Prof. Dr. Thomas Sørensen
R. Coelho

PROBESTUDIUM
ÜBUNGSBLATT 1 (LÖSUNGEN)

2.-6. September 2019
02.09.2019

Aufgabe 1. (ii)' lautet für $n = 1$:

$$1! := 1 \cdot (1-1)! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$$

Aufgabe 2. Wir setzen $x = 1$, $y = 1$ in Satz 2.6 (Binomialformel) ein.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Aufgabe 3. Nach Definition 2.3. haben wir

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{1}$$

Nach Definition 2.1. (und Aufgabe 1) gilt

$$n! = n \cdot (n-1)! \quad \text{für } n \geq 1.$$

Insbesondere, gilt

$$\frac{n!}{n} = (n-1)! \quad \text{für } n \geq 1.$$

Anwenden auf n und k in der obigen Formel (1):

$$\begin{aligned}
\frac{k}{n}\binom{n}{k} &= \frac{k}{n}\frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{k}{k!}\frac{n!}{n}\frac{1}{(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!}\frac{1}{(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
&= \binom{n-1}{k-1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Wir nutzen mehrmals Definition 2.3:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!}+\frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!}\\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!}+\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}\\ &= \frac{(n-k+1)n!}{(n-k+1)!k!}+\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}\\ &= \frac{(n-k+1)n!}{(n-k+1)!k!}+\frac{n!k}{(n-k+1)!k!}\\ &= \frac{(n-k+1+k)n!}{(n-k+1)!k!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!}=\binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

Aufgabe 5. (1) Nach der Binomialformel ($x=-1$, $y=1$), gilt für $n\in\mathbb{N}$

$$0=0^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

Aufgabe 6. Nach der Binomialformel gilt

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}.$$

IA: $n=1$. $(1+x)^1=1+x\geq 1\cdot x+1$.
IS: Wir nehmen an, dass $(1+x)^n\geq nx+1$. Da $x>-1$, gilt $1+x>0$. Wir multiplizieren die Ungleichung mit $(1+x)$:

$$(1+x)^{n+1}\geq(nx+1)(1+x)=nx+nx^2+x+1\geq nx+x+1\geq(n+1)x+1,$$

weil $nx^2\geq 0$ gilt.

Aufgabe 7.

(3) Induktion:

IA: $n=1$.

$$1!=2\frac{1}{2}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1.$$

IS: Wir nehmen an, es gilt

$$n!\leq 2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Multiplizieren mit $n+1>0$ an beiden Seiten:

$$(n+1)!\leq 2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n\cdot(n+1) \tag{2}$$

Jetzt zeigen wir

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n\leq\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Aber

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n}{2}\right)^n &\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow 2\left(\frac{n}{2}\right)^n &\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \\
\Leftrightarrow 2\left(\frac{2}{2}\right)^n &\leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
\Leftrightarrow 2 &\leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .
\end{aligned}$$

Die Ungleichung (3) ist also äquivalent zu

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n ,$$

was folgt nach Augabe 6:

$$2 = 1 + \frac{1}{n} \cdot n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Wir setzen die Ungleichung (3) in (2) ein:

$$(n+1)! \leq 2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot (n+1) \leq 2 \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \frac{1}{2} \cdot (n+1) = 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} .$$

(4) Nochmal Induktion.

IA: $n = 5$.

$$6! = 720 \text{ und } \left(\frac{6}{2}\right)^6 = 729.$$

IS: Wie oben. Wir nehmen an, es gilt

$$n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n .$$

Multiplizieren mit $n+1 > 0$ an beiden Seiten:

$$(n+1)! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot (n+1) \tag{4}$$

Wir nutzen nochmal (3) in (4):

$$(n+1)! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot (n+1) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \frac{1}{2} \cdot (n+1) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} .$$