Prof. Dr. Thomas Sørensen
R. Coelho

PROBESTUDIUM
ÜBUNGSBLATT 3 (LÖSUNGEN)

2.-6. September 2019
04.09.2019

Aufgabe 1. (i) Es sei $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt *für jedes (!)* $\delta > 0$

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow 0 = |a - a| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := ax$ ist als Produkt (Satz 3.3(ii)) von den stetigen Funktionen $f_1(x) = a$ (siehe (i)) und $f_2(x) = x$ (siehe Vorlesung) stetig.

(iii),(iv),(v) Induktion.

IA: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ist stetig nach der Vorlesung.

IS: Wir nehmen an, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$ stetig ist (IV). Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Function $g(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x = f(x) \cdot x$. Dann ist g als Produkt der stetigen Funtionen f (IV) und $x \mapsto x$ auch stetig.

(vi) Wir nutzen wieder den Satz 3.3(ii).

(vii) Man zeigt leicht mittels Aufgabe 2(i) und Induktion, dass die Summe endliche überall stetige Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall stetig ist.

Aufgabe 2. (i) Es gilt für jedes $x \in I$

$$(f + g)(x) - (f + g)(x_0) = (f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0)).$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Stetigkeit von f und g bei x_0 gibt es δ_1 und δ_2 s.d.

$$x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insbesondere gibt es ein $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, s.d.

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es folgt

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Aber $|(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|$ nach der Dreiecksungleichung.

(ii) Wir wählen $\varepsilon = |g(x_0)|$. Da g stetig bei x_0, gibt es $\delta > 0$ s.d. $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Deswegen gilt es

$$\begin{aligned}
\varepsilon + |g(x)| &> |g(x_0) - g(x)| + |g(x)| && (1)\\
&\geq |g(x_0) - g(x) + g(x)| \quad \text{(Dreiecksungleichung)} && (2)\\
&= |g(x_0)| && (3)\\
&= \varepsilon && (4)
\end{aligned}$$

für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Insbesondere gilt $|g(x)| > \varepsilon - \varepsilon = 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$ für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

(iii) Seien $x \in I$ und $x_0 \in I$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right| &= \left| \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} \right| && (5)\\
&= \frac{|g(x_0) - g(x)|}{|g(x)|\,|g(x_0)|}. && (6)
\end{aligned}$$

Ist $|g(x_0) - g(x)| < \varepsilon'$, dann gilt auch

$$\begin{aligned}
|g(x_0)| &\leq |g(x_0) - g(x)| + |g(x)| \quad \text{(Dreiecksungleichung)} && (7)\\
&= |g(x) - g(x_0)| + |g(x)| && (8)\\
&< \varepsilon' + |g(x)| \quad \text{(nach Annahme).} && (9)
\end{aligned}$$

Es sei jetzt $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon' := \min(\frac{|g(x_0)|^2}{2}\varepsilon, \frac{|g(x_0)|}{2})$. Es folgt nach Stetigkeit von g, dass ein δ' existiert, s.d.

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon'$$

für alle $x \in]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[$. Deshalb gilt es für alle $x \in]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right| &= \frac{|g(x_0) - g(x)|}{|g(x)|\,|g(x_0)|} \quad \text{(nach (6))} && (10)\\
&< \frac{\varepsilon'}{|g(x)|\,|g(x_0)|} \quad \text{(nach Stetigkeit von } g \text{ bei } x_0) && (11)\\
&\leq \frac{2\varepsilon'}{|g(x_0)|^2} \quad \text{(da aus (9) und der Wahl von } \varepsilon' \text{ folgt } \frac{|g(x_0)|}{2} \leq |g(x)|) && (12)\\
&\leq \varepsilon \quad \text{(nach Wahl von } \varepsilon'), && (13)
\end{aligned}$$

was die Stetigkeit von $\frac{1}{g}$ bei x_0 zeigt, indem wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta (= \delta')$ gefunden haben s.d.

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right| < \varepsilon.$$

Satz 3.3(ii) zeigt, dass $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ als Produkt von stetigen Funktionen stetig ist.