $\mathcal{U}$ von x mit $\mathcal{U} \subseteq A$

Beweis

"$\Leftarrow$" per Def. der Umgebung gilt: $\forall x \in A$ $\exists A_x \in \mathcal{T}$ (also offen) mit $x \in A_x$ und $A_x \subseteq A$

$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} A_x \overset{\text{Def. 10.1.(2)}}{\Rightarrow} A \in \mathcal{T}$

"$\Rightarrow$" wähle $\mathcal{U} = A$ $\forall x \in A$ ∎

10.7. Bemerkung

(a) Def. 10.5. (a), (b), (d), (e) konsistent mit Spezialfällen für metr. Räume (Def. 7.12 (b), 7.17, 7.19)

(b) (X, d) metr. Raum $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_d)$ Hausdorff-Raum
↑ Satz 7.14.

(c) Sätze 7.21 und 7.22 gelten auch für topol. Räume. (checken!)

(d) $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ (per Konstruktion von $\mathbb{R}$; vgl. Satz 2.61).

10.8. Definition Sei $(X, \mathcal{T})$ top. Raum, und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ eine Familie offener Mengen.

- $\mathcal{B}$ Basis für $\mathcal{T}$ $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{T} = \{$ bel. Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$ $\}$
- $\mathcal{B}$ Subbasis für $\mathcal{T}$ $:\Leftrightarrow$ $\{$ $\{$endliche Schnitte von Mengen aus $\mathcal{B}\}$ ist Basis für $\mathcal{T}$
- $\mathcal{B}$ Umgebungsbasis von $x \in X$

$:\Leftrightarrow$ (i) $\forall B \in \mathcal{B}$: B ist Umgebung von x

(ii) $\forall$ Umgebung U von x $\exists B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$

10.9. Lemma Sei (X,d) metr. Raum. Dann gilt:

(a) $\{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ ist Umgebungsbasis von $x \in X$ für $\mathcal{T}_d$

(b) $\{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}, x \in X\}$ ist Basis für $\mathcal{T}_d$

(c) Sei A dicht in X

$\Rightarrow \{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}, x \in A\}$ ist Basis für $\mathcal{T}_d$

<u>Beweis</u>: (a) aus Def. 7.12 (b)

(b) aus (c) mit $A = X$

(c): Sei $G \in \mathcal{T}_d$ und $x \in G$; $\Rightarrow \exists\, \varepsilon := \varepsilon_x > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq G$

Sei $n := n_x \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $\overline{A} = X \Rightarrow$

$B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$; wähle $a := a_x \in B_{1/n}(x) \cap A$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bullet\ x \in B_{1/n}(a) \\ \bullet\ B_{1/n}(a) \subseteq G \end{array}\right\} \Rightarrow G = \bigcup_{x \in G} B_{\frac{1}{n_x}}(a_x)$$

Δ's-Ungl. für $y \in B_{1/n}(a)$:

$$d(x,y) \leq \underbrace{d(x,a)}_{<\frac{1}{n}} + \underbrace{d(a,y)}_{<\frac{1}{n}} < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

10.10. Definition Sei X topol. Raum.

- X <u>separabel</u> $:\Leftrightarrow \exists\, A \subseteq X$ abzählbar mit $\overline{A} = X$
- X <u>erfüllt erstes Abzählbarkeitsaxiom (1. AA)</u> $:\Leftrightarrow$ jedes $x \in X$ besitzt abzählbare Umgebungsbasis
- X <u>erfüllt zweites Abzählbarkeitsaxiom (2. AA)</u> $:\Leftrightarrow \exists$ abzählbare Subbasis der Topologie

10.11. Bemerkungen

(a) $\exists$ abzählbar Subbasis $\Leftrightarrow$ $\exists$ abzählbar Basis

denn: "$\Leftarrow$": jede Basis ist auch Subbasis

"$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{S}$ abz. Subbasis $\Rightarrow$ zugehörige Basis

$$\mathcal{B} := \bigcup_{N \in \mathbb{N}_0} \underbrace{\{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ ist Schnitt von } N \text{ Mengen aus } \mathcal{S}\}}_{=: \mathcal{B}_N}$$

Die Abb.

$$\overbrace{\mathcal{S} \times \ldots \times \mathcal{S}}^{N \text{ Faktoren } (=: \mathcal{S}^N)} \longrightarrow \mathcal{B}_N$$

$$(B_1, \ldots, B_N) \longmapsto B_1 \cap \ldots \cap B_N$$

ist surjektiv

und da $\mathcal{S}^N$ abzählbar (end. Kartes. Produkt abz. Mengen (Satz 2.101)) $\overset{\text{Def. 2.96}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{B}_N$ abzählbar $\overset{\text{Satz 2.99}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{B}$ abzählbar (abz. Vereinigung abz. Mengen)

(b) Sei (X, d) metr. Raum $\overset{\text{Lemma 10.9(a)}}{\Longrightarrow}$ X erfüllt 1. AA.

(c) Sei X überabzählbar mit diskreter Topologie ($\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$)

$\rightarrow$ $\forall x \in X$ gilt: $\{x\} \in \mathcal{T} \Rightarrow \{x\}$ ist Umgebung von x

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}_x := \{\{x\}\}$ ist Umgebungsbasis von x,

also X erfüllt 1. AA.

aber: für jede Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{T}$ gilt:

$$\mathcal{B} \supseteq \bigcup_{x \in X} \{\{x\}\}$$

– also X erfüllt <u>nicht</u> 2. AA.

Das 2. AA ist tatsächlich stärker als das 1. AA.:

10.12. Satz Sei X topol. Raum. Dann gilt:

X erfüllt 2.AA $\Rightarrow$ X erfüllt 1.AA <u>und</u> ist separabel

<u>Beweis</u>: Sei $\mathcal{B}$ abzählbare Basis von $\mathcal{T}$, sei $x \in X$

- $\Rightarrow \mathcal{N}_x := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ ist Umgebungsbasis von x
  $\Rightarrow \mathcal{N}_x$ abzählbar $\Rightarrow$ 1.AA ✓
- $\forall \emptyset \neq B \in \mathcal{B}$ wähle $x_B \in B$
  $\Rightarrow A := \{x_B \in X : \emptyset \neq B \in \mathcal{B}\}$ abzählbar

<u>Beh</u>: $\overline{A} = X$ (also X separabel ✓)

da $\forall x \in X$ $\forall$ Umgebung U von x gilt:

$\exists G \in \mathcal{T}$ mit $x \in G \subseteq U$. Da G Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq U \Rightarrow A \cap U \neq \emptyset$ ∎

In metr. Räumen gilt auch die Umkehrung (siehe Lem. 10.9(c))

10.13. Korollar Sei (X, d) metr. Raum. Dann gilt

$$X \text{ separabel} \Leftrightarrow X \text{ erfüllt 2.AA}$$

(das 1.AA ist nach Bem. 10.11(b) sowieso erfüllt)

<u>10.14. Beispiel</u>

$\mathbb{R}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, ist separabel, da $\mathbb{Q}^\nu$ dicht in $\mathbb{R}^\nu$

$\overset{\text{Kor. 10.13}}{\Longrightarrow}$ 2.AA $\overset{\text{Satz 10.12}}{\Longrightarrow}$ 1.AA.

[Wenn nichts weiter spezifiziert, so wird $\mathbb{R}^\nu$ mit metr. Topol. der Euklid. Norm $\|\cdot\|_2$ versehen.]

10.2. Limiten und Stetigkeit

10.15. Definition Sei X topol. Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge

$$\left.\begin{array}{l}(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ kgt. gegen} \\ x \in X\end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall \text{ Umgebungen } \mathcal{U} \text{ von } x: \\ \exists \text{ höchstens endlich viele } k\in\mathbb{N} \\ \text{mit } x_k \notin \mathcal{U}.\end{array}\right.$$

(d.h. $\forall$ Umgeb. $\mathcal{U}$ von x $\exists N = N(x,\mathcal{U})$: $k \geq N \Rightarrow x_k \in \mathcal{U}$)

in Zeichen:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \quad \text{oder} \quad x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$$

10.16. Bemerkung: (a) Def. konsistent mit Kgz. in metr. Räumen

(b) Je gröber die Topologie, desto „leichter" kgt. eine Folge

Extremfälle • X mit indiskreter Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$

$\Rightarrow$ jede Folge kgt. gegen jedes $x \in X$

• X mit diskreter Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$:

$$x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \quad \Leftrightarrow \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} : x_k = x \quad \forall k \geq k_0.$$

10.17. Satz Sei X Hausdorff-Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$

Dann existiert höchstens ein $x \in X$ mit $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$,

d.h. Grenzwerte sind, falls existiert, eindeutig.

Beweis. Es gelte $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$, $x_k \xrightarrow{k\to\infty} y$ und $x \neq y$

$\overset{\text{Hausdorff}}{\Rightarrow}$ $\exists\, \mathcal{U}_x$ (bzw. $\mathcal{U}_y$) Umgebung von x (bzw y)

mit $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$.

da $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \rightarrow \exists$ höchstens endlich viele $k \in \mathbb{N}$

mit $x_k \in \mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}_x^c$ - also $\lightning$ zu $x_k \to y$ ∎

10.18. Definition Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topol. Räume, sei $f: X \to Y$.

- f <u>stetig</u> $:\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$
  („Urbilder offener Mengen sind offen")
- f <u>folgenstetig</u> $:\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Falls } x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \quad (\text{in } X) \\ \Rightarrow f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x) \quad (\text{in } Y) \end{cases}$

(Def'en konsistent mit denen für metr. Räume; für „stetig" siehe Satz 7.37).

10.19. Satz Seien X, Y topol. Räume und $f: X \to Y$.

Dann gilt

(a) f stetig $\Rightarrow$ f folgenstetig

(b) $\left.\begin{array}{l} f \text{ folgenstetig und} \\ X \text{ erfüllt 1. AA} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ stetig

Wegen Bem. 10.11(b) gilt

10.20 Korollar Sei X metr. Raum, Y top. Raum, $f: X \to Y$

Dann gilt $\quad f$ stetig $\Leftrightarrow f$ folgenstetig

(vgl. Satz 7.30)

<u>Beweis von Satz 10.19:</u>

(a) Sei $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$, sei $V \subseteq Y$ bel. Umgebung von $f(x)$

und $U := f^{-1}(V)$

u.V. ist U offen und $x \in U \Rightarrow U$ Umgebung von x

$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad x_k \in U \quad \forall k \geq k_0$

$\Rightarrow \quad$ " $\quad : f(x_k) \in f(U) \subseteq V \quad \forall k \geq k_0$

also $f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x)$ ✓

(b) Ann: f nicht stetig.

$\Rightarrow \exists V \subseteq Y$ offen mit $f^{-1}(V)$ nicht offen in X.

Lemma 10.6

$\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(V)$, so dass $\forall$ Umgebungen $\mathcal{U}$ von x:

$$\mathcal{U} \cap (f^{-1}(V))^c \neq \emptyset \quad (1)$$

n.V. $\exists$ abz. Umgebungsbasis $\{\mathcal{U}_k : k \in \mathbb{N}\}$ von x;

setze $\tilde{\mathcal{U}}_k := \bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{U}_j \Rightarrow$ (2) $\tilde{\mathcal{U}}_k \supseteq \tilde{\mathcal{U}}_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

(3) $\tilde{\mathcal{U}}_k$ Umgebung von x, $\forall k$

$(1) \wedge (3) \overset{\forall k \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} \exists x_k \in \tilde{\mathcal{U}}_k \cap (f^{-1}(V))^c$

$\Rightarrow$ • $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$ (denn: Sei $\mathcal{U}'$ bel. Umgeb. von x

$\{\mathcal{U}_k\}$ Umg.basis $\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}_{k'} \supseteq \tilde{\mathcal{U}}_{k'}$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} x_k \in \mathcal{U}' \quad \forall k \geq k'$)

• $\forall k \in \mathbb{N}$: $f(x_k) \notin V$

V Umgeb. von $f(x)$ $\Rightarrow f(x_k) \not\to f(x)$ ↯ ∎

10.24 - Bemerkung

(a) Bsp. für folgenstetige, aber nicht stetige Fkt, siehe Präsenzübung.

(b) Verallg. von Folgen auf gerichtete Indexmengen J (statt $\mathbb{N}$):

$(x_j)_{j \in J}$ (Netz). Dann gilt (ohne 1. AA!):

$$f \text{ netzstetig} \iff f \text{ stetig}$$

Eine Indexmenge J ist gerichtet $:\iff$

$\exists$ Relation $\triangleleft$ auf J mit

- $j \triangleleft j \quad \forall j \in J$ (reflexiv)
- $j \triangleleft k \wedge k \triangleleft l \Rightarrow j \triangleleft l \quad \forall j,k,l \in J$ (transitiv)
- $\forall j,k \in J \; \exists l \in J : j \triangleleft l \wedge k \triangleleft l$

10.3. Kompaktheit

10.22. Definition Sei X topol. Raum, sei $A \subseteq X$

- A kompakt $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{falls } A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,\ \emptyset \neq \Lambda \text{ Indexmenge,} \\ \qquad U_\lambda \text{ offen } \forall \lambda \in \Lambda \\ \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \text{ und } \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda: \\ \qquad A \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} U_{\lambda_n} \end{cases}$

„jede offene Überdeckung besitzt endliche Teilüberdeckung"
(Heine-Borel-Eigenschaft).

- A folgenkompakt $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{jede Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \\ \text{besitzt kgt'e Teilfolge in } A, \\ \text{d.h. } \exists x \in A,\ \exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \\ \text{strikt isoton mit } x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x \end{cases}$

(Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft).

10.23. Satz Sei X topol. Raum

(a) Falls X erfüllt 1. AA, dann gilt:

X kompakt $\Rightarrow$ X folgenkompakt

(b) Falls X erfüllt 2. AA, dann gilt:

X kompakt $\Leftrightarrow$ X folgenkompakt

[(a) verallg. "$\Rightarrow$" in Satz 7.40]

Im Beweis von Satz 10.23 wird gebraucht:

10.24. Satz (Lindelöf)

Sei X topol. Raum, der 2.AA. genügt, und $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ eine offene Überdeckung. Dann $\exists$ abzählbare Teilüberdeckung, d.h. $\exists (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Lambda$ (Folge in Λ) mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{\lambda_n}$.

<u>Beweis</u>: Sei $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ Basis der Topologie (abzählbar!)

sei $N := \{n \in \mathbb{N} : \exists \lambda \in \Lambda \text{ mit } B_n \subseteq U_\lambda\}$

$\Rightarrow$ jedes U_λ ist Vereinigung aus B_n's

$$\bigcup_{n \in N} B_n = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X \qquad (*)$$

$\forall n \in N$ wähle $\lambda_n \in \Lambda$: $B_n \subseteq U_{\lambda_n}$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad X = \bigcup_{n \in N} B_n \subseteq \bigcup_{n \in N} U_{\lambda_n} \Rightarrow X = \bigcup_{n \in N} U_{\lambda_n} \text{ abz. Teilüberdeckung} \blacksquare$$

<u>Beweis von Satz 10.23.:</u>

(a) per Widerspruch: <u>Ann.</u>: $\exists$ Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ ohne kgt'e Teilfolge. $\Big\}$ (WA)

<u>Beh</u>: $\forall x \in X$ $\exists$ offene Umgebung $U(x)$ mit $x_n \in U(x)$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

<u>Bew</u>: ebenfalls per Widerspruch; also

<u>Ann</u>: $\exists x \in X$ $\forall$ offenen Umg. $U(x)$ von x: $x_n \in U(x)$ für ∞-viele $n \in \mathbb{N}$ $\Big\}$ $(*)$

1. AA $\Rightarrow \exists$ abz. Umgebungsbasis $\{\tilde{V}_j : j \in \mathbb{N}\}$ von x aus (*)

Sei $V_k := \bigcap_{j=1}^{k} \tilde{V}_j$ für $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \{V_k : k \in \mathbb{N}\}$ ebenfalls

Umgebungsbasis von x (mit $V_{k+1} \subseteq V_k \ \forall k \in \mathbb{N}$)

$\overset{(*) \text{ mit } V_k}{\Rightarrow}$ $\forall k \in \mathbb{N} : x_n \in V_k$ für ∞-viele $n \in \mathbb{N}$.

Wähle induktiv strikt isotone Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, so dass

$$x_{n_k} \in V_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\overset{V_{k+1} \subseteq V_k}{\Rightarrow}$ $\forall k \in \mathbb{N}, \forall k' \geq k : x_{n_{k'}} \in V_k \overset{\{V_k\}_k \text{ Umg. basis}}{\Rightarrow} x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x$ ↯ zu (WA)

$\Rightarrow$ Beh. ist bewiesen. ✓

Nun: Betrachte offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{y \in X} U(y) \quad \text{aus Beh.}$$

$\overset{X \text{ kpt.}}{\Rightarrow} \exists K \in \mathbb{N}, \exists y_1, \dots, y_K \in X : X = \bigcup_{k=1}^{K} U(y_k)$ (**)

Für Folge $(x_n)_n$ aus (WA) gilt gemäß Beh.:

$\forall k \in \{1, \dots, K\} : U(y_k)$ enthält nur endlich viele x_n

↯ zu (**) ✓

(b) "$\Rightarrow$" klar, da 2. AA $\Rightarrow$ 1. AA & (a) ✓

"$\Leftarrow$" per Widerspruch: Ann: X nicht kompakt

d.h. wegen Satz 10.24 (Lindelöf) $\exists$ abz (!) offene

Überdeckung $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ ohne endliche Teilüberdech.

$$\Rightarrow \quad X \setminus \left(\bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu\right) \neq \emptyset \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Deshalb möglich:

$\forall n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in X \setminus \left(\bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu\right)$ $\xrightarrow{X \text{ folgenkpt}}$

$\exists x \in X$ und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ strikt isoton: $x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x$

$X = \bigcup_n U_n$

$\Rightarrow$ $x \in U_{\tilde{n}}$ für ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : x_{n_k} \in U_{\tilde{n}}$ ↯, denn für k groß genug, ist $n_k \geq \tilde{n}$ ∎

10.25. Bemerkung

$\exists$ Beispiele für kompakte, aber nicht folgenkompakte topol. Räume, sowie für folgenkompakte, aber nicht kompakte topol. Räume (zu aufwändig hier, siehe z. B. v. Querenburg).

In metrischen Räumen fallen beide Begriffe zusammen:

10.26. Satz Sei X metr. Raum. Dann gilt:

$$\begin{array}{ccc} X \text{ kompakt} & \Longleftrightarrow & X \text{ folgenkompakt} \\ & & \Downarrow \\ X \text{ erfüllt 2.AA} & \Longleftrightarrow & X \text{ separabel} \end{array}$$

10.27. Bemerkung

$$X \text{ separabel} \overset{\text{i.A.}}{\not\Longrightarrow} X \text{ (folgen-) kompakt}$$

Bsp: $X = \mathbb{R}$.

<u>Beweis</u> • „kompakt $\Rightarrow$ folgenkompakt"

siehe Beweis Satz 7.40 <u>oder</u> Satz 10.23(a) & Bem. 10.11.(b) ✓

• „folgenkompakt $\Rightarrow$ separabel"

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wähle $x_1^{(n)} \in X$; falls $R_1^{(n)} := X \setminus B_{1/n}(x_1^{(n)}) \neq \emptyset$ wähle $x_2^{(n)} \in R_1^{(n)}$, ..., falls $x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}$ gewählt und $R_k^{(n)} := X \setminus \bigcup_{j=1}^{k} B_{1/n}(x_j^{(n)}) \neq \emptyset$, wähle $x_{k+1}^{(n)} \in R_k^{(n)}$, usw, ...

<u>Beh.</u> Auswahlprozess stoppt nach endlich vielen Schritten.

<u>Bew</u>: Wenn nicht, erhält man Folge $(x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $d(x_k^{(n)}, x_j^{(n)}) \geq \frac{1}{n} \quad \forall j \neq k$

$\Rightarrow (x_k^{(n)})_k$ hat keine kgt'e Teilfolge ↯

Also $\exists K_n \in \mathbb{N}: \quad X = \bigcup_{k=1}^{K_n} B_{1/n}(x_k^{(n)})$

Setze $M_n := \{x_1^{(n)}, \dots, x_{K_n}^{(n)}\}$

$\Rightarrow M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ abzählbar und dicht in X ✓

• „separabel $\Leftrightarrow$ 2.AA" nach Kor. 10.13.

• „folgenkompakt $\Rightarrow$ kompakt": (*)

$$\left.\begin{array}{c} \text{folgenkompakt} \\ \Downarrow \text{ s.o.} \\ \text{separabel} \\ \Downarrow \text{ s.o.} \\ \text{2.AA} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{kompakt nach Satz 10.23(b)} \quad \blacksquare$$

<u>Bem</u>: (*) wurde bereits in Satz 7.40 formuliert, aber dort nicht bewiesen!

A. Ausblicke

Infos zur weiteren Module (im Bachelor), Math-Themen, Zusammenhänge zu Ana 1-3 etc. (Alles sehr subjektiv!)

A.0. Einleitung

„Algebra" & „Kommutative Algebra": (WP5 + WP24)

Vorkenntnisse: KEIN Analysis!

Inhalt: siehe z.B. Geldhauser-Webseite („Prüfungsthemen", WiSe 21/22)

„Stochastik" & „W-theorie" (WP3 + WP20; WiMi: P10 + P14)

Braucht Analysis; vor allem ist (abstrakten) Maß- und Integrationstheorie (Ana 3) Grundlage für die ganze (!) Stochastik & W-theorie (und damit ganze (!) Finanz-Mathe) (und Ana 3 ist „Vorkenntnisse" für WP20/P14!)

Inhalt: siehe z.B. Rademacher (Stoch; LSF & Moodle 23/24) & Merkl (W-Theorie; LSF 24)

„Finanzmath. in disk. Zeit" (WP22 / P15)

Kein Info hier (Voraussetzungen: P1-P8)

„Numerik", „Prog. für Math. 1+2", „Comp. gest. Math"
(WP1; P10; P12; WP7 / WiMa: P16, P13, ??, P19)
Kein Info hier.
(Numerik schon erwähnt: braucht (viel) Ana & LA.
WP7/P19 z.B. Matlab, Mathematica, Maple anwenden (!))

A.1. Geometrie

„Geometrie" & „Differentialgeometrie"
(WP18, WP21 (Vork. insbes. WP18))

WP18: Studiert Kurven & Flächen: (siehe auch Ana 3)

LA 1+2: Studiert end. dim lin. Räume & lin. Abb.

Ana 1-3: Studiert (i.A., nicht lin.) Abb. zwischen lineare Räume ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$)

(Unend. dim lin. Räume & lin. Abb: „FunkAna" (WP19; siehe unten)

In WP18: Studiert 1- und 2 dim. „nichtlin. Räume"
(Kurven: 1-dim.; Flächen: 2-dim.
Höher dim. / allg.: WP21).

A.1. Definition Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

ϕ ist ein Weg in $\mathbb{K}^n$ $:\Leftrightarrow$ $\phi : I \to \mathbb{K}^n$ ist stetig.

$C \subseteq \mathbb{K}^n$ ist eine Kurve $:\Leftrightarrow$ (!) (siehe unten) $\left\{ \exists\, \phi \text{ Weg in } \mathbb{K}^n \text{ mit } \phi(I) = C \right.$

[Man nennt C die durch ϕ erzeugte Kurve, und ϕ eine Parameterdarstellung dieser Kurve C]

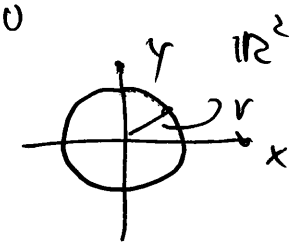
A.2. Bemerkung: Kurven in $\mathbb{R}^2$ können geg. werden als

(a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $F(x,y) = 0$ (Implizite Gl.)

(b) $\phi : I \to \mathbb{R}^2$ (parametrisierte; siehe A.1)
$(x = \phi_1(t),\ y = \phi_2(t))$

(c) Graphen: $f : J \to \mathbb{R}$; $y = f(x)$. ($J \subseteq \mathbb{R}$)

A.3. Beispiel: Kreis im $\mathbb{R}^2$: $r > 0$

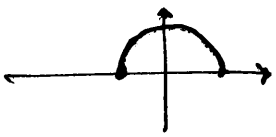


(a) $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

(b) $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t))$

(oder $\tilde{\phi} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (r\cos(500\pi t), r\sin(500\pi t))$)

(c) $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$



A.4. Definition Sei $\phi : I \to \mathbb{K}^n$ ein Weg, $I = [a,b]$,

$Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ eine Zerlegung von I,

und
$$l(Z;\phi) := l(Z) := \sum_{i=1}^{p} |\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})|$$

Man nennt
$$L(\phi) := \sup_Z l(Z;\phi)$$

die Weglänge von ϕ. (Supremum über alle Zerlegungen)

ϕ ist rektifizierbar $:\Leftrightarrow L(\phi) < \infty$

ϕ ist nicht rekt.bar. $:\Leftrightarrow L(\phi) = \infty$

A.5. Bemerkung: Ist $\mathbb{K}^n \equiv \mathbb{R}^2$, so gibt es $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

so daß $C = \phi(I) \subseteq [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subseteq \mathbb{R}^2$

(da ϕ stetig).

Es gibt aber Weg $\phi : \overset{I}{[0,1]} \to \mathbb{R}^2$ so daß

$$C = \phi(I) \overset{!}{=} [0,1] \times [0,1]$$

(mit $L(\phi) = +\infty$).

A.6. Satz (a) Sei $\phi : I \to \mathbb{K}^n$ Lipschitz-stetiger Weg:

$\exists \tilde{L} > 0 : \quad |\phi(t) - \phi(s)| \le \tilde{L}|s-t| \quad \forall s,t \in I \equiv [a,b]$

Dann ist ϕ rektifizierbar, und

$$L(\phi) \le \tilde{L}(b-a)$$

(b) Sei $\phi : I \to \mathbb{K}^n$ C^1-Weg (allg. PC^1).
Dann ist ϕ rektifizierbar, und ($I = [a,b]$)

$$L(\phi) = \int_a^b \|\phi'(t)\|_{\mathbb{K}^n}\, dt$$

A.7. Definition Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$,
$Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$ eine Zerlegung von I.
Man nennt

$$\operatorname{var}(Z) := \operatorname{var}(Z; f) := \sum_{i=1}^{p} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

die Variation zu Z, und

$$V_a^b(f) := \sup_Z \operatorname{var}(Z; f)$$

die Totalvariation von f auf I.
Ist $V_a^b(f) < +\infty$ heisst f von beschränkter Variation:

$$f \in BV(I) :\Leftrightarrow V_a^b(f) < +\infty$$

A.8. Lemma Notation wie oben;

(a) $f \in BV(I) \Rightarrow f$ beschr.; $|f(a) - f(b)| \leq V_a^b(f)$.

(b) $BV(I)$ ist eine Funktionenalgebra:

$$f, g \in BV(I) \Rightarrow \lambda f,\ f+g,\ fg \in BV(I) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

und $V_a^b(\lambda f + \mu g) \leq |\lambda|\, V_a^b(f) + |\mu|\, V_a^b(g)$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

$$V_a^b(fg) \leq \|f\|_\infty V_a^b(g) + \|g\|_\infty V_a^b(f).$$

(c) f monoton $\Rightarrow$ $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$

$f \in C^1(I) \Rightarrow V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)|\,dt$

$\boxed{\text{A.9. Satz}}$ (Jordan) $f \in BV(I)$

$\Leftrightarrow \exists\, h, g : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend: $f = g - h$

$\boxed{\text{A.10 Satz}}$ (Rektifizierbarkeit) Der Weg $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann rektifizierbar, wenn alle Koordinatfkt'en ϕ_i BV sind:

ϕ rekt.-bar $\Leftrightarrow$ $\phi_i \in BV(I)$ $\forall i = 1, \dots, n$

Wie „immer": Man studiert konkrete Beispiele (von Ebene & Räumliche Kurven), und allg. Eigenschaften, wie Tangenten, Krümmung, Torsion usw.

Ähnlich studiert man Flächen $\mathcal{F}$: Teilmengen aus $\mathbb{R}^3$, geg. durch (a) $F(x,y,z) = 0$ (d.h. $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$)

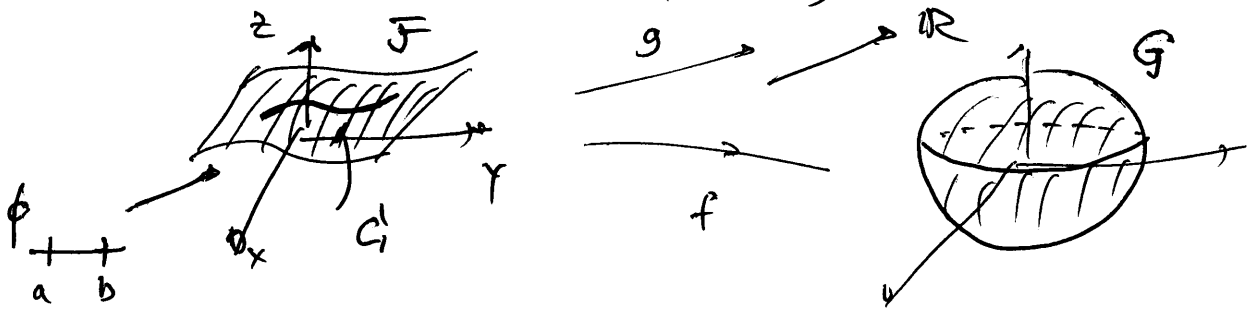
(b) Parametrisierte (!-?)

(c) Graphen $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$

Bsp: Die (!) Sphäre (a) $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$

Man studiert lineare Approximation (Kurve: Tangenten; Flächen: Tangentebene) und nichtlin. Eigenschaften (Krümmung(en), Torsion, Genus etc.)

und Abbildungen zwischen Kurven / Flächen
(und Diff.- und Integralrechnung; siehe Übersicht Ana 3
- z.B. Flächeninhalt, analog zur Kurvenlänge).



Man studiert „geraden" auf Flächen („Geodäten")
(Kurven minimaler (!) Abstand) $\rightsquigarrow$ „Variationsrechnung"
(Funktionale min: J: Kurven $\to \mathbb{R}$ – „Kurven": unend. dim Raum)
$c \longmapsto L(\phi)$

A.2. „Gewöhnliche Diff. Gleichungen" (WP15 / P12)

$\boxed{\text{A.11. Definition}}$ Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Abb. $G: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ off. Int., heisst Zeit-abh. Vektorfeld.

(i) Es definiert eine „Gew DGL"

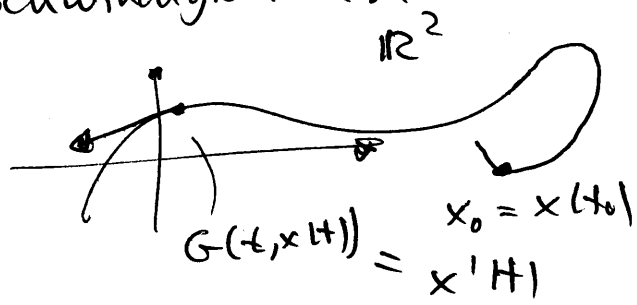
$$(*) \quad x'(t) = G(t, x(t)) \qquad (\text{auch: } x' = G(t,x))$$

(ii) Eine Abb. $x: J \to \mathbb{R}^n$ $(J \subseteq I)$ ist eine Lösung zur $(*)$ $:\Leftrightarrow$ $\forall t \in J: \; x'(t) = G(t, x(t))$

(iii) Geg. zusätzlich $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$, ist x Lös. zur Anfangswertpb $:\Leftrightarrow$

$$(**) \quad \begin{cases} x'(t) = G(t, x(t)) & \forall t \in J \\ t_0 \in J \;\&\; x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Interpretation: Der Weg x fängt zur Zeit t_0 in x_0 an, und die Tangente/Geschwindigkeit ist Wert vom Vektorfeld G



$\boxed{\text{A-12-Satz}}$ (Picard-Lindelöf)

$G: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lok. Lipschitz (!) $\Rightarrow \exists!$ Lös. zur (**)

Bew: Banachscher Fixpktsatz (!)

(Auch für Kurven auf Flächen wichtig).

Bem. (a) Falls $G(t,x) \equiv G(x)$ (unabh. von t) nennt man (*) autonom

(b) Falls $G(x_0) = 0$, dann gilt, mit $x(t) := x_0 \ \forall t \in I$,

$$x'(t) = 0 = G(x_0) = G(x(t)) \quad \forall t \in I$$

$\Rightarrow$ x ist die Eindeutige Lös. zur (**) (in dem Fall).

x_0: Gleichgewichtspkt (Bsp: Pendel (starrs) ($\geq$ Gl. pkt.!))

Frage: „Stabil" oder „instabil"?

Antwort: Hängt von $(DG)(x_0)$ ab!

Muss linear Gleichung $(A = (DG)(x_0))$

$$\dot{x}(t) = A x(t), \quad A \text{ (fix) } n \times n \text{ Matrix}$$

lösen & Lösungen studieren. Verhalten hängt von Eigenwerte & Eigenvekt. von A ab.

$\underline{n=1}$: $x'(t) = a\,x(t) \Rightarrow x(t) = c_0 e^{at}$, $t \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}$ $\quad x(0) = x_0 \Rightarrow c_0 \equiv x_0$

d.h. $x(t) = x_0 e^{at}$. $\quad x_0 \equiv 0$ Gleichg. pkt.

$t \to +\infty$: Verhalten verschieden ($x_0 \neq 0$) für $a > 0$! < 0 !

$\underline{n>1}$: Lösung: $x(t) = c_0 e^{At}$, $t \in \mathbb{R}$ (!)

mit $e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$

(es kann, mit Potenzreihen, Funktionen von Matrizen definiert. Allgem. (siehe FunkAna): Für sym. A noch allgem $f(A)$ definiert! „Spektralsatz")

Muss dann e^{At} stud., um stabilität von Gew DGL in der nähe vom Gleich.gew pkt. studieren

(erweit. auch auf unend. dim. lin. Räume)

A.3. „Funktionentheorie" (WP17/P12; Vork. P1-6)

Studium $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ mit f (komplex) diff.bar (holomorf)

$$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (=: f'(z_0)) \qquad \forall z_0 \in \Omega$$

Überraschung: $\Rightarrow$ f ist ∞-oft (komplex!) diff.bar

& die Taylor-reihe konv. (f ist analytisch):

$\forall z_0 \in \Omega\ \exists \delta > 0, \exists (a_k)_k \subseteq \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \forall z \in B_\delta(z_0)$$

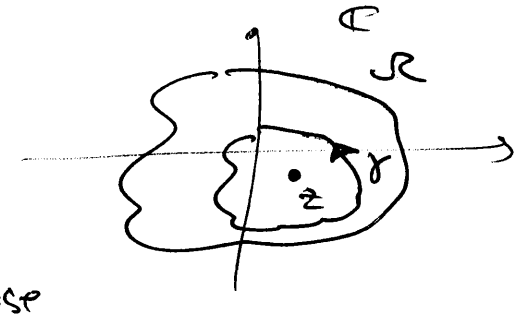
Werkzeug / studium von: Cauchy's Integralformel:

Falls Ω „ohne Löcher":

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad (*)$$

$\forall z \in \Omega$, $\forall$ Weg γ um z

(muss „Weg-Integral" wie in (*) def'en).



Sehr schöne Theorie; Vorkenntnisse „nur" P1–P6 (schöne Anw. von Anal 1–2)

Anwendung: viele; vor allem z.B. ausrechnen von Integrale durch „Residuensatz". – Einstieg in komplexe Geometrie.

A.4. „Optimierung" (WP2; WiMa: P11)

Hier geht es um: Extremalpunkte (Minima / Maxima) einer Funktion über einer gegebenen Menge zu bestimmen

Weierstraß: Stetige Funktion über einer kompakten Menge nimmt Min / MAX an.

Optimierung: Verfahren, die zu finden

(hier: Endlich-dim.; ganze „Variationsrechnung" – auch Hamiltonsche & Lagrangesche Mechanik – in ∞-dim Fälle). Spezialthema:

Konvexe Analysis.

(K)

A.5. Funktional Analysis (WP19/P12; braucht Ana 3!).

Studium von lin. un-endl. $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Topologie (meistens: von Norm) & lineare stetige Abbildungen dazwischen. („beschr. Op.'en").

Räume: Allgem; Banach: $(X, \|\cdot\|)$, vollst. bzgl.

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

Hilbert: $\|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}$ mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt.

Allgem. Eigenschaften & konkrete Beispiele studieren (Folgen- und Funktionenräume, z.B. l_1, l_2, l_p, $C[a,b], C^1[a,b], L^p([a,b])$, $BV(I)$, $Lip(I)$, etc. etc. & deren Eigenschaften).

Wichtig: Studium von (top.) Dualräume:

$$X' := \{ l : X \to \mathbb{K} : l \text{ linear \& stetig} \}$$

$\boxed{\text{A.13 Satz}}$ $\overline{B_R(0)} = \{ \|x\| \leq R \}$ ist kompakt

$\iff$ X ist endlich dim.

$\boxed{\text{A.14 Satz}}$ Falls X reflexiv: („$X'' = X$", z.B. Hilbert)

Jeder beschränkte Folge hat eine schwach konvergente Teilfolge

(d.h. konvergent in ein andere Topologie als der von $\|\cdot\|$ erzeugte).

(Bem.: Reicht oft (!) für Optimierg (d.h., Variationsrechn.) aus.).

Man studiert auch <u>stetige</u>, <u>lin.</u> Abb. („beschr. Op.'en")
(„unstetige lin" → QM/FA2: <u>un</u>beschr. Operatoren).

$T: X \to Y$

& Eigenschaften.

„Typisches" Beispiel: (lin.) <u>Integraloperatoren</u> (erweit von Fourier-Reihe).
(QM & Harmonische Analysis & GewDGL & PDG).

X = Funktionenraum

$$(Tf)(x) := \int k(x,y) f(y)\, dy \quad , \quad T: X \to Y, \; f \mapsto Tf$$

$k = k(x,y)$ „Integralkern"

(Analog zu: $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, lin. Abb. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
aber mit unend. viele Variable).

<u>Spektralsatz</u>: Diagonalisierung von Selbstadjungierte lin Abb.

<u>A.6.</u> „<u>Partielle Differentialgleichungen</u>" (PDG) (WP23; Vork. P1-8 + WP15(!))

Gleichungen, wo die unbekannte eine Fkt. von <u>mehre</u> Var. ist (in GewDGL: Fkt. von <u>1</u> Variable, $x = x(t)$)

z.B. $u: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x)$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

Eine PDG ist eine Gleichung

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \dots, \partial^\alpha u(x)) = 0$$

für eine Abb. $F: \mathcal{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \dots \times \;) \to \mathbb{R}$

(<u>Ordnung</u> der Gleichung: $\max |\alpha|$)

Beispiele: (alle lineare Gl., und Ordnung 2)

(a) Laplace Gleichung (Potentialgl.) $\Delta u = 0$ („u harmonisch")

(b) Poissongl. $\Delta u = f$ (f gegeben)

(c) Wärmeleitungsgl. $\partial_t u - \Delta u = 0$ $(u = u(t,x))$

(d) Wellengleichung $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ $(u = u(t,x))$

Erinnerung: $(\Delta u)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) = \mathrm{Tr}\,(D^2 u)(x)$

(Tr: Spur Matrix)

PDG: Kein allgemeines „Exist.- und Eindeutig. Satz" wie in Gew DGL. (Am Schwierigsten: Existenz!)

Eine Sammlung (siehe oben) an wichtige Beispiele an denen man ähnliche Fragen studiert:

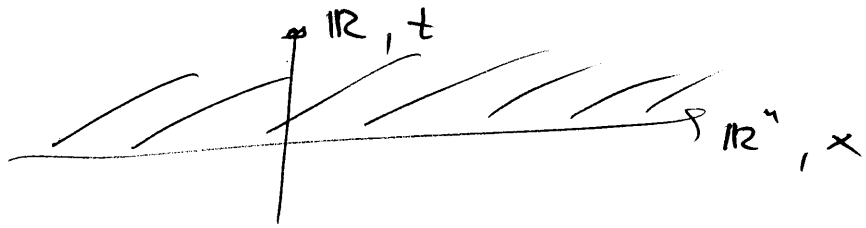
(i) Existenz (von Lösungen)

(ii) Eindeutigkeit unter extra Bedingung

(Laplace + Poisson: Randwert: $u|_{\partial\Omega} = g$, g geg.

Wärme + Welle:

Anfangsbed: $u(t=0,x) = u(0,x) = f(x)\ \forall x$



(iii) „Stabilität" / Stetigkeit in „Daten" (oben: f & g - und u).

(iv) Diverse Eigenschaften von Lösungen (die sehr verschieden sind, für die Beispiele oben

(a) + (b): „elliptische Gleichung"

(c): „parabolische Gl."

(d): „hyperbolische Gl."

Ziel: Dieser 3 wichtigen Typen in großem Detail zu studieren, um (leicht) komplizierte Gleichungen (evt.) später zu studieren:

(α) Fragestellungen verstehen

(β) zu erwartende Resultate verstehen

Sehr spannendes & sehr, sehr Umfangreiches Gebiet (z.B. große Teile der Quantenmechanik & Physik - Strömungsmechanik, Elektrizität & Magnetismus, Allgem. Relativitätstheorie etc. & große Teile der Geometrie).

<u>Zusammenhänge</u> Optimierung, Variationsrechnung, Gew DGL, PDG:

Wie bei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f: I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b]$ oder $I =]a,b[$)

ist das „suchen" nach <u>Extrema</u> (evt. lok.)

(deren Existenz <u>evt.</u> mit Weierstraß (Kompaktheit!) nachgewiesen werden kann)

eng mit der Gleichung $f'(x) = 0$ verbunden.

Für $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (endlich. dim).

ist die Gleichung $\nabla f(x) = 0$

Für $J: X \to \mathbb{R}$, X unendlich. dim

ist die Gleichung

(i) eine <u>Gew. DGL</u> $x'(t) = G(t, x(t))$

(+ Anfang- oder Randbed.)

<u>wenn</u> X einer Funktionenraum ist, von Funktionen von <u>einer</u> Variable; typisch

$$J(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\, dt, \quad x \in X$$

(z.B. ganze Mechanik).

(ii) eine <u>PDG.</u> $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$ (z.B.)

(+ Anfang- oder Randbed.)

<u>Wenn</u> X einer Funktionenraum ist, von

Funktionen von <u>mehrer</u> Variablen ; typisch

$$J(u) = \int_{\mathcal{U}} G(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \quad , \quad u \in \mathbb{X}$$

In (i) & (ii) nennt man die Gleichung „ $f'(x) = 0$ "
(die Gew DGL / PDG , aus „ $DJ(x) = 0$ " , „ $DJ(u) = 0$ ")
dann die <u>Euler - Lagrange Gleichung</u> .