LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Thomas Sørensen
R. Coelho

PROBESTUDIUM
ÜBUNGSBLATT 4 (LÖSUNGEN)

2.-6. September 2019
05.09.2019

Aufgabe 1. Es sei $x_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ s.d. für alle $x, y \in I$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Insbesondere für $y = x_0 \in I$,

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

D.h. f ist stetig in einem beliebigen $x_0 \in I$, i.e. f ist stetig in I.

Aufgabe 2. Es sei $\varepsilon > 0$ und $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für jedes $x, y \in I$:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |x - y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Deswegen ist f gleichmäßig stetig auf I.

Aufgabe 3. Es gilt für alle $x, y \in I = [0, 1[$

$$
\begin{align}
|f(x) - f(y)| &= |x^3 - y^3| \tag{1}\\
&= |(x - y)(x^2 + xy + y^2)| \tag{2}\\
&= |x - y||x^2 + xy + y^2| \tag{3}\\
&\leq |x - y|(|x^2| + |xy| + |y^2|) \tag{4}\\
&\leq |x - y|(1 + 1 + 1) \quad (\text{da } x, y \in [0, 1[) \tag{5}\\
&\leq 3|x - y|. \tag{6}
\end{align}
$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Für $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ gilt für alle $x, y \in I$

$$
\begin{align}
|x - y| < \delta &\Rightarrow |x - y| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{7}\\
&\Rightarrow 3|x - y| < \varepsilon \tag{8}\\
&\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 3|x - y| < \varepsilon \quad (\text{nach } (6)) \tag{9}
\end{align}
$$

Wir haben gezeigt, dass f gleichmäßig stetig auf I ist.
Alternativ, können wir bemerken, dass $x \mapsto x^3$ gleichmäßig stetig auf $[0, 1]$ ist, weil $[0, 1]$ abgeschlossen und beschränkt ist (Satz 4.4 aus der Vorlesung). D.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ s.d. für alle $x, y \in [0, 1]$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Da $[0, 1) \subset [0, 1]$, gilt das Gleiche auf $[0, 1[$.

Aufgabe 4. Es sei $\varepsilon = 1$. Wir zeigen, für alle $\delta > 0$ gibt es $x, y \in (0, 1]$ s.d. $|x - y| < \delta$ *aber* $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon = 1$. Es sei also $\delta > 0$.
Wenn $\delta \leq 1$, dann wählen wir $x = \delta$ und $y = \frac{\delta}{2}$. Dann gilt $|x - y| = \delta/2 < \delta$. Aber

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{\delta} \geq 1 = \varepsilon.$$

Wenn $\delta > 1$, dann wählen wir $x = \frac{1}{\delta}$ und $y = \frac{1}{2\delta}$. Dann gilt $|x - y| = \frac{1}{2\delta} < \frac{1}{2} < \delta$. Aber

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \delta > 1 = \varepsilon.$$

Deswegen ist f *nicht* gleichmäßig stetig auf $(0, 1]$.
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist wegen Satz 4.4 gleichmäßig stetig auf $[\frac{1}{2}, 1]$. Direkter Beweis:
Es gilt für jedes $x, y \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| &= \frac{|y - x|}{|x||y|} && (10) \\ &\leq 2 \cdot 2 \cdot |y - x| \quad (\text{wegen } |x| \geq \frac{1}{2} \text{ und } |y| \geq \frac{1}{2}) && (11) \\ &= 4|y - x| && (12) \end{aligned}$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Dann gilt für jedes $x, y \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow 4|x - y| < 4\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq 4|x - y| < 4\delta = \varepsilon$$

nach (12).